

2024 学年第二学期 期末质量检测

八年级 数学学科

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题: (本题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分.)

1. 下列函数中, 是一次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{2x} + 1$

B. $y = x^2 + 1$

C. $y = kx + b$ (k, b 是常数)

D. $y = 2x + 1$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据一次函数的定义逐项判断即得答案.

【详解】 解: A、 $y = \frac{1}{2x} + 1$ 不是一次函数, 故本选项不符合题意;

B、 $y = x^2 + 1$ 不是一次函数, 故本选项不符合题意;

C、 $y = kx + b$ (k, b 是常数), 当 $k = 0$ 时不是一次函数, 故本选项不符合题意;

D、 $y = 2x + 1$ 是一次函数, 故本选项符合题意;

故选: D.

【点睛】 本题考查了一次函数的概念, 熟知形如 $y = kx + b$ (k, b 是常数, 且 $k \neq 0$) 叫一次函数是解题的关键.

2. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 分式方程

B. $x^2 + 3y = 1$ 是二元二次方程

C. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 是无理方程

D. $x^2 + x = 0$ 是二项方程

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义对 A、B、C 进行判断; 根据二元二次方程的定义对 B 进行判断,

【详解】 A、 $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 为一元二次方程, 所以 A 选项的说法错误;

B、 $x^2 + 3y = 1$ 为二元二次方程, 所以 B 选项的说法正确;

C、 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 是一元二次方程，所以 C 选项的说法错误；

D、 $x^2 + x = 0$ 是一元二次方程，所以 D 选项的说法错误。

故选：B。

【点睛】 本题考查了无理方程，解题的关键是掌握分式方程、二元二次方程及无理方程的概念。

3. 直线 $y = 2(x - 1)$ 的截距是 ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

【答案】 D

【解析】

【分析】 代入 $x = 0$ 求出与之对应的 y 值，此题得解。

【详解】 解：当 $x = 0$ 时， $y = 2(x - 1) = -2$ ，

$\therefore$ 直线 $y = 2(x - 1)$ 的截距为 -2。

故选：D。

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及一次函数的性质，牢记截距的定义是解题的关键。

4. 下列命题中，真命题是 ()

A. 顺次联结平行四边形各边的中点，所得的四边形一定是矩形

B. 顺次联结等腰梯形各边的中点，所得的四边形一定是菱形

C. 顺次联结对角线垂直的四边形各边的中点，所得的四边形一定是菱形

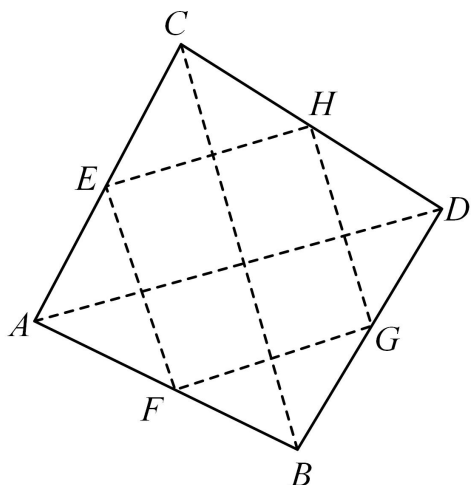
D. 顺次联结对角线相等的四边形各边的中点，所得的四边形一定是矩形

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据平行四边形、特殊的平行四边形的判定、中位线定理、中点四边形的定义进行判定即可。

【详解】 解：如图：



观察图形： E, F, G, H 分别为 AC, AB, BD, CD 的中点，根据中位线定理：

$$EF \parallel BC, GH \parallel BC, EF = GH = \frac{1}{2}BC, EH \parallel AD, GF \parallel AD, EH = FG = \frac{1}{2}AD,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

A、顺次联结平行四边形各边的中点，所得的四边形是平行四边形，原命题为假命题，不符合题意；

B、 $\because$ 等腰梯形的对角线相等，即：当 $AD = BC$ 时，

$$\therefore EF = FG,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形；

$\therefore$ 顺次联结等腰梯形各边的中点，所得的四边形一定是菱形，原命题为真命题，符合题意；

C、当 $AD \perp BC$ 时，则： $EF \perp FG$ ，

$$\therefore \angle EFG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为矩形；

$\therefore$ 顺次联结对角线垂直的四边形各边的中点，所得的四边形一定是矩形，原命题为假命题，不符合题意；

D、当 $AD = BC$ 时，则： $EF = FG$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形；

$\therefore$ 顺次联结对角线相等的四边形各边的中点，所得的四边形一定是菱形，原命题为假命题，不符合题意。

故答案选：B.

