

2024 学年第二学期期末试卷八年级数学

时间 90 分钟 满分 100 分

一. 选择题 (共 6 小题)

1. 直线 $y = 3x - 6$ 的截距是 ()

- A. 6 B. -6 C. 3 D. 2

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象与坐标轴的交点问题，求函数值等知识点，熟练掌握一次函数图象及数形结合思想是解题的关键.

把 $x = 0$ 代入一次函数的解析式求出 y 的值即可.

【详解】 解： 令 $x = 0$ ， 则 $y = 3x - 6 = 3 \times 0 - 6 = -6$ ，

$\therefore$ 直线 $y = 3x - 6$ 的截距是 -6 ，

故选： B.

2. 下列方程中， 没有实数解的是 ()

- A. $x^2 - 2 = 0$ B. $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ C. $x^2 + y^2 = 0$ D. $\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x-6} = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了方程实数解的存在性判断， 涉及一元二次方程、 分式方程、 根式方程， 分别求出方程的解判断即可得解， 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解： A、 $\because x^2 - 2 = 0$ ， $\therefore x^2 = 2$ ， 解得 $x = \pm\sqrt{2}$ ， 均为实数， 故 A 有实数解， 不符合题意；

B、 两边同乘 $x-1$ 得 $x^2 = 1$ ， 解得 $x = \pm 1$ ， 因 $x = 1$ 使分母为 0， 舍去， 故唯一解为 $x = -1$ ， B 有实数解， 不符合题意；

C、 $x^2 + y^2 = 0$ ， 平方和为 0 当且仅当 $x = 0$ 且 $y = 0$ ， 存在实数解 $(0, 0)$ ， 故 C 有解， 不符合题意；

D、 $\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x-6} = 0$ ， 根号内需非负： $4-x \geq 0$ (即 $x \leq 4$) 且 $x-6 \geq 0$ (即 $x \geq 6$)， 两条件无交集， 故无实数 x 满足， D 无解， 故 D 符合题意；

故选： D.

3. 下列事件中， 随机事件的是 ()

- A. 直线 $y = x - 3$ 与直线 $y = 3x - 1$ 有公共点
- B. 从只装有 5 个白球的袋子里摸出 1 个红球
- C. 任意画一个三角形，其内角和是 180 度
- D. 掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了事件的分类，根据随机事件的定义，即可能发生也可能不发生的事件，逐一分析各选项即可，熟练掌握随机事件的定义是解此题的关键.

【详解】解：A、直线 $y = x - 3$ 与 $y = 3x - 1$ 的一次项系数分别为 1 和 3，不相等，两直线必相交，属于必然事件，故不符合题意；

B、袋中只有白球，摸出红球不可能发生，属于不可能事件，故不符合题意；

C、三角形内角和恒为 180° ，属于必然事件，故不符合题意；

D、掷硬币可能出现正面或反面，结果不确定，属于随机事件，故符合题意；

故选：D.

4. 下列关于向量的说法中，正确的是（ ）

- A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$
- B. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均为单位向量，那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- C. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量，那么 $\vec{e} = 1$
- D. 若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，则 A、B、C、D 构成平行四边形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查向量的基本概念，包括模长、单位向量及平行四边形的判定，需逐一分析各选项的正确性，熟练掌握向量的基本概念是解此题的关键.

【详解】解：A、若两向量模长相等，它们的方向未必相同或相反，例如，向量 $\vec{a} = (1, 0)$ 与 $\vec{b} = (0, 1)$ 的模均为 1，但既不相等也不相反，故 A 错误；

B、单位向量的定义是模长为 1 的向量，因此无论方向如何， $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的模均为 1，必然相等，故 B 正确；

C、单位向量的模长为 1，但向量本身是既有大小又有方向的量，不能直接等于标量 1，正确表述应为 $|\vec{e}| = 1$ ，故 C 错误；

D、若 $\overline{AB} = \overline{DC}$ ，说明 AB 与 DC 平行且长度相等，但若四点共线（如 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， $D(2,0)$ ， $C(3,0)$ ），则无法构成平行四边形，故 D 错误；

故选：B.

5. 已知四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AC \perp BD$ ， $\angle ABO = \angle CBO$ ，再添加一个条件使四边形 $ABCD$ 是菱形，添加条件不正确的是（ ）

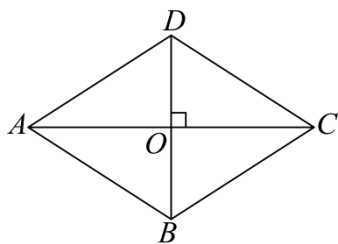
- A. $AB = AD$ B. $AB \parallel CD$ C. $OB = OD$ D. $AD = CD$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了证明四边形是菱形、全等三角形的判定与性质、线段垂直平分线的判定与性质，证明 $\triangle AOB \cong \triangle COB$ (ASA)，得出 $OA = OC$ ，从而可得 BD 垂直平分 AC ，由线段垂直平分线的性质可得 $AB = BC$ ， $AD = CD$ ，再结合各选项逐项分析即可得解，熟练掌握菱形的判定定理是解此题的关键.

