

2024 学年度第二学期八年级数学期末作业调研

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分, 每题只有一个选项正确)

1. 下列四个函数中, 一次函数是 ()

A. $y = x^2 - 2x$

B. $y = x^2 - (x-1)^2$

C. $y = \frac{1}{x-3}$

D. $y = \sqrt{x} + 1$

【答案】B

【解析】

【分析】依据一次函数的定义进行解答即可, 一次函数的定义: 一般地, 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数, 叫做一次函数.

【详解】解: A、 $y = x^2 - 2x$, 自变量 x 的最高次数为 2, 不是一次函数, 故该选项不符合题意;

B、 $y = x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$, 是一次函数, 故该选项符合题意;

C、 $y = \frac{1}{x-3}$, 不是一次函数, 故该选项不符合题意;

D、 $y = \sqrt{x} + 1$, 不是一次函数, 故该选项不符合题意.

2. 已知一次函数 $y = mx + 1 - 3x$, 如果函数值 y 随 x 的增大而减小, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m > 0$

B. $m < 0$

C. $m < 3$

D. $m > 3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质与系数的关系, 先将函数整理为标准一次函数形式, 再根据 y 随 x 增大而减小的性质列不等式求解即可.

【详解】首先整理一次函数得 $y = mx + 1 - 3x = (m-3)x + 1$

∵ 一次函数 y 随 x 的增大而减小,

∴ 一次项系数 $m-3 < 0$,

解不等式得 $m < 3$.

故选 C.

3. 下列事件中, 确定事件是 ()

A. 上海明天太阳从西边升起

- B. 任意两个非零实数，它们的积为正
C. 抛掷一枚质地均匀的硬币，落地后正面朝上
D. 两条直线被第三条直线所截，同位角相等

【答案】A

【解析】

【分析】根据确定事件包括一定发生的必然事件和一定不发生的不可能事件，可能发生也可能不发生的是随机事件来判断各选项即可.

【详解】解：A、太阳一定从东方升起，不可能从西边升起，该事件一定不发生，故是确定事件，符合题意；
B、两个非零实数相乘，同号得正异号得负，积可能为正也可能为负，故是随机事件，不符合题意；
C、抛掷质地均匀的硬币，落地后可能正面朝上，也可能反面朝上，故是随机事件，不符合题意；
D、只有两条平行直线被第三条直线所截时，同位角才相等，非平行直线被截时同位角不相等，故是随机事件，不符合题意.

4. 下列方程中，有实数解的是 ()

A. $\frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{1}$ B. $x^2 + 1 = 0$ C. $\frac{1}{x^2 + 1} = 0$ D. $\sqrt{x} + 1 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据分式方程求解方法，平方的非负性，算术平方根的非负性和分式的性质，逐个判断即可得到结果.

【详解】解：A. $\frac{x-1}{x} = x-1$,

去分母得， $x-1 = x(x-1)$,

整理得 $(x-1)(1-x) = 0$,

解得 $x = 1$,

检验：当 $x = 1$ 时， $x-1 \neq 0$,

$\therefore$ 原方程有实数解 $x = 1$;

B. $x^2 + 1 = 0$ 变形得 $x^2 = -1$,

$\therefore$ 任意实数的平方满足 $x^2 \geq 0$ ，不可能等于 -1 ,

$\therefore$ 该方程无实数解;

C. 方程 $\frac{1}{x^2+1} = 0$,

$\because$ 分子 $1 \neq 0$, 分母 $x^2 + 1 \geq 1 \neq 0$, 分式的值不可能为 0,

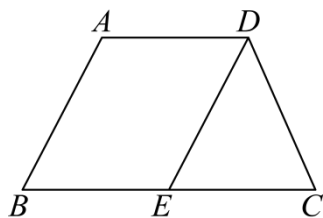
$\therefore$ 该方程无实数解;

D. 方程 $\sqrt{x} + 1 = 0$ 变形得 $\sqrt{x} = -1$,

$\because$ 任意实数的算术平方根满足 $\sqrt{x} \geq 0$, 不可能等于 -1 ,

$\therefore$ 该方程无实数解.

5. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = \frac{1}{2}BC$, E 为 BC 中点, 连接 DE , 下列向量中, 不是 $\overrightarrow{AD}$ 的相反向量的是 ()



A. $\overrightarrow{DA}$

B. $\overrightarrow{EB}$

C. $\overrightarrow{BE}$

D. $\overrightarrow{CE}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意得到 $AD = BE = EC$, 然后根据相反向量, 平行向量的定义一一判断即可.

【详解】解: $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 是相反的向量, 故 A 选项不符合题意;

$\because E$ 为 BC 中点

$$\therefore BE = EC = \frac{1}{2}BC$$

$$\because AD = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore AD = BE = EC$$

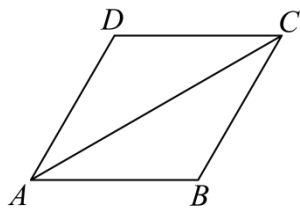
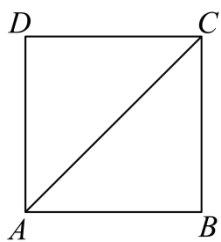
$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 是相反的向量, 故 B 选项不符合题意;

$\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BE}$ 是平行向量, 方向相同, 不是相反向量, 故 C 选项符合题意;

$\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 是相反向量, 故 D 选项不符合题意.