【点睛】 本题考查中位线定理应用、平行四边形、特殊的平行四边形的判定，掌握四边形的判定是解题关键.

5. 下列关于向量的运算，正确的是（ ）

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

【答案】A

【解析】

【分析】由三角形法则直接求解即可求得答案，注意掌握排除法在选择题中的应用.

【详解】解：A、 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ，故本选项正确；

B、 $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ ，故本选项错误；

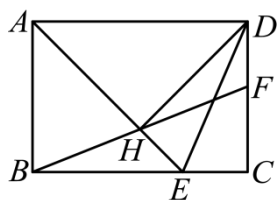
C、 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ，故本选项错误；

D、 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ ，故本选项错误.

故选：A.

【点睛】此题考查了平面向量的知识. 注意掌握三角形法则的应用.

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E ，且 $AD = AE$ ， $DH \perp AE$ 于点 H ，连接 BH 并延长，交 CD 于点 F ，连接 DE 。下列结论：① $BC = \sqrt{2}AB$ ；② $\angle AED = \angle CED$ ；③ $BH = HF$ ；④ $BC = 2HE + CF$ 。其中正确的有（ ）



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】证明 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，得到 $AE = \sqrt{2}AB$ ，根据 $AD = AE$ ，判断①；根据等边对等角，结合角的和差关系，三角形的内角和定理，推出 $\angle AED = \angle CED = 67.5^\circ$ ，判断②；证明 $\triangle BHE \cong \triangle HFD$ 判断③；角平分线的性质，得到 $HE = CE$ ，根据线段的和差关系，推出 $BC = 2HE + CF$ ，判断④即可.

【详解】解： $\because$ 矩形 $ABCD$ ，

$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle C = \angle ADC = 90^\circ, AB = CD, AD = BC, AD \parallel BC$ ，

$\because \angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E ，

$\therefore \angle BAE = \angle DAE = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AE = \sqrt{2}AB, \angle AEB = 45^\circ,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ, BC = AD = \sqrt{2}AB; \text{ 故①正确;}$$

$$\because DH \perp AE,$$

$\therefore \triangle AHD$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AD = \sqrt{2}AH = \sqrt{2}DH, \angle ADH = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BE = AH = DH,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle AHB = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = 90^\circ - \angle ABE = 22.5^\circ,$$

$$\because \angle CED = 180^\circ - \angle AEB - \angle AED = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle CED; \text{ 故②正确;}$$

$$\because \angle DHF = 180^\circ - \angle AHD - \angle AHB = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DHF = \angle HBE,$$

$$\text{又} \because BE = DH, \angle DHF = 90^\circ - \angle ADH = 45^\circ = \angle BEH,$$

$$\therefore \triangle BHE \cong \triangle HFD,$$

$$\therefore BH = HF, HE = DF; \text{ 故③正确;}$$

$$\because \angle CED = \angle AED, EH \perp DH, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore HE = CE,$$

$$\because CD = AB = BE, HE = DF = CE,$$

$$\therefore BC - CE = CF + DF,$$

$$\therefore BC = CF + DF + CE = CF + HE + HE = CF + 2HE; \text{ 故④正确;}$$

故选 D.

【点睛】 本题考查矩形的性质，等腰三角形的判定和性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质，角平分线的性质等知识点，熟练掌握相关知识点，理清角度，线段之间的关系，是解题的关键.

二、填空题：(本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分.)

7. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】根据二次根式和分式有意义的条件列不等式即可.

【详解】解：根据题意可得， $x-1>0$,

解得， $x>1$,

故答案为： $x>1$.

【点睛】本题考查了二次根式和分式有意义的条件，解题关键是熟练运用相关性质列不等式，确定自变量的取值范围.

8. 方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解为_____.

【答案】3

【解析】

【分析】根据无理方程的解法，首先，两边平方解出 x 的值，然后验根，解答即可.