【详解】解：如图：



$\therefore AC \perp BD$,

$\therefore \angle AOB = \angle COB = 90^\circ$,

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COB$ 中，

$$\begin{cases} \angle AOB = \angle COB = 90^\circ \\ OB = OB \\ \angle ABO = \angle CBO \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COB$ (ASA),

$\therefore OA = OC$,

$\therefore BD$ 垂直平分 AC ,

$\therefore AB = BC$, $AD = CD$,

A、 $\therefore AB = AD$,

$\therefore AB = BC = CD = AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，故不符合题意；

B、 $\therefore AB \parallel CD$,

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CDG$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle CDG \\ \angle AGE = \angle CGD, \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG (\text{AAS}),$$

故 A 正确, 不符合题意;

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG (\text{AAS}),$$

$$\therefore AG = CG, EG = DG,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE,$$

$$\because \angle AGC = \angle EGD,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA = \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore ED \parallel AC,$$

故 B 正确, 不符合题意;

$$\text{设 } AB = CD = t, GD = x, \text{ 则 } AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x,$$

$$\because \text{Rt}\triangle CDG \text{ 中, } CD^2 + DG^2 = CG^2,$$

$$\therefore t^2 + x^2 = (\sqrt{2}t - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore GD = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4}t = \frac{3\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = 3GD,$$

故 C 不正确, 符合题意;

$\because$ 矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠, 点 B 的对应点为 E ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC},$$

$$\because AG = 3GD,$$

$$\therefore CG = 3GE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle AEG}$$

故 D 正确，不符合题意，

故选：C

二. 填空题 (共 12 小题)

7. 将直线 $y = x - 2$ 沿 y 轴方向向下平移 3 个单位，平移后的直线表达式是_____.

【答案】 $y = x - 5$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象的平移. 根据直线的平移规则：上加下减，即可得解.

【详解】 解：将直线 $y = x - 2$ 沿 y 轴方向向下平移 3 个单位，平移后的直线表达式是 $y = x - 2 - 3 = x - 5$.

故答案为： $y = x - 5$.

8. 已知一次函数 $y = (1 - 3m)x + 2$ ， y 的值随 x 的值的增大而增大，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的性质. 根据一次函数 $y = kx + b$ ，当 $k > 0$ 时， y 的值随 x 的值的增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 的值随 x 的值的增大而减小解答即可.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = (1 - 3m)x + 2$ ， y 的值随 x 的值的增大而增大，

$$\therefore 1 - 3m > 0,$$

解得： $m < \frac{1}{3}$.

故答案为： $m < \frac{1}{3}$.

9. 方程 $\sqrt{6 - x} = x$ 的实数解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 此题主要考查了解无理方程，熟练掌握无理方程的解法是解决问题的关键.

将方程 $\sqrt{6 - x} = x$ 的两边同时平方得 $6 - x = x^2$ ，再解此方程得 $x = 2$ ， $x = -3$ ，然后再进行检验即可得出答案.

【详解】 解：将方程 $\sqrt{6 - x} = x$ 的两边同时平方，得： $6 - x = x^2$ ，

整理得: $x^2 + x - 6 = 0$,

解得: $x = 2$, $x = -3$,

当 $x = 2$ 时, 左边 $= \sqrt{6-2} = 2$, 右边 $= 2$,

$\therefore x = 2$ 是该方程的解,

当 $x = -3$ 时, 左边 $= \sqrt{6-(-3)} = 3$, 右边 $= -3$,

$\therefore x = -3$ 为增根, 不是该方程的解,

$\therefore$ 方程 $\sqrt{6-x} = x$ 的实数解是 $x = 2$.

故答案为: $x = 2$.

10. 如果关于 x 的方程 $ax = x + 2$ 有解, 那么 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a \neq 1$

【解析】

【分析】此题考查的是一元一次方程的解法. 移项合并同类项, 当 x 的系数不等于 0 时, 方程有解, 据此即可求解.

【详解】解: 移项合并同类项得 $(a-1)x = 2$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax = x + 2$ 有解,

$\therefore a-1 \neq 0$,

即 $a \neq 1$,

故答案为: $a \neq 1$.

11. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 2$ 时, 若设 $\frac{x}{x^2-1} = y$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $3y^2 - 2y + 1 = 0$

【解析】

【分析】本题考查了整体换元法、去分母将分式方程化为整式方程. 将原分式方程中的 $\frac{x}{x^2-1}$ 全部换为 y , 最后再去分母化为整式方程即可.

【详解】解: 设 $\frac{x}{x^2-1} = y$, 则设 $\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$,

把 $\frac{x}{x^2-1} = y$ 代入原方程得: $3y + \frac{1}{y} = 2$,

方程两边同时乘以 y 整理得: $3y^2 - 2y + 1 = 0$.

故答案为: $3y^2 - 2y + 1 = 0$.

12. 我国古代中有这样一个问题: “今有户高多于广六尺八寸, 两隅相去适一丈. 问户高、广各几何?” 大意是说: 已知矩形门的高比宽多 6.8 尺, 门的对角线长 10 尺, 那么门的高和宽各是多少? 如果设矩形门的宽为 x 尺, 高为 y 尺, 那么可列方程组是_____.

【答案】
$$\begin{cases} x + 6.8 = y \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理的应用, 根据勾股定理列方程是关键.

设长方形门的宽 x 尺, 则高是 y 尺, 根据勾股定理即可列方程求解.