6. 如图, 用四根相同长度的木条制作成正方形 $ABCD$, 测得对角线 AC 长为 $5\sqrt{2}$, 如果将此正方形变形为菱形, 且 $\angle DAB = 60^\circ$, 那么菱形对角线 AC 长为 ()



A. 10

B. $5\sqrt{6}$

C. $5\sqrt{3}$

D. $5\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据正方形的性质以及勾股定理可得 $AB = BC = 5\text{cm}$ ，如图，连接 BD 交 AC 于点 O ，根据菱形的性质结合 $\angle DAB = 60^\circ$ 可得 $OB = \frac{5}{2}\text{cm}$ ，再利用勾股定理得到 $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{cm}$ ，进而求解即可。

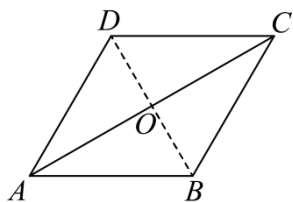
【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC 长为 $5\sqrt{2}$ ，

$\therefore AB = BC$ ， $\angle B = 90^\circ$

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$ ，即 $2AB^2 = (5\sqrt{2})^2$

$\therefore AB = BC = 5\text{cm}$

如图，连接 BD 交 AC 于点 O ，



$\therefore$ 将正方形变形为菱形，

$\therefore AB = AD$ ， $AC \perp BD$ ， $BO = DO$ ， $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore \angle DAB = 60^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AD = AB = BD = 5\text{cm}$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2}\text{cm}$ ，

$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{cm}$ ，

$\therefore AC = 2OA = 5\sqrt{3}\text{cm}$ 。

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 直线 $y = 2x - 6$ 的截距是_____.

【答案】 -6

【解析】

【分析】 本题考查一次函数截距的定义，截距是一次函数图象与 y 轴交点的纵坐标，根据定义代入计算即可求解.

【详解】 解：当 $x = 0$ 时，代入 $y = 2x - 6$ 得 $y = 2 \times 0 - 6 = -6$.

8. 方程 $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 先根据二次根式有意义的条件确定未知数 x 的取值范围，再求解方程得到所有可能的根，舍去不满足题意的根，即可得到原方程的解.

【详解】 解：根据二次根式有意义的条件，可得 $x \geq 0$ ， $x - 1 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq 1$ ，

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 0,$$

$$\therefore \sqrt{x} = 0 \text{ 或 } \sqrt{x-1} = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ (舍去) 或 } x - 1 = 0$$

解得 $x = 1$.

$$\therefore \text{方程 } \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 0 \text{ 的解是 } x = 1.$$

9. 如果一次函数 $y = 3mx + 1$ 的图像经过点 $A(1, 7)$ ，那么 m 的值是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 把 $A(1, 7)$ 代入 $y = 3mx + 1$ 运算求解即可.

【详解】 解：将 $A(1, 7)$ 代入 $y = 3mx + 1$ 得： $7 = 3m \times 1 + 1$ ，

解得： $m = 2$.

10. 如果一次函数 $y = 2x + m - 1$ 的图像与 x 轴的交点在 x 轴的正半轴上，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】

$$m < 1$$

【解析】

【分析】先求出一函数与 x 轴交点的横坐标，再根据交点在正半轴列出不等式，解不等式即可得到 m 的取值范围.

【详解】解： x 轴上点的纵坐标为 0，令 $y=0$ ，得 $0=2x+m-1$ ，

$$\text{解得 } x = \frac{1-m}{2},$$

因为一次函数 $y=2x+m-1$ 的图象与 x 轴的交点在正半轴上，

$$\text{所以 } \frac{1-m}{2} > 0,$$

根据不等式的基本性质，不等式两边同乘正数 2，不等号方向不变，得 $1-m > 0$ ，

解得： $m < 1$.

11. 用换元法解分式方程 $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{3x} = 2$ 时，如果设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $3y^2 - 6y - 1 = 0$

【解析】

【分析】用 y 表示出原方程的所有项，再去分母整理即可得到关于 y 的整式方程.