【详解】解：两边平方得： $2x+3=x^2$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

解方程得： $x_1=3$, $x_2=-1$,

检验：当 $x_1=3$ 时，方程的左边=右边，所以 $x_1=3$ 为原方程的解，

当 $x_2=-1$ 时，原方程的左边 $\neq$ 右边，所以 $x_2=-1$ 不是原方程的解.

故答案为3.

【点睛】此题考查无理方程的解，解题关键在于掌握运算法则

9. 一个正多边形的每一个内角都等于 160° ，则这个正多边形的边数是_____.

【答案】18

【解析】

【分析】多边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，多边形的每一个内角都等于 160° ，得内角和为 $160^\circ n$ ，由此得出多边形的边数.

【详解】解：设多边形为 n 边形，由题意，得

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 160^\circ n,$$

解得 $n=18$,

故答案为：18.

【点睛】本题主要考查多边形的内角和以及顶点数和内角个数之间的关系，找到等量关系是解决问题的关键.

10. 已知分式方程 $\frac{x^2-1}{x} + \frac{3x}{x^2-1} = \frac{7}{2}$, 设 $\frac{x^2-1}{x} = y$, 那么原方程可以变形为_____

【答案】 $y + \frac{3}{y} = \frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 把原分式方程中的 $\frac{x^2-1}{x}$ 整体换成 y 即可得到答案.

【详解】 解: 设 $\frac{x^2-1}{x} = y$, 则分式方程 $\frac{x^2-1}{x} + \frac{3x}{x^2-1} = \frac{7}{2}$, 可以变形为 $y + \frac{3}{y} = \frac{7}{2}$

故答案为: $y + \frac{3}{y} = \frac{7}{2}$.

【点睛】 本题主要考查了分式方程, 利用整体代入的方法求解是解题的关键.

11. 关于 x 的方程 $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{m}{3-x} + 1$ 有增根, 则 m 的值是_____.

【答案】 -7

【解析】

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程, 由分式方程有增根, 求出 x 的值, 代入整式方程计算即可求出 m 的值.

【详解】 解: 去分母得: $2x+1 = -m+x-3$,

解得 $x = -m-4$,

由分式方程有增根, 得到 $x-3=0$, 即 $x=3$,

$$\therefore -m-4=3,$$

解得: $m=-7$.

故答案为: -7 .

【点睛】 此题考查了分式方程的增根, 增根确定后可按如下步骤进行: ①化分式方程为整式方程; ②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

12. 把二次方程 $x^2 - 4xy + 4y^2 = 4$ 化成两个一次方程, 那么这两个一次方程分别是_____.

【答案】 $x-2y=2$ 或 $x-2y=-2$

【解析】

【分析】 利用完全平方公式分解因式, 两边同时开平方得到答案.

【详解】解： $(x-2y)^2 = 4$ ，

$\therefore x-2y=2$ 或 $x-2y=-2$ ，

故答案为： $x-2y=2$ 或 $x-2y=-2$ 。

【点睛】此题考查了多项式的分解因式，降次解一元二次方程，正确掌握直接开平方法解方程是解题的关键。

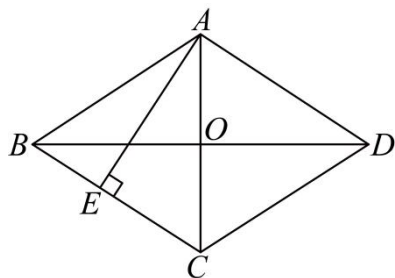
13. 已知菱形的边长为13cm，一条对角线长为24cm，那么菱形的高为_____cm。

【答案】 $\frac{120}{13}$

【解析】

【分析】根据菱形的性质得出 $BO = \frac{1}{2}BD = 12\text{cm}$ ， $AC \perp BD$ ，根据勾股定理求出 $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = 5\text{cm}$ ，根据扇形面积求出 $BC \cdot AE = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ ，即 $13AE = \frac{1}{2} \times 10 \times 24$ ，求出 $AE = \frac{120}{13}(\text{cm})$ 即可。

【详解】解：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = BC = 13\text{cm}$ ， $BD = 24\text{cm}$ ，