【详解】 解: 设长方形门的宽 x 尺, 高是 y 尺, 根据题意得:

$$\begin{cases} x + 6.8 = y \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases},$$

故答案为:
$$\begin{cases} x + 6.8 = y \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases}.$$

13. 如果一个多边形的内角和是 1080° , 那么这个多边形的边数是_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了多边形内角和, 设这个多边形的边数为 n , 根据多边形内角和建立方程即可求解.

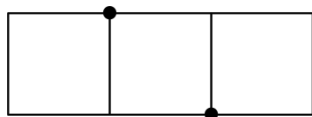
【详解】 解: 设这个多边形的边数为 n ,

由题意得: $(n - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$,

解得: $n = 8$;

故答案为: 8.

14. 在 1×3 的正方形网格格点上放三枚棋子, 按图所示的位置已放置了两枚棋子, 若第三枚棋子随机放在其它格点上, 则以这三枚棋子所在的格点为顶点的三角形是直角三角形的概率是_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

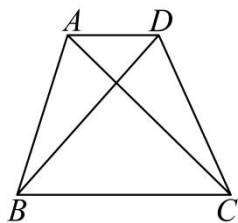
【分析】此题考查了概率公式的应用．注意用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．由题可知共有 6 种等可能的结果，以这三枚棋子所在的格点为顶点的三角形是直角三角形的有 4 种情况，然后直接利用概率公式求解即可求得答案．

【详解】解：∵共有 6 种等可能的结果，以这三枚棋子所在的格点为顶点的三角形是直角三角形的有 4 种情况，

∴以这三枚棋子所在的格点为顶点的三角形是直角三角形的概率为： $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ．

故答案为： $\frac{2}{3}$ ．

15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，连接 AC 、 BD ，已知梯形 $ABCD$ 的面积为 17， $\triangle BDC$ 的面积为 12，那么 $\triangle ADC$ 的面积_____．

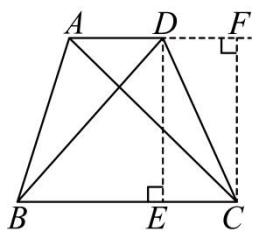


【答案】5

【解析】

【分析】本题考查平行线之间的距离相等，涉及梯形面积公式、三角形面积公式等知识，过点 D 作 $DE \perp BC$ ，过点 C 作 $CF \perp AD$ ，如图所示，根据题意，表示出梯形 $ABCD$ 面积与 $\triangle BDC$ ，数形结合即可得到 $\triangle ADC$ 的面积．熟记平行线之间的距离相等，数形结合表示出相关面积之间的关系是解决问题的关键．

【详解】解：过点 D 作 $DE \perp BC$ ，过点 C 作 $CF \perp AD$ ，如图所示：



在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，则 $DE = CF$ ，

∵梯形 $ABCD$ 的面积为 17，

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot DE = 17,$$

∵ $\triangle BDC$ 的面积为 12，

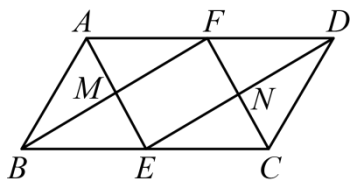
$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DE = 12,$$

$$\therefore 17 = \frac{1}{2} BC \cdot DE + \frac{1}{2} AD \cdot DE = 12 + \frac{1}{2} AD \cdot CF = 12 + S_{\triangle ADC},$$

解得 $S_{\triangle ADC} = 17 - 12 = 5$,

故答案为: 5.

16. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 3$, $AD = 6$, 点 E 、 F 分别是边 BC 、 AD 边的中点, 点 M 是 AE 与 BF 的交点, 点 N 是 CF 与 DE 的交点, 则四边形 $ENFM$ 的周长是_____.

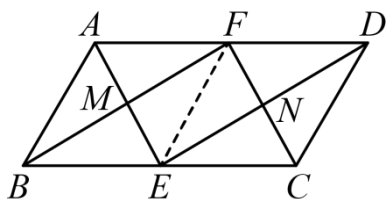


【答案】 $3 + 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接 EF , 点 E 、 F 分别是边 BC 、 AD 边的中点, 可知 $BE = AF = AB = 3$, 可证四边形 $ABEF$ 为菱形, 根据菱形的性质可知 $AE \perp BF$, 且 AE 与 BF 互相平分, $\angle ABC = 60^\circ$, $\triangle ABE$ 为等边三角形, $ME = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} AB = \frac{3}{2}$, $EF = 4$, 由勾股定理求 MF , 根据菱形的性质可证四边形 $ENFM$ 为矩形, 再求四边形 $ENFM$ 的周长.