【详解】解：设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，

$$\text{则 } \frac{x^2-1}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^2-1}} = \frac{1}{3y},$$

$$\text{原方程 } \frac{x}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{3x} = 2 \text{ 可化为 } y - \frac{1}{3y} = 2,$$

$$\text{方程两边同乘 } 3y \text{ 去分母，得 } 3y^2 - 1 = 6y,$$

$$\text{整理得 } 3y^2 - 6y - 1 = 0.$$

$$\therefore \text{原方程可化为关于 } y \text{ 的整式方程是 } 3y^2 - 6y - 1 = 0.$$

12. 如果一个多边形的每个内角都是 135° ，那么其内角和为_____.

【答案】 1080° ## 1080 度

【解析】

【分析】首先求出每个外角是 45° ，根据多边形的外角和是 360° 求出多边形的边数，然后求出内角和.

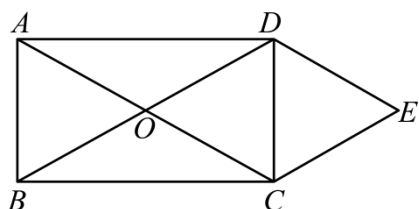
【详解】解： $\because$ 一个多边形的每个内角都是 135° ,

$\therefore$ 它的每个外角为: $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$,

$\therefore$ 多边形的边数是: $360^\circ \div 45^\circ = 8$,

$\therefore$ 其内角和为 $135^\circ \times 8 = 1080^\circ$.

13. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O , 且 $\angle AOD = 120^\circ$, 过点 D 作 AC 的平行线, 过点 C 作 BD 的平行线, 两平行线交于点 E , 那么四边形 $OCED$ 的面积是_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】证明出 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 得到 $BD = 4$, 利用勾股定理求出 $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$, 然后求出矩形 $ABCD$ 的面积, 得到 $S_{\triangle OCD} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形}ABCD} = \sqrt{3}$, 证明出四边形 $OCED$ 是平行四边形, 进而求解即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$, $OA = OB = OC = OD$

$\because \angle AOD = 120^\circ$

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形

$\therefore OA = OB = AB = 2$

$\therefore BD = 4$

$\therefore AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot AD = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

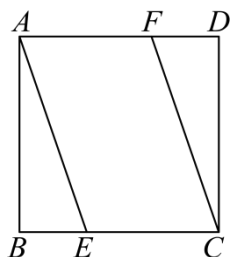
$\therefore S_{\triangle OCD} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形}ABCD} = \sqrt{3}$

$\because DE \parallel OC$, $CE \parallel OD$

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形

$\therefore S_{\text{四边形}OCED} = 2S_{\triangle OCD} = 2\sqrt{3}$.

14. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 AD 上， $BE = 2$ ， $AF = 4$ ，如果 $AE \parallel CF$ ，那么 $\triangle ABE$ 的周长是_____.



【答案】 $8 + 2\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{10} + 8$

【解析】

【分析】证明出四边形 $AECF$ 是平行四边形，得到 $EC = AF = 4$ ，求出 $AB = BC = 6$ ，利用勾股定理求出 $AE = 2\sqrt{10}$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$

$\because AE \parallel CF$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形

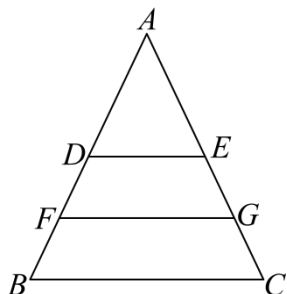
$\therefore EC = AF = 4$

$\therefore AB = BC = BE + EC = 2 + 4 = 6$

$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 2\sqrt{10}$

$\therefore \triangle ABE$ 的周长是 $AB + BE + AE = 6 + 2 + 2\sqrt{10} = 8 + 2\sqrt{10}$.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点， F 、 G 分别是 DB 、 EC 的中点，如果 $DE = 3$ ，那么 $FG =$ _____.



【答案】 $\frac{9}{2}$ 或 $4\frac{1}{2}$ 或 4.5

【解析】

【分析】本题考查了三角形的中位线及梯形的中位线，熟练掌握两个定理是解题的关键. 根据三角形的中

位线平行于第三边并且等于第三边的一半求出 $BC = 2DE = 6$ ，再根据梯形的中位线平行于两底边并且等于两底和的一半求解即可。

【详解】解：∵在 ABC 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点，

∴ DE 是 ABC 的中位线，

∴ $DE = 3$ ，

∴ $BC = 2DE = 6$ ，

∴在梯形 $BCED$ 中， F 、 G 分别是 DB 、 EC 的中点，

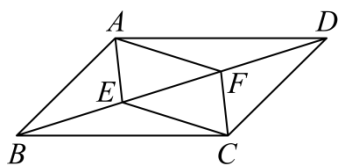
∴ FG 是梯形 $BCED$ 的中位线，

$$FG = \frac{(DE + BC)}{2} = \frac{9}{2},$$

故答案为： $\frac{9}{2}$.