$\therefore BO = \frac{1}{2}BD = 12\text{cm}$ ， $AC \perp BD$ ，

由勾股定理得： $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = 5\text{cm}$ ，

$\therefore AC = 2AO = 10\text{cm}$ ，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= BC \cdot AE = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ ，

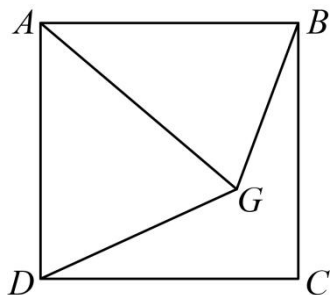
$\therefore 13AE = \frac{1}{2} \times 10 \times 24$ ，

解得： $AE = \frac{120}{13}(\text{cm})$ ，

故答案为： $\frac{120}{13}$ 。

【点睛】本题主要考查了菱形的性质，勾股定理，解题的关键是熟练掌握菱形的性质，求出菱形的另外一条对角线的长度。

14. 如图, 点 G 为正方形 $ABCD$ 内一点, $AB=AG$, $\angle AGB=70^\circ$, 联结 DG , 那么 $\angle BGD=$ _____ 度.



【答案】 135.

【解析】

【分析】根据正方形的性质可得出 $AB=AD$ 、 $\angle BAD=90^\circ$, 由 $AB=AG$ 、 $\angle AGB=70^\circ$ 利用等腰三角形的性质及三角形内角和定理可求出 $\angle BAG$ 的度数, 由 $\angle DAG=90^\circ - \angle BAG$ 可求出 $\angle DAG$ 的度数, 由等腰三角形的性质结合三角形内角和定理可求出 $\angle AGD$ 的度数, 再由 $\angle BGD=\angle AGB+\angle AGD$ 可求出 $\angle BGD$ 的度数.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore AB=AD, \quad \angle BAD=90^\circ.$$

$$\because AB=AG, \quad \angle AGB=70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAG=180^\circ-70^\circ-70^\circ=40^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG=90^\circ-\angle BAG=50^\circ,$$

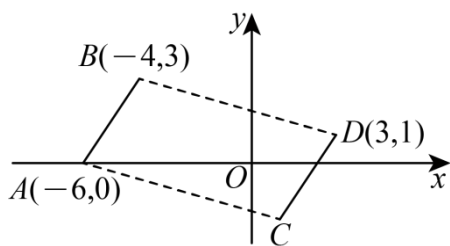
$$\therefore \angle AGD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle DAG)=65^\circ,$$

$$\therefore \angle BGD=\angle AGB+\angle AGD=135^\circ.$$

故答案为 135.

【点睛】本题考查了正方形的性质、等腰三角形的性质以及三角形内角和定理, 根据等腰三角形的性质结合三角形内角和定理求出 $\angle AGD$ 的度数是解题的关键.

15. 如图, 在平面直角坐标系中, 将线段 AB 平移后得到了线段 CD , 点 A 、 B 的对应点分别是点 C 、 D , 已知点 $A(-6,0)$, $B(-4,3)$, $D(3,1)$, 则点 C 的坐标为 _____.



【答案】 $(1,-2)$

【解析】

【分析】本题考查了平移的性质，根据对应点得出平移方式是解题关键．由 B 、 D 连点坐标可知，线段 AB 的平移方式为先向右平移 7 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，据此即可得到点 C 的坐标．

【详解】解：由 $B(-4,3)$ ， $D(3,1)$ 可知，线段 AB 的平移方式为先向右平移 7 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，

$\therefore A(-6,0)$ ，

$\therefore$ 对应点 C 的坐标为 $(-6+7,0-2)$ 即 $(1,-2)$ ，

故答案为： $(1,-2)$ ．

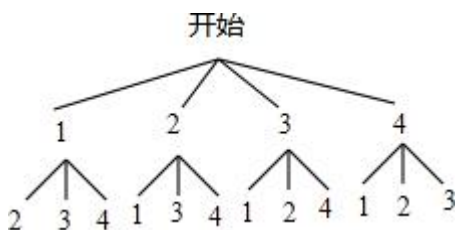
16. 四张背面相同的扑克牌，分别为红桃 1，2，3，4，背面朝上，先从中抽取一张把抽到的点数记为 a ，再在剩余的扑克中抽取一张点数记为 b ，则以 (a,b) 为坐标的点在直线 $y=x-1$ 上的概率为_____．