【详解】解: 连接 EF ,



$\because$ 点 E 、 F 分别是边 BC 、 AD 边的中点, $AB = 3$, $AD = 6$,

$\therefore BE = AF = AB = 3$,

$\therefore AF \parallel BE$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 为菱形,

$\therefore EF = 3$,

$\therefore AE \perp BF$, 且 AE 与 BF 互相平分,

同理可得: 四边形 $EFCD$ 为菱形,

$\therefore CF \perp DE$,

$\because \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形,

$$\therefore ME = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle MEF \text{ 中, 由勾股定理, 得 } MF = \sqrt{EF^2 - ME^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 为菱形, 四边形 $EFCD$ 为菱形,

$$\therefore \angle BFE = \frac{1}{2}\angle AFE, \quad \angle CFE = \frac{1}{2}\angle DFE,$$

$$\therefore \angle AFE + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE + \angle CFE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because AE \perp BF, \quad CF \perp DE,$$

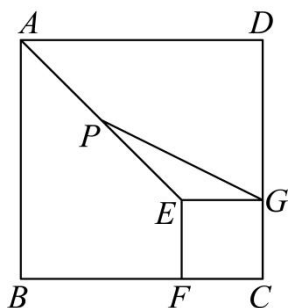
$\therefore$ 四边形 $ENFM$ 为矩形,

$$\therefore \text{四边形 } ENFM \text{ 的周长} = 2(ME + MF) = 3 + 3\sqrt{3}.$$

故答案为: $3 + 3\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了菱形的判定和性质, 等边三角形的判定和性质, 勾股定理, 矩形的判定和性质, 熟练掌握各知识点是解题的关键.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $EF CG$ 的边长分别为 9 和 3, 点 F, G 分别在边 BC, CD 上, P 为 AE 的中点, 连接 PG , 则 PG 的长为 _____.



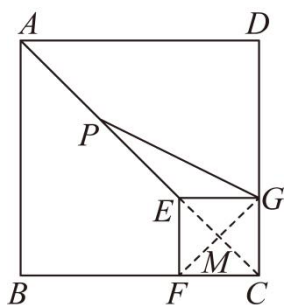
【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质, 勾股定理, 三角形等知识点, 牢记性质和定理内容, 并结合图形灵活运用是解题关键.

连接 AC , 根据正方形的性质可得 A, E, C 三点共线, 连接 FG 交 AC 于点 M , 由正方形的性质求和勾股定理可求得 EC 和 FG , AC 的长度, 从而求得 AE , 因 P 为 AE 的中点, 可得 PE 和 AP , 再由正方形的性质可得 GM 和 EM , 在 $\text{Rt}\triangle PGM$ 中, 求解即可.

【详解】解: 如下图, 连接 AC , 连接 FG 与 AC 交于点 M



$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFCG$ 是正方形，且点 F 、 G 分别在边 BC 、 CD 上

$\therefore A$ 、 E 、 C 三点共线， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle EFC = 90^\circ$ ， $EC \perp FG$ ， $EC = FG$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = 9$ ，

由勾股定理得： $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}$

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中， $\angle EFC = 90^\circ$ ， $EF = FC = 3$

由勾股定理得： $EC = \sqrt{EF^2 + FC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore AE = AC - EC = 6\sqrt{2}$

又 $\because P$ 是 AE 的中点， M 是 EC 的中点

$\therefore PM = \frac{1}{2}AE + \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}AC = \frac{9}{2}\sqrt{2}$

又 $\because GM = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}EC = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

在 $\text{Rt}\triangle PGM$ 中，由勾股定理得： $PG^2 = PM^2 + GM^2$

即： $PG = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{5} = 20$

故答案为： $3\sqrt{5}$

18. 新定义：有一组对角相等而另一组对角不相等的四边形叫做“等对角四边形”。在“等对角四边形” $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AD = 7$ ，对角线 AC 的长_____。

【答案】 $2\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{73}$

【解析】

【分析】 根据“等对角四边形”定义，分两种情况作图：当 $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ 时；当 $\angle BCD = \angle DAB = 60^\circ$ 时；结合矩形性质、勾股定理及解直角三角形求解即可得到答案。

【详解】 解：当 $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ 时，延长 AD ， BC 相交于点 E ，如图所示：

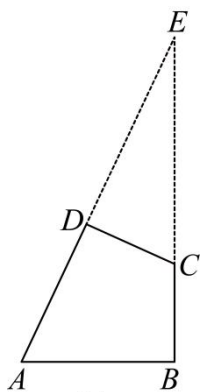


图1

$$\because \angle DAB = 60^\circ, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ - \angle DAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = 2AB = 10, CE = 2CD,$$

$$\therefore DE = AE - AD = 10 - 7 = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 由勾股定理得 $CE^2 = DE^2 + CD^2$,

$$\therefore 4CD^2 = 9 + CD^2,$$

$$\therefore CD = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{7^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13};$$

当 $\angle BCD = \angle DAB = 60^\circ$ 时, 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M , $DN \perp BC$ 于点 N , 如图所示:

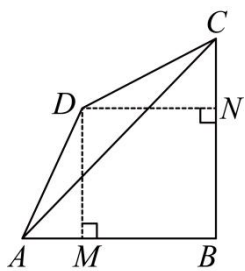


图2

则 $\angle AMD = 90^\circ$, 四边形 $BNDM$ 是矩形,

$$\because \angle DAB = 60^\circ, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = 90^\circ - \angle DAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore AM = \frac{1}{2}AD = \frac{7}{2},$$

$$\therefore DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore DN = BM = AB - AM = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}, \quad BN = DM = \frac{7}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore CN = \frac{DN}{\tan 60^\circ} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BC = BN + CN = \frac{7}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{73},$$

综上所述, AC 的长为 $2\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{73}$.

【点睛】 本题考查了新定义“等对角四边形”、矩形的判定与性质、勾股定理、解直角三角形等知识, 熟练掌握新定义“等对角四边形”、矩形的判定与性质、勾股定理、解直角三角形并作出合理的辅助线是解题的关键.