16. 如图，点 E 、 F 在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上，且 $BE = DF$. 设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ ，

用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 表示： $\overrightarrow{AE} =$ _____.



【答案】 $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

【解析】

【分析】利用 $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}$ 求出 $\overrightarrow{FD}$ ，由 $BE = DF$ 得到 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$ ，再用 $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BE}$ ，求出 $\overrightarrow{EA}$ 后即可得到 $\overrightarrow{AE}$.

【详解】解：∵平行四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，

∵ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ ，

∴ $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = \vec{a} - \vec{c}$ ，

∵ $BE = DF$ ，

∴ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD} = \vec{a} - \vec{c}$ ，

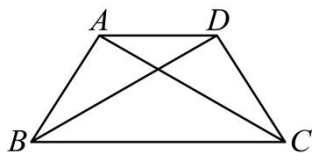
∵ $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA}$ ， $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BE} = \vec{b} - (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{b} - \vec{a} + \vec{c},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = -(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

17. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $\angle DBC = 30^\circ$, 若该梯形的中位线长为 3, 则

$$BD = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E , 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H , 根据中位线的长得到 $AD + BC = 3 \times 2 = 6$, 根据 30° 角的直角三角形得到 $BD = \frac{1}{2}DH$, 根据勾股定理进行计算即可.

【详解】解: 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E ,

$$\because AD \parallel BC$$

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形,

$$\therefore AC = DE$$

$\because$ 梯形的中位线长为 3,

$$\therefore \frac{1}{2}(AD + BC) = 3,$$

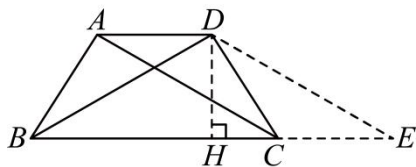
$$\therefore AD + BC = 6,$$

$$\therefore BE = BC + CE = 6,$$

在梯形 $ABCD$ 中, $AC = BD$,

$$\therefore BD = DE,$$

过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ,



$$\therefore BH = \frac{1}{2}BE = 3,$$

$$\because \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore DH = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BD^2 = BH^2 + DH^2,$$

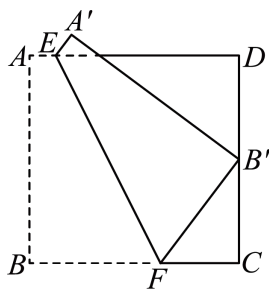
$$\therefore BD^2 = 3^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2,$$

$$\therefore BD = 2\sqrt{3}.$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

18. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 E 、 F 分别在边 AD 和 BC 上, 将该正方形沿着 EF 翻折, 点 A 落在 A' 处, 点 B 恰好落在边 CD 上的点 B' 处, 如果四边形 $ABFE$ 的面积为 6, 那么 $\triangle B'FC$ 的面积是

_____.



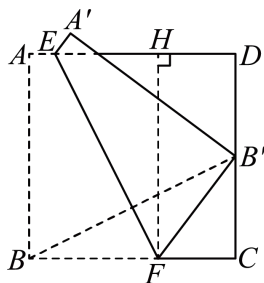
【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查翻折的性质、正方形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理, 熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

连接 BB' , 则 $BB' \perp EF$, 过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H , 易证 $\triangle BCB' \cong \triangle FHE$ (AAS), 进而得到 $B'C = EH$ 、 $B'B = EF$, 设 $CF = x$, 则 $BF = 4 - x$, 根据四边形 $ABFE$ 的面积为 6, 列方程得到 AE 关于 x 的表达式, 在 $\text{Rt}\triangle BCB'$ 中, 利用勾股定理求出 x 的值, 最后利用三角形面积公式计算即可.

【详解】 解: 连接 BB' , 则 $BB' \perp EF$, 过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H ,



$$\therefore \angle EHF = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HEF + \angle HFE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle HEF = \angle BFE,$$

$$\because \angle B'BC + \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B'BC = \angle HFE,$$

在 $\triangle BCB'$ 和 $\triangle FHE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BCB' = \angle FHE \\ BC = HE \\ \angle B'BC = \angle HFE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCB' \cong \triangle FHE (\text{AAS}),$$

$$\therefore B'C = EH, B'B = EF,$$

设 $CF = x$, 则 $BF = 4 - x$,

$\because$ 四边形 $ABFE$ 的面积为 6,

$$\therefore \frac{(AE + BF) \cdot AB}{2} = 6,$$

$$\text{即 } \frac{[AE + (4 - x)] \times 4}{2} = 6,$$

解得 $AE = x - 1$,

$$\therefore EH = AH - AE = 4 - x - (x - 1) = 5 - 2x,$$

$$\therefore B'C = EH = 5 - 2x,$$

由翻折的性质得: $B'F = BF = 4 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle BCB'$ 中, 由勾股定理得: $CF^2 + B'C^2 = B'F^2$,

$$\text{即 } x^2 + (5 - 2x)^2 = (4 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \triangle B'FC \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} \times CF \times B'C = \frac{1}{2} \times x \cdot (5 - 2x) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \left(5 - 2 \times \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 64 分)

19. 解方程: $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 先化为整式方程, 再解一元二次方程, 然后对所求的方程的解进行检验即可得.