【答案】 $\frac{1}{4}$ 0.25

【解析】

【分析】首先画出树状图即可求得所有等可能的结果与点 (a,b) 在直线 $y=x-1$ 上的情况，然后利用概率公式求解即可求得答案．

【详解】解：画树状图得：



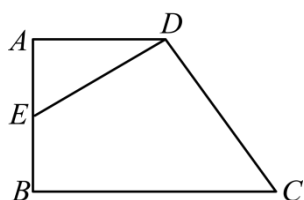
由树形图可知：一共有 12 种等可能的结果，其中点 (a,b) 在直线 $y=x-1$ 上的有 3 种结果，

所以点 (a,b) 在直线 $y=x-1$ 上的概率为 $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ．

【点睛】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

17. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ．已知 $AD=3$ ， $CD=5$ ， $BC=2AD$ ．点 E 是 AB 边上的中点，联结 DE ，那么 DE 的长是_____．

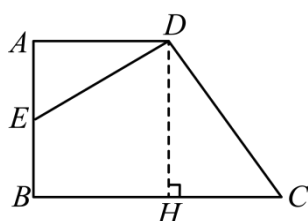


【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，则四边形 $ABHD$ 是矩形，在 $Rt\triangle CDH$ 中，根据勾股定理求出 DH ，进而求出 AE ，在 $Rt\triangle ADE$ 中，根据勾股定理即可求出 DE 。

【详解】解：过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，



$$\therefore \angle BHD = \angle CHD = 90^\circ,$$

$$\because AB \perp BC,$$

$$\therefore \angle ABH = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形，

$$\therefore AB = DH, BH = AD = 3,$$

$$\because BC = 2AD = 6,$$

$$\therefore CH = BC - BH = 6 - 3 = 3,$$

在 $Rt\triangle CDH$ 中， $\angle CHD = 90^\circ$ ， $CD = 5$ ， $CH = 3$ ，

$$\therefore DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = 4,$$

$$\therefore AB = 4,$$

$\because E$ 是 AB 边上的中点，

$$\therefore AE = 2,$$

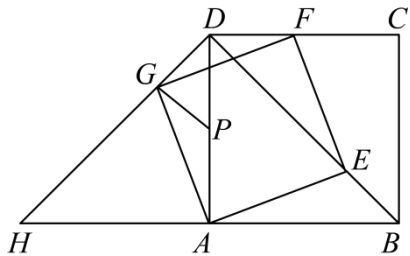
在 $Rt\triangle ADE$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD = 3$ ， $AE = 2$ ，

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{13},$$

故答案为： $\sqrt{13}$.

【点睛】 本题主要考查了矩形的判定和性质，勾股定理，根据勾股定理求出 DH 是解决问题的关键.

18. 如图，点 E 是边长为 8 的正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一个动点（不与点 B ， D 重合），连接 AE ，以 AE 为边向左侧作正方形 $AEFG$ ，点 P 为 AD 的中点，连接 PG ， DG ， DG 与 BA 的延长线交于点 H ，在点 E 运动过程中，线段 PG 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先证明 $\triangle GAD \cong \triangle EAB$ ，求出 $\angle PDG = 45^\circ$ ，进而得出点 G 在线段 DH 上，当 $PG \perp DH$ 时， PG 最短，此时 $\triangle PDG$ 为等腰直角三角形，利用等腰直角三角形的性质即可求出 PG 的长度，即可得出答案.

【详解】解： $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 、四边形 $AEFG$ 均为正方形，

$\therefore \angle DAB = \angle GAE = 90^\circ$ ， $AD = AB$ ， $AG = AE$ ， $\angle ABD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DAB - \angle DAE = \angle GAE - \angle DAE$ ，即 $\angle GAD = \angle EAB$ ，

在 $\triangle GAD$ 与 $\triangle EAB$ 中，

$$\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAD = \angle EAB \\ AD = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS)，

$\therefore \angle PDG = \angle ABD = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 点 G 在线段 DH 上，

$\therefore$ 当 $PG \perp DH$ 时， PG 最短，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 8，点 P 为 AD 的中点，

$\therefore DP = 4$ ，

$\therefore PG \perp DH$ ， $\angle PDG = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle PDG$ 为等腰直角三角形，

$\therefore 2PG^2 = PD^2$ ，

$\therefore PG = 2\sqrt{2}$ ，

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定与性质, 掌握正方形的性质, 全等三角形的判定与性质, 等腰直角三角形的判定与性质是解决问题的关键.