三. 简答题 (共 4 小题)

19. 请阅读下列材料回答问题: 在解分式方程 $\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = 1$ 时, 小明的解法如下:

解: (第①步) 去分母, 得: $x-1-2x=1$,

(第②步) 解这个整式方程, 得: $x=-2$,

(第③步) 检验: 把 $x=-2$ 代入 x^2-1 , 得 $x^2-1 \neq 0$,

(第④步) 所以, 原方程的根是 $x=-2$.

(1) 你认为小明在第_____步出现了错误; (只填序号)

(2) 针对小明解分式方程出现的错误, 请你提出一条解分式方程时的注意事项_____;

(3) 写出上述分式方程的正确解法.

【答案】 (1) ① (2) 去分母时, 常数项 1 也要乘以最简公分母

(3) 原方程的解为 $x=0$, 正确解法见解析

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 解题关键是掌握分式方程的解法.

(1) 根据分式方程的解法, 逐一分析, 再作出判断;

(2) 根据去分母求解;

(3) 根据分式方程的解法的一般步骤求解.

【小问 1 详解】

解: 小明在第①步出现了错误,

故答案为: ①;

【小问 2 详解】

提出一条解分式方程时的注意事项：去分母时，常数项 1 也要乘以最简公分母；

故答案为：去分母时，常数项 1 也要乘以最简公分母；

【小问 3 详解】

原方程去分母得： $x - 1 - 2x = x^2 - 1$ ，

整理得： $x^2 + x = 0$ ，

解得： $x_1 = -1$ ， $x_2 = 0$ ，

经检验： $x = -1$ 是原方程的增根舍去，

故原方程的解为 $x = 0$ 。

20. 解方程组：
$$\begin{cases} 3x - y = 4 & \text{①} \\ 9x^2 + 6xy + y^2 = 4 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，由②得 $(3x + y)^2 = 4$ ，则原方程组为 $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$ ，

分别解二元一次方程组，即可求解。

【详解】 解：
$$\begin{cases} 3x - y = 4 & \text{①} \\ 9x^2 + 6xy + y^2 = 4 & \text{②} \end{cases}$$

由②得 $(3x + y)^2 = 4$

$$\therefore 3x + y = \pm 2$$

$$\therefore \text{原方程组为 } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases}$$

21. 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 M 为对角线 AC 上的一点，点 N 为边 BC 上的一点，且点 A 和点 N 关于直线 BM 对称。

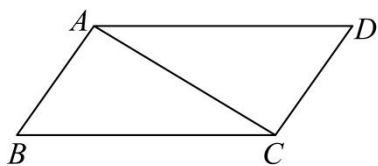


图1

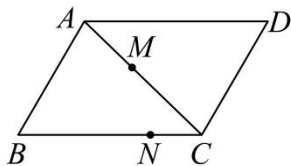


图2

(1) 请用尺规作图的方法在图 1 中确定点 M , N 的位置, 并在图中求作: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{NC}$ (不写作法, 保留作图痕迹, 写出结论);

(2) 如图 2 所示, 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 4$, 则 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】(1) 见解析 (2) 4

【解析】

【分析】(1) 作 $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 M , 作 BM 的垂线交 BC 于点 N , 则点 M 和点 N 即为所求作的点; 由 $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CD}$ 可知, 向量 $\overrightarrow{CD}$ 即为所求作的向量;

(2) 连接 AN , BM , 证明 $\triangle ABN$ 是等边三角形得 $AN = AB = 4$, 然后根据 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{AN}|$ 即可求解.

【小问 1 详解】

如图, 点 M 和点 N 即为所求作的点, 向量 $\overrightarrow{CD}$ 即为所求作的向量.

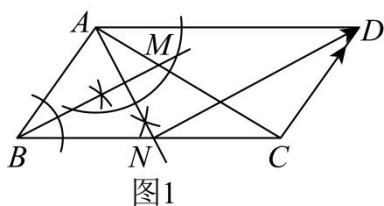


图1

【小问 2 详解】

如图, 连接 AN , BM

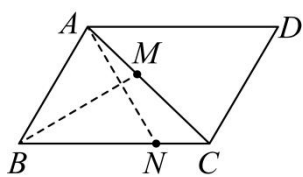


图2

$\because$ 点 A 和点 N 关于直线 BM 对称,

$\therefore BN = AB$.

$\because \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABN$ 是等边三角形,

$\therefore AN = AB = 4$,

$\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{AN}| = 4$,

【点睛】 本题考查了尺规作图, 轴对称的性质, 等边三角形的判定与性质, 向量的运算等知识, 熟练掌握

向量的知识是解答本题的关键.

22. 某机械加工厂计划在一定时间内组装 200 个机器人, 后因接到大型展会订单, 不但需要增产 20%, 而且要提前 4 天交货. 经生产部测算, 每天需要多组装 5 个. 问原计划每天组装多少个机器人?

【答案】原计划每天组装 10 个机器人

【解析】

【分析】本题考查了分式的实际应用, 解题关键是找准等量关系.

设原计划每天组装 x 个机器人, 则实际每天需组装 $(x+5)$ 个机器人, 根据等量关系列出分式方程求解, 并验根.