【详解】解： $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$

去分母得， $x+2-4=x^2-4$

整理得， $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$x+1=0$ 或 $x-2=0$

解得 $x=-1$ 或 $x=2$ ，

检验：将 $x=-1$ 代入 $x^2-4=-3 \neq 0$ ，符合题意；

将 $x=2$ 代入 $x^2-4=0$ ，不符合题意；

$\therefore$ 原方程的解为 $x=-1$ 。

20. 解方程组： $\begin{cases} x+3y=12 \\ x^2-2xy-3y^2=0 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=2 \end{cases}$ ； $\begin{cases} x_2=-6 \\ y_2=6 \end{cases}$

【解析】

【分析】首先把第二个方程左边分解因式，即可转化为两个一次方程，分别与第一个方程组成方程组，即可求解。

【详解】解： $\begin{cases} x+3y=12 \text{ ①} \\ x^2-2xy-3y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$

由②得 $(x-3y)(x+y)=0$

$x-3y=0$ 或 $x+y=0$

原方程组可化为 $\begin{cases} x+3y=12 \\ x-3y=0 \end{cases}$ ； $\begin{cases} x+3y=12 \\ x+y=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=2 \end{cases}$ ； $\begin{cases} x_2=-6 \\ y_2=6 \end{cases}$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=2 \end{cases}$ ； $\begin{cases} x_2=-6 \\ y_2=6 \end{cases}$

【点睛】本题考查高次方程组的解法，解题的基本思想是降次，掌握降次的方法是解高次方程的关键。

21. 十二生肖是悠久的中国民俗文化符号，世界多国在春节期间发行生肖邮票，以此来表达对中国新年的祝

福. 甲同学购买了一套生肖邮票, 他把其中的“虎”、“兔”、“龙”、“蛇”4张邮票背面朝上放在桌面上(邮票背面完全相同).

- (1) 如果乙同学从中随机抽取一张, 摸出的邮票是“龙”的概率是_____;
- (2) 如果乙同学从中随机抽取两张, 利用树状图求抽取的两张邮票恰好是“虎”和“龙”的概率;
- (3) 如果可以往桌面上放任意生肖邮票(不限一套邮票), 请你设计一个概率为 $\frac{3}{5}$ 的游戏方案.

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{6}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 直接利用概率公式计算可得;

(2) 画树状图列举出所有可能的情况数和抽取的两张邮票恰好是“虎”和“龙”的情况数, 然后利用概率公式即可求解;

(3) 根据概率公式设计即可.

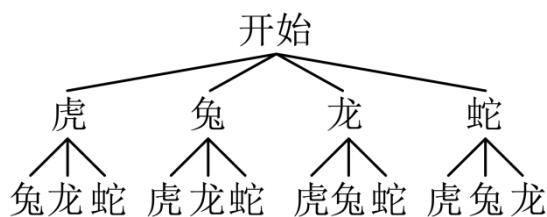
【小问1详解】

解: $\because$ 共有4张邮票,

$\therefore$ 乙同学从中随机抽取一张, 摸出的邮票是“龙”的概率是 $\frac{1}{4}$;

【小问2详解】

解: 画树状图如下:



共有12种等可能的情况数, 抽取的两张邮票恰好是“虎”和“龙”的情况有2种,

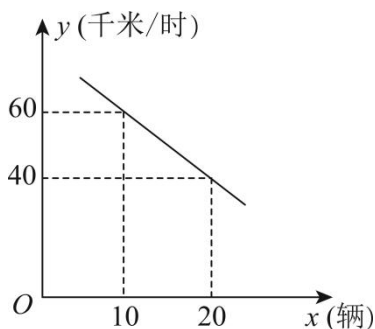
$\therefore$ 抽取的两张邮票恰好是“虎”和“龙”的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$;

【小问3详解】

解: 往原有4张邮票中添加1张“虎”邮票, 使桌面上共有5张邮票,

从中随机抽取1张, 抽到不是“虎”的概率为 $\frac{3}{5}$, 答案不唯一.

22. 某地区交通管理部门通过对道路流量的大数据分析可知, 某高架路上车辆的平均速度 y (千米/时)与高架路上每百米车的数量 x (辆)的关系如图所示.