三、解答题: (本题共 8 小题, 共 52 分. 其中第 19-22 题每题 6 分; 第 23 题 8 分; 第 24 题 10 分; 第 25 题、26 题每题 8 分)

19. 解方程 $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+3} = 3$

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】 把无理方程转化为有理方程, 通常把方程两边平方, 逐步使含有未知数的根式有理化.

【详解】 解: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+3} = 3$, 化为: $\sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x+3}$,

两边平方得: $3x-2=9-6\sqrt{x+3}+x+3$,

整理得: $6\sqrt{x+3}=14-2x, 3\sqrt{x+3}=7-x$,

两边平方得: $9(x+3)=49-14x+x^2$, 整理得: $x^2-23x+22=0$, 解得: $x=1$ 或 $x=22$,

检验: 把 $x=1$ 代入原方程, 左边=右边, 故 $x=1$ 是原方程的解;

把 $x=22$ 代入原方程, 左边 $\neq$ 右边, 所以 $x=22$ 是增根.

故原方程的解是 $x=1$.

【点睛】 本题考查了无理方程的解法, 解题的关键是利用平方法求解及注意验根.

20. 解方程: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{3x}{x-1} - 4 = 0$

【答案】 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程、一元二次方程, 熟练掌握分式方程的解法是解题关键. 方程两边同乘以 $(x-1)^2$ 可得一个关于 x 的一元二次方程, 利用因式分解法解方程可得 x 的值, 然后进行检验即可得.

【详解】 解: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{3x}{x-1} - 4 = 0$,

方程两边同乘以 $(x-1)^2$, 得 $x^2 - 3x(x-1) - 4(x-1)^2 = 0$,

去括号, 得 $x^2 - 3x^2 + 3x - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$, 即 $x^2 - 3x^2 + 3x - 4x^2 + 8x - 4 = 0$,

合并同类项, 得 $-6x^2 + 11x - 4 = 0$, 即 $6x^2 - 11x + 4 = 0$,

因式分解, 得 $(2x-1)(3x-4) = 0$,

所以 $2x-1=0$ 或 $3x-4=0$,

解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{4}{3}$,

经检验, $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = \frac{4}{3}$ 都是分式方程的解,

所以方程的解为 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{4}{3}$.

21. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 先把方程组中的第一个方程转化为两个二元一次方程, 再和方程组中的第二个方程组成二元一次方程组, 求解即可.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \text{ ①} \\ x + y = 2 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得: $(x+2y)(x+3y) = 0$,

$\therefore x+2y=0$ ③ 或 $x+3y=0$ ④,

由②③, ②④联立得方程组
$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=2 \end{cases},$$

解方程组
$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -2 \end{cases},$$

解方程组
$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases},$$

所以原方程组的解为:
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

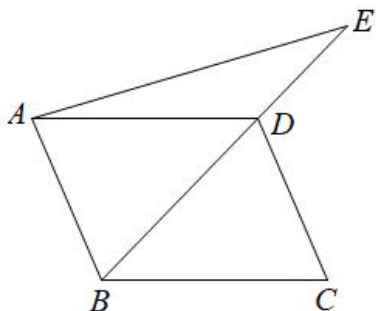
【点睛】 本题考查了二元二次方程组的解法, 把二次方程转化为两个一次方程, 是解决此类题目常用的办法. 解决本题亦可变形组中的一次方程, 代入二次方程先求出其中一个未知数的值, 再求另一个未知数的值.

22. 如图, 点 E 在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 的延长线上.

(1) 填空: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} =$ _____;

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} =$ _____;

(2) 求作: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$ (不写作法, 保留作图痕迹, 写出结果).



【答案】(1) $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DE}$; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据向量的平行四边形法则写出 $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ 即可, 根据平行四边形的对边平行且相等可得 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, 然后根据向量的三角形法则求解即可;

(2) 根据平行四边形的对边平行且相等可得 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, 然后根据向量的平行四边形法则作出以 DC 、 DE 为邻边的平行四边形, 其对角线即为所求.