【详解】解: 设原计划每天组装 x 个机器人, 则实际每天需组装 $(x+5)$ 个机器人,

根据题意得: $\frac{200}{x} - \frac{200 \times (1+20\%)}{x+5} = 4$,

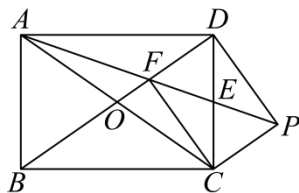
解得: $x_1 = 10$, $x_2 = -25$,

经检验, $x_1 = 10$, $x_2 = -25$ 均为所列方程的解, $x_1 = 10$ 符合题意, $x_2 = -25$ 不符合题意, 舍去.

答: 原计划每天组装 10 个机器人.

四. 解答题 (共 4 小题)

23. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O , 点 E 是 CD 的中点, 连接 AE 交 BD 于点 F , 延长 AE 到点 P , 使 $FP = AF$, 连接 CF , CP , DP .



(1) 求证: 四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

(2) 若四边形 $CFDP$ 是矩形, 且 $AD = \sqrt{2}$, 求 AB 的长度.

【答案】(1) 见解析 (2) AB 的长度为 1

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质推出 OF 是 $\triangle ACP$ 的中位线, 利用 ASA 证明 $\triangle DEF \cong \triangle CEP$, 根据全等三角形的性质得到 $EF = EP$, 结合 $DE = CE$, 即可判定四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

(2) 根据矩形的性质得到 $EF = DE = PE = CE = \frac{1}{2}CD$, $FP = CD$, 根据勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore FP = AF,$$

$\therefore OF$ 是 $\triangle ACP$ 的中位线,

$$\therefore OF \parallel CP,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle PCE,$$

$\therefore$ 点 E 是 CD 的中点,

$$\therefore DE = CE,$$

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle CEP$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle FDE = \angle PCE \\ DE = CE \\ \angle DEF = \angle CEP \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle CEP (\text{ASA}),$$

$$\therefore EF = EP,$$

又 $\therefore DE = CE$,

$\therefore$ 四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AB, \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2,$$

若四边形 $CFDP$ 是矩形, 则

$$EF = DE = PE = CE = \frac{1}{2}CD, \quad FP = CD,$$

$$\therefore AF = FP,$$

$$\therefore AE = AF + EF = \frac{3}{2}CD,$$

$$\therefore AD^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = \left(\frac{3}{2}CD\right)^2,$$

$$\therefore AD^2 = 2CD^2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}CD \text{ 或 } AD = -\sqrt{2}CD \text{ (舍去),}$$

$$\therefore AD = \sqrt{2},$$

$$\therefore CD = AB = 1.$$

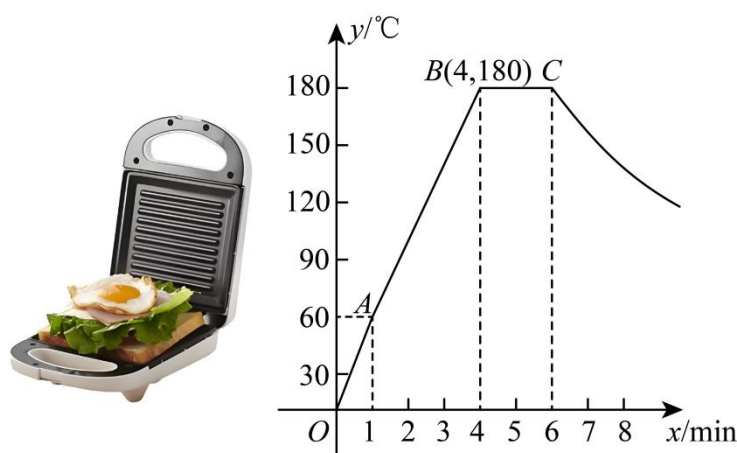
【点睛】此题考查了矩形的性质，三角形中位线的性质，平行四边形的判定，勾股定理，全等三角形的判定与性质，利用矩形的性质证明 $\triangle DEF \cong \triangle CEP$ 是解题的关键.

24. 某款三明治机制作三明治的工作原理如下：

①预热阶段：开机 1 分钟空烧预热至 60°C ，机器温度 y 与时间 x 成正比例函数关系；

②操作阶段：操作 3 分钟后机器温度均衡升至最高温度 180°C 后保持恒温状态，机器温度 y 与时间 x 成一次函数关系；

③断电阶段：操作完成后进行断电降温，机器温度 y 与时间 x 成反比例关系. 如图所示为某次制作三明治时机器温度 y ($^{\circ}\text{C}$) 与时间 x (min) 的函数图象，请结合图象回答下列问题：



(1) 当 $1 \leq x \leq 4$ 时，求机器温度 y 与时间 x 的函数关系式；

(2) 求三明治机工作温度在 100°C 及其以上持续的时间.

【答案】(1) 当 $1 \leq x \leq 4$ 时，机器温度 y 与时间 x 的函数关系式为 $y = 40x + 20$

(2) 三明治机工作温度在 100°C 及其以上持续 8.8 分钟

【解析】

【分析】本题考查一次函数解应用题、反比例函数解应用题，读懂题意，利用待定系数法确定函数关系式是解决问题的关键.