(1) 求 y 关于 x 的函数解析式 (不必写 x 的取值范围);

(2) 如果某时刻监测到这一高架路上车辆的平均速度为 30 千米/时.

①求该时刻高架路上每百米车的数量;

②如果车辆的平均速度小于 20 千米/时, 将严重拥堵, 需启动限流措施. 而此刻开始这一高架路上每百米车辆数每 4 分钟增加 1 辆, 为了避免严重拥堵, 那么最晚几分钟需启动限流措施?

【答案】 (1) $y = -2x + 80$

(2) ①25 辆; ②为了避免严重拥堵, 那么最晚 20 分钟需启动限流措施.

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可;

(2) ①根据 (1) 所求函数解析式, 令函数值为 30, 求出 x 的值即可得到答案; ②令函数值小于 20 求出 x 的取值范围, 再根据每百米车辆数每 4 分钟增加 1 辆和现在每百米车的数量为 25 辆列式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{由题意得, } \begin{cases} 10k + b = 60 \\ 20k + b = 40 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -2 \\ b = 80 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = -2x + 80$;

【小问 2 详解】

解: ①在 $y = -2x + 80$ 中, 当 $y = 30$ 时, 则 $-2x + 80 = 30$, 解得 $x = 25$,

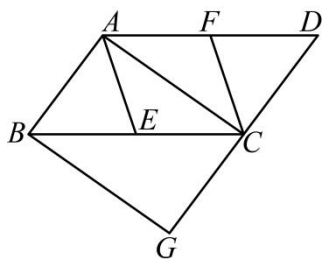
$\therefore$ 该时刻高架路上每百米车的数量为 25 辆;

②当 $-2x + 80 < 20$ 时, 解得 $x > 30$,

$$(30 - 25) \times 4 = 20 \text{ 分钟},$$

答：为了避免严重拥堵，那么最晚 20 分钟需启动限流措施.

23. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 和 AD 的中点，连接 AE 、 CF ， CA 平分 $\angle FCE$.



(1) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 作 $\angle GBC = \angle CAE$ ， BG 与 DC 的延长线交于点 G . 求证：四边形 $ABGC$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形对边平行且相等可得 $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，由线段中点的定义可推出 $AF = CE$ ，则可证明四边形 $AECF$ 是平行四边形；再由平行线的性质和角平分线的定义证明 $\angle FCA = \angle FAC$ ，得到 $AF = CF$ ，据此可证明结论；

(2) 由菱形的性质得到 $AE = CE$ ，则由等边对等角和已知条件证明 $\angle GBC = \angle ECA$ ，得到 $AC \parallel BG$ ；则可证明四边形 $ABGC$ 是平行四边形；证明 $BE = CE = AE$ ，进而可证明 $\angle BAC = 90^\circ$ ，则可证明平行四边形 $ABGC$ 是矩形.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle ECA;$$

$\because E$ 、 F 分别是边 BC 和 AD 的中点，

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC, AF = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore AF = CE,$$

又 $\because AF \parallel CE$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形；

$\because CA$ 平分 $\angle FCE$,

$$\therefore \angle ECA = \angle FCA,$$

$$\therefore \angle FCA = \angle FAC,$$

$$\therefore AF = CF,$$

∴ 平行四边形 $AECF$ 是菱形;

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 可得四边形 $AECF$ 是菱形,

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore \angle ECA = \angle CAE,$$

$$\because \angle GBC = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle GBC = \angle ECA,$$

$$\therefore AC \parallel BG;$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, \text{ 即 } AB \parallel CG,$$

∴ 四边形 $ABGC$ 是平行四边形;

$$\because E \text{ 为 } BC \text{ 的中点, } AE = CE,$$

$$\therefore BE = CE = AE,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA,$$

$$\because \angle EAB + \angle EBA + \angle CAE + \angle ECA = 180^\circ,$$

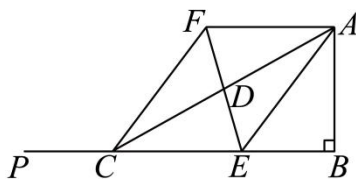
$$\therefore 2\angle EAB + 2\angle CAE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

∴ 平行四边形 $ABGC$ 是矩形.

24. 如图, 已知 $\angle ABP = 90^\circ$, $AB = 8$, 点 C 、 E 在射线 BP 上 (点 C 、 E 不与点 B 重合且点 C 在点 E 的左侧), 连接 AC 、 AE , D 为 AC 的中点, 过点 C 作 $CF \parallel AE$, 交 ED 的延长线于点 F , 连接 AF .