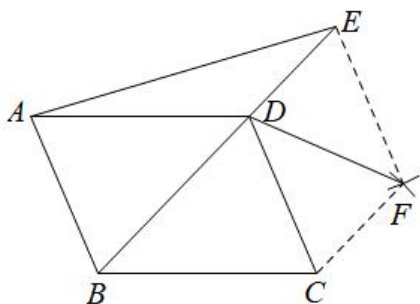
【详解】解: (1) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$,

$\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,

$\therefore \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$;

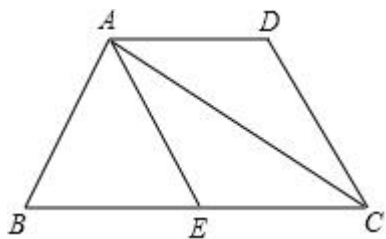
故答案为: $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DE}$.

(2) 如图, $\overrightarrow{DF}$ 即为所求 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$.



【点睛】 本题考查了平面向量，平行四边形的性质，向量的问题，熟练掌握平行四边形法则和三角形法则是解题的关键.

23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 E 为 BC 的中点



- (1) 求证：四边形 $AECD$ 是菱形；
(2) 连接 BD ，如果 BD 平分 $\angle ABC$ ， $AD = 2$ ，求 BD 的长.

【答案】 (1) 证明见解析；

(2) $BD = 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 由直角三角形的性质可得 $AE = AD = EC$ ，且 $AD \parallel BC$ ，可证四边形 $AECD$ 是平行四边形，即可得结论；

(2) 由角平分线的性质和平行线的性质可得 $AD = AB = CD$ ，可证四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，可得 $BD = AC$ ，由勾股定理可求 AC 的长，即可得 BD 的长.

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle BAC = 90^\circ$ ，点 E 为 BC 的中点，

$$\therefore AE = EC = \frac{1}{2}BC$$

$$\because BC = 2AD,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC$$

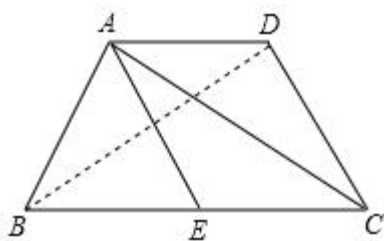
$$\therefore AD = EC, \text{ 且 } AD \parallel BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } AECD \text{ 是平行四边形, 且 } AE = EC,$$

$$\therefore \text{四边形 } AECD \text{ 是菱形;}$$

【小问 2 详解】

解：如图，



$\because AD \parallel BC, AD < BC$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形,

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore AB = AD$$

$\because$ 四边形 $AECD$ 是菱形,

$$\therefore AD = DC = 2$$

$$\therefore AB = DC = 2$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore AC = BD$$

$$\because BC = 2AD = 4,$$

$$\therefore BD = AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了菱形的判定和性质，直角三角形的性质，勾股定理，解题的关键是求证 $BD = AC$.

24. 综合与实践.

如何分配工作，使公司支付的总工资最少		
素材1		壮锦是工艺美术织品，是壮族人民最精彩的文化创造之一，其历史也非常悠久. 某公司承接到 2160 个壮锦手提包的订单，计划将任务分配给甲、乙两个生产部门去完成. 甲部门每天生产的总数是乙部门每天生产总数的 2 倍，甲部门单独完成这项任务所需的时间比乙部门单独完成少 18 天.
素	经调查，这项订单需要支付甲部门 4800 元/天，乙部门 3000 元/天.	

材 2		
素 材 3	由于甲部门有其他工作任务，甲部门工作天数不超过乙部门工作天数的一半.	
问题解决		
任 务 1	确定工作 效率	求甲、乙部门原来每天分别生产多少个壮锦手提包；
任 务 2	拟订设计 方案	①若设甲部门工作 m 天，则甲部门完成壮锦手提包_____个，乙部门 工作时间可表示为_____天； ②如何安排甲、乙两部门工作的天数，才能使正好完成任务时该公司 支付的总工资最少？最少需要多少元？

【答案】任务 1：甲部门原来每天生产 120 个壮锦手提包，乙部门原来每天生产 60 个壮锦手提包；任务 2：
 ① $120m$ ， $(36-2m)$ ；②甲部门工作 9 天，乙部门工作 18 天，才能使正好完成任务时该公司支付的总工
 资最少，最少需要 97200 元.