(1) 由待定系数法列方程组求解即可得到答案；

(2) 由 (1) 可知，当 $y = 100$ 时，求出此时对应的时间，再由待定系数法求出反比例函数关系式，当 $y = 100$ 时，求出此时对应的时间，作差即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：设机器温度 y 与时间 x 的函数关系式为 $y = kx + b$,

将 $A(1,60)$ 、 $B(4,180)$ 代入得
$$\begin{cases} 60 = k + b \\ 180 = 4k + b \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 40 \\ b = 20 \end{cases},$$

$\therefore$ 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, 机器温度 y 与时间 x 的函数关系式为 $y = 40x + 20$;

【小问 2 详解】

解: 当 $y = 100$ 时, 得 $100 = 40x + 20$, 解得 $x = 2$,

设断电阶段机器温度 y 与时间 x 的函数关系式为 $y = \frac{k}{x}$,

将 $C(6, 180)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $180 = \frac{k}{6}$,

解得 $k = 1080$,

$\therefore$ 断电阶段机器温度 y 与时间 x 的函数关系式为 $y = \frac{1080}{x} (x \geq 6)$,

当 $y = 100$ 时, 得 $\frac{1080}{x} = 100$,

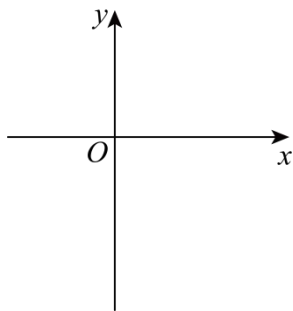
解得 $x = 10.8$,

经检验 $x = 10.8$ 是原方程的解,

则 $10.8 - 2 = 8.8$ (分钟).

答: 三明治机工作温度在 100°C 及其以上持续 8.8 分钟.

25. 在平面直角坐标系中, 已知直线 $l: y = kx - 4$ 经过点 $A(6, 0)$, 动点 P 的坐标为 $(m, -m + 2)$.



(1) 当直线 l 经过点 P 时, 求点 P 的坐标;

(2) 过点 P 作 y 轴的垂线 l_1 交直线 l 于点 Q , 垂足为点 M . 当以 O 、 A 、 P 、 Q 为顶点的四边形为平行四边形时, 求 m 的值.

【答案】(1) P 的坐标为 $(3.6, -1.6)$

(2) $m = \frac{6}{5}$ 或 6

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与平行四边形的存在性问题, 涉及待定系数法求函数解析式, 平行四边形的

性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

(1) 先由待定系数法求直线 l 解析式，再把 $P(m, -m+2)$ 代入即可求解；

(2) 可得 $y_Q = y_P = -m+2$ 将 $y_Q = y_P = -m+2$ 代入 $y = \frac{2}{3}x - 4$ ，求得 $x_Q = -\frac{3}{2}m + 9$ ，则

$PQ = \left| -\frac{3}{2}m + 9 - m \right| = \left| -\frac{5}{2}m + 9 \right|$ ，由平行四边形得到 $PQ = OA = 6$ ，则 $\left| -\frac{5}{2}m + 9 \right| = 6$ ，解方程即可.

【小问 1 详解】

解：将点 $A(6, 0)$ 代入解析式得： $6k - 4 = 0$ ，

解得： $k = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore$ 直线 l 的表达式为： $y = \frac{2}{3}x - 4$ ；

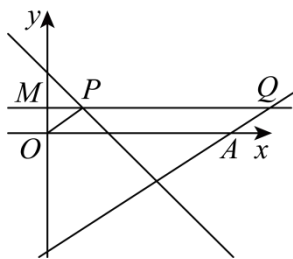
将点 $P(m, -m+2)$ 代入解析式得： $\frac{2}{3}m - 4 = -m + 2$ ，

解得： $m = 3.6$ ，

$\therefore P$ 的坐标为 $(3.6, -1.6)$ ；

【小问 2 详解】

解：如图：



$\therefore PQ \perp y$ 轴，

$\therefore PQ \parallel OA$ ，

$\therefore y_Q = y_P = -m + 2$

$\therefore$ 点 Q 在直线 l 上，

$\therefore$ 将 $y_Q = y_P = -m + 2$ 代入 $y = \frac{2}{3}x - 4$ ，

$$\text{则 } \frac{2}{3}x_Q - 4 = -m + 2$$

$$\text{解得: } x_Q = -\frac{3}{2}m + 9,$$

$$\therefore PQ = \left| -\frac{3}{2}m + 9 - m \right| = \left| -\frac{5}{2}m + 9 \right|$$

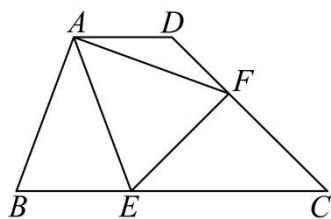
当以 O 、 A 、 P 、 Q 为顶点的四边形为平行四边形时,

$$\text{则 } PQ = OA = 6,$$

$$\therefore \left| -\frac{5}{2}m + 9 \right| = 6$$

$$\text{解得: } m = \frac{6}{5} \text{ 或 } 6.$$

26. 如图, 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle C = 45^\circ$, 点 E 、 F 分别是边 BC 和 CD 上的动点 (点 E 不与点 B 重合, 点 F 不与点 D 重合), 且 $\angle BAF = 90^\circ$, $AE = AF = AB$, 联结 EF .