(1) 求证: 四边形 $ABCF$ 是梯形;

(2) 如果 $CE = 5$, 当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时, 求 BC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 6 或 16

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle AED \cong \triangle CFD$ (ASA), 进而证明四边形 $AFCE$ 是平行四边形, 得到 $AF \parallel CE$, 进而得到 $AF \parallel BC$, 根据 $CF \parallel AE$, AB 与 AE 相交, 得到 AB 与 CF 不平行, 即可证明四边形 $ABCF$ 是梯

形;

(2) 分 $CE = CD = 5$, $CE = DE = 5$, $CE = CD = DE = 5$, 三种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because CF \parallel AE$,

$\therefore \angle DAE = \angle DCF$,

$\because D$ 为 AC 的中点,

$\therefore AD = CD$,

$\because \angle ADE = \angle CDF$,

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD (ASA)$,

$\therefore AE = CF$,

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形,

$\therefore AF \parallel CE$, 即 $AF \parallel BC$,

$\because CF \parallel AE$, AB 与 AE 相交,

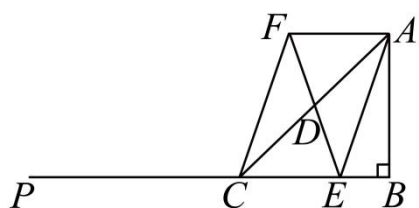
$\therefore AB$ 与 CF 不平行,

$\therefore$ 四边形 $ABCF$ 是梯形;

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle CDE$ 为等腰三角形,

如图, 当 $CE = CD = 5$ 时,



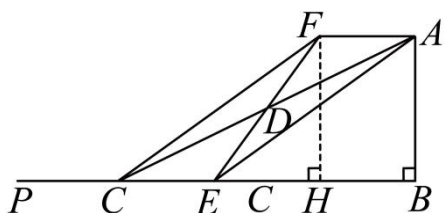
$\because D$ 为 AC 的中点,

$\therefore AC = 10$,

$\because \angle ABP = 90^\circ$, $AB = 8$,

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 6$;

如图, 当 $CE = DE = 5$ 时, 过点 F 作 $FH \perp BP$, 垂足为 H ,



由 (1) 知四边形 $AFCE$ 是平行四边形,

$\therefore DF = DE = 5$, 即 $EF = 10$,

$\because \angle ABP = 90^\circ$, $FH \perp BP$,

$\therefore FH \parallel AB$,

$\because AF \parallel BP$,

$\therefore$ 四边形 $AFHB$ 是平行四边形,

$\because \angle ABP = 90^\circ$,

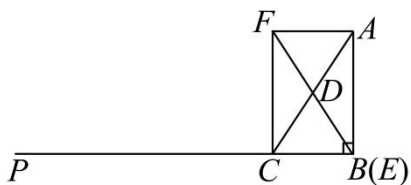
$\therefore$ 四边形 $AFHB$ 是矩形,

$\therefore AF = BH = CE = 5, AB = FH = 8$,

$\therefore EH = \sqrt{EF^2 - FH^2} = 6$,

$\therefore BC = CE + EH + BH = 6$;

如图, 当 $CE = CD = DE = 5$ 时,



$\because \triangle CED$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$,

$\because \angle ABP = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAB = 30^\circ$,

$\therefore BC = \frac{1}{2} AC = AD = CD = 5$,

$\therefore CE = 5$,

$\therefore$ 此时, 点 E 与点 B 重合, 不符合题意,

综上, 当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时, BC 的长为 6 或 16.

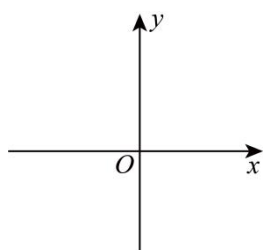
【点睛】 本题考查梯形的判定, 平行四边形的判定与性质, 三角形全等的判定与性质, 等腰三角形的性质,

勾股定理，直角三角形的特征，灵活运用平行四边形的性质是解题的关键.

25. 已知直线 $y = kx + b$ (其中 $kb \neq 0$), 我们把直线 $y = bx + k$ 称为直线 $y = kx + b$ 的“轮换直线”. 例如:

直线 $y = 3x + 2$ 的“轮换直线”是直线 $y = 2x + 3$.

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l_1: y = x + m (m \neq 1)$ 的“轮换直线”是直线 l_2 , l_1 交 y 轴于点 A , l_2 交 y 轴于点 B , l_1 和 l_2 相交于点 M .



备用图

(1) 如果直线 l_1 经过点 $(-1, -3)$.

①求直线 l_1 、 l_2 的表达式和点 M 的坐标;

②点 N 是平面内一点, 如果四边形 $AMBN$ 是等腰梯形, 且 $AM \parallel BN$, 求点 N 的坐标.

(2) 将 AM 绕点 A 顺时针旋转 90° , 点 M 的对应点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上. 小明说: “直线 l_3 一定经过一个定点.” 你认为他的说法是否正确? 如果正确, 请求这个定点; 如果不正确, 请说明理由.