- (1) 若 $DF = 2$, 则点 F 到 AD 的距离是_____;
- (2) 判断 $\triangle CEF$ 的形状并加以证明;
- (3) 若 $EF = 4$, 设 $DF = x$, $AB = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域.

【答案】 (1) $\sqrt{2}$

(2) $\triangle EFC$ 为等腰直角三角形, 证明见解析

(3) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 8}$ ($x > 0$)

【解析】

【分析】 本题考查了四边形与三角形综合, 主要涉及了全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质、勾股定理等知识点,

(1) 过点 F 做 $FH \perp AD$, 垂足为 H , 由 $\angle C = 45^\circ$, $AD \parallel BC$, 可得 $\angle FDH = \angle C = 45^\circ$, 从而证明 $\triangle FDH$ 是等腰直角三角形, 利用勾股定理即可求出 $FH = \frac{\sqrt{2}}{2}FD$;

(2) 根据等边对等角可得 $\angle AFE = \angle AEF$, $\angle ABE = \angle AEB$, 结合四边形内角和等于 360° , 可得 $2\angle BEF + 90^\circ = 360^\circ$, 由此求出 $\angle FEC = 180^\circ - \angle BEF = 45^\circ$, 进而即可判定 $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形,

(3) 过点 F 做 $FH \perp AD$, 垂足为 H , 交 BC 于 K , 过点 A 作 $AG \perp BC$, 垂足为 G , 容易证明平行四边形 $AGKH$ 是矩形, $\triangle ABG \cong \triangle AFH$ (AAS), 结合由 (1) 得 $BG = FH = \frac{\sqrt{2}}{2} DF = \frac{\sqrt{2}}{2} x$, 再由 (2)

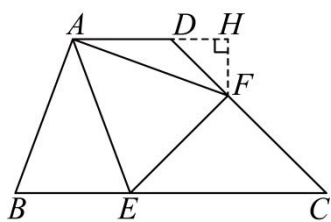
得 $\triangle EFK$ 是等腰直角三角形, 求出 $FK = \frac{\sqrt{2}}{2} EF = 2\sqrt{2}$, $AG = HK = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} x$, 在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中,

根据 $AB = \sqrt{AG^2 + BG^2}$, 求出 y 关于 x 的函数解析式.

$$\therefore y = \sqrt{(2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 8}.$$

【小问 1 详解】

解: 过点 F 做 $FH \perp AD$, 垂足为 H ,



$$\therefore \angle C = 45^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle FDH = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HFD = 90^\circ - \angle FDH = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle FDH \text{ 是等腰直角三角形, } DH = FH,$$

$$\therefore 2FH^2 = FD^2,$$

$$\therefore FH = \frac{\sqrt{2}}{2} FD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 到 } AD \text{ 的距离是 } \sqrt{2},$$

【小问 2 详解】

解: 结论: $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形,

证明: $\because AE = AF = AB$,

$$\therefore \angle AFE = \angle AEF, \angle ABE = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle AFE + \angle AEF + \angle ABE + \angle AEB + \angle BAF = 360^\circ,$$

$$\therefore 2(\angle AEF + \angle AEB) + \angle BAF = 360^\circ,$$

$$\because \angle BEF = \angle AEF + \angle AEB, \quad \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\therefore 2\angle BEF + 90^\circ = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = 180^\circ - \angle BEF = 45^\circ,$$

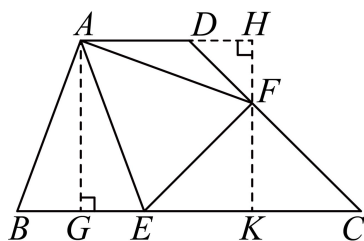
$$\text{又} \because \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore EF = FC, \quad \angle EFC = 90^\circ,$$

即 $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形,

【小问 3 详解】

解: 过点 F 做 $FH \perp AD$, 垂足为 H , 交 BC 于 K , 过点 A 作 $AG \perp BC$, 垂足为 G ,



$$\text{又} \because AD \parallel BC,$$

$$\therefore AG \perp AD, \quad \text{即} \angle GAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } AGKH \text{ 是矩形},$$

$$\therefore \angle BAG + \angle GAF = \angle GAF + \angle FAH = 90^\circ,$$

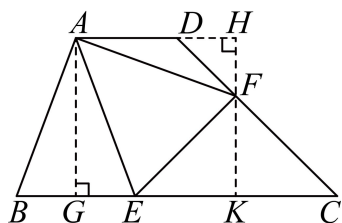
$$\therefore \angle BAG = \angle FAH,$$

$$\text{又} \because AB = AF, \quad \angle AGB = \angle H = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AFH (\text{AAS}),$$

$$\therefore BG = FH, \quad AH = AG,$$

$$\text{由 (1) 得 } FH = \frac{\sqrt{2}}{2} DF = \frac{\sqrt{2}}{2} x,$$



$$\therefore BG = \frac{\sqrt{2}}{2} x,$$

由 (2) 得 $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle EEK = 45^\circ,$$

$\therefore$ 在矩形 $AGKH$ 中, $\angle FKE = 90^\circ$, $AG = HK$,

$$\therefore FK = EK = \frac{\sqrt{2}}{2} EF = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AG = HK = FK + FH = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中, $AB = \sqrt{AG^2 + BG^2}$,

$$\therefore y = \sqrt{\left(2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 8}, \text{ 函数定义域为 } x > 0.$$