【答案】 (1) ① $M(1, -1)$; ② $N(-2, -1)$

(2) 正确, 直线 l_3 过定点 $(0, -1)$

【解析】

【分析】 (1) ①将点 $(-1, -3)$ 代入 $y = x + m (m \neq 1)$, 求出 m 的值, 进而得到直线 l_2 的表达式, 联立直线 l_1 、 l_2 的表达式, 即可求出 M 的坐标; ②根据四边形 $AMBN$ 是等腰梯形, 且 $AM \parallel BN$, 得到 N 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上, 且 $BM = AN$, 求出直线 BN 的解析式, 设 $N(t, t+1)$, 根据 $BM = AN$, 利用两点间距离公式建立方程求解即可;

(2) 根据题意得到直线 l_2 的表达式为: $y = mx + 1$, 求出 $A(0, m), B(0, 1)$, 联立直线 l_1 、 l_2 的表达式, 求出 $M(1, 1+m)$, 如图, 过点 M, M_1 作 y 轴的垂线, 垂足分别为 G, H , 证明 $\triangle GAM \cong \triangle HM_1A$ (AAS), 得到 $M_1(1, m-1)$, 根据点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上, 求出直线 l_3 的解析式为: $y = mx - 1$, 当 $x = 0$

时, $y = -1$, 即可得出直线 l_3 过定点 $(0, -1)$.

【小问 1 详解】

解: ①将点 $(-1, -3)$ 代入 $y = x + m (m \neq 1)$, 则 $-3 = -1 + m$,

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的表达式为: } y = x - 2,$$

$$\therefore \text{直线 } l_2 \text{ 的表达式为: } y = -2x + 1,$$

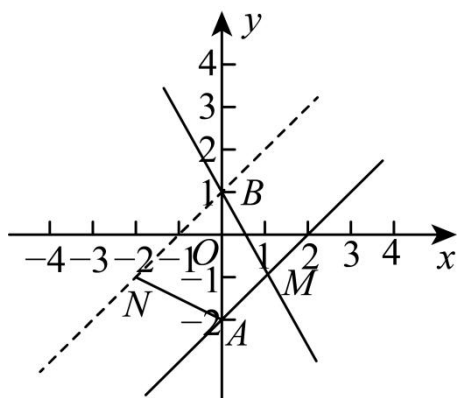
$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y_A = 0 - 2 = -2, y_B = -2 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$\therefore A(0, -2), B(0, 1),$$

$$\text{联立直线 } l_1、l_2 \text{ 的表达式, 则 } \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ 即 } M(1, -1),$$

②如图,



$\because$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形, 且 $AM \parallel BN$,

$\therefore N$ 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上, 且 $BM = AN$,

设直线 BN 的解析式为 $y = x - n$,

$$\text{将点 } B(0, 1) \text{ 代入得: } 1 = 0 - n,$$

$$\text{解得: } n = -1,$$

$$\therefore \text{直线 } BN \text{ 的解析式为 } y = x + 1,$$

$$\text{设点 } N(t, t + 1),$$

由图形可得 $t < 0$,

$$\therefore \sqrt{(0-t)^2 + [-2-(t+1)]^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2},$$

$$\therefore 2t^2 + 6t + 9 = 5,$$

解得: $t = -1$ 或 $t = -2$,

$$\text{当 } t = -1 \text{ 时, } N(-1, 0), \text{ 此时 } BN = \sqrt{(0+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}, \quad AM = \sqrt{(1-0)^2 + [(-1)+2]^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AM \parallel BN,$$

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是平行四边形,

$$\therefore AN \parallel BM,$$

则四边形 $AMBN$ 不是梯形, 故舍去,

$$\text{当 } t = -2, \quad N(-2, -1),$$

$$\text{同理: } BN = \sqrt{(0+2)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}, \quad AM = \sqrt{(1-0)^2 + [(-1)+2]^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AM \parallel BN, \quad AN \text{ 与 } BM \text{ 不平行},$$

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形,

$$\text{故 } t = -2, \text{ 则 } N(-2, -1);$$

【小问 2 详解】

解: 根据题意: 直线 l_2 的表达式为: $y = mx + 1$,

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y_A = 0 + m = m, y_B = m' \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$\therefore A(0, m), B(0, 1),$$

$$\text{联立直线 } l_1、l_2 \text{ 的表达式, 则 } \begin{cases} y = x + m \\ y = mx + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + m \end{cases}, \text{ 即 } M(1, 1 + m),$$

如图, 过点 M, M_1 作 y 轴的垂线, 垂足分别为 G, H ,

【点睛】本题考查的是一次函数综合题，旋转的性质，需要掌握待定系数法确定函数关系式，函数图象上点的坐标特征，全等三角形的判定与性质，两条直线平行及交点等相关知识，属新定义型题目.