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用，一次函数的最大利润问题，正确掌握相
 关性质内容是解题的关键.

(1) 设乙部门每天能生成 x 个壮锦手提包，依题意，列式得 $\frac{2160}{x} - \frac{2160}{2x} = 18$ ，注意经检验 $x = 60$ 是方
 程的解，即可作答.

(2) 设甲部门工作 m 天，则乙部门的工作时间为 $\frac{2160-120m}{60} = 36-2m$ (天). 再依题意，得出
 $m \leq \frac{1}{2}(36-2m)$ ，解出 $m \leq 9$ ，根据利润公式得出 $w = -1200m + 108000$ ，运用一次函数的性质，进行分
 析作答即可.

【详解】解：任务 1：设乙部门原来每天生产 x 个壮锦手提包，则甲部门原来每天生产 $2x$ 个壮锦手提包，
 由题意得： $\frac{2160}{x} - \frac{2160}{2x} = 18$ ，
 解得： $x = 60$ ，
 经检验， $x = 60$ 是原方程的解，且符合题意，
 $\therefore 2x = 120$ ，

答：甲部门原来每天生产 120 个壮锦手提包，乙部门原来每天生产 60 个壮锦手提包；

任务 2：①设甲部门工作 m 天，则甲部门完成壮锦手提包 $120m$ 个，乙部门工作时间可表示为 $(2160 - 120m) \div 60 = (36 - 2m)$ 天，

故答案为： $120m$ ， $(36 - 2m)$ ；

②由题意得： $m \leq \frac{1}{2}(36 - 2m)$ ，

解得： $m \leq 9$ ，

设该公司支付的总工资为 y 元，

由题意得： $y = 4800m + 3000(36 - 2m) = -1200m + 108000$ ，

$\therefore -1200 < 0$ ，

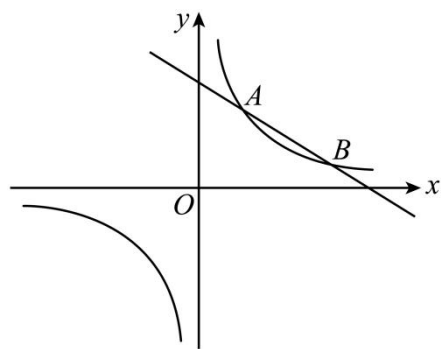
$\therefore y$ 随 m 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $m = 9$ 时， y 有最小值，

此时， $36 - 2m = 36 - 2 \times 9 = 18$ ，

答：甲部门工作 9 天，乙部门工作 18 天，才能使正好完成任务时该公司支付的总工资最少，最少需要 97200 元.

25. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数的图像与反比例函数的图像相交于点 A 、 B ，点 A 的坐标为 $(2, 3)$ ，点 B 的横坐标为 6.



(1) 求反比例函数与一次函数的解析式；

(2) 如果点 C 、 D 分别在 x 轴、 y 轴上，四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 求直线 CD 的表达式.

【答案】 (1) $y = \frac{6}{x}$ ， $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ；

(2) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

【解析】

【分析】(1) 设反比例函数为 $y = \frac{k}{x}$ ，将 A 点坐标代入即可求出 k ，进一步求出 B 的坐标，设一次函数表达式为 $y = kx + b$ ，将 A 、 B 点的坐标代入求解即可；

(2) 利用平行四边形的性质可得： $CD \parallel AB$ ，故可设直线 CD 表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + m$ ，利用 m 表示 C 、 D 点的坐标，再利用 $CD = AB$ 即可解出 m 。

【小问 1 详解】

解：设反比例函数为 $y = \frac{k}{x}$ ，一次函数表达式为 $y = kx + b$ ，

$$\because y = \frac{k}{x} \text{ 过点 } A(2, 3),$$

$$\therefore 3 = \frac{k}{2}, \text{ 即 } k = 6, \text{ 反比例函数为 } y = \frac{6}{x},$$

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 6,

$$\therefore B(6, 1),$$

将 $A(2, 3)$ ， $B(6, 1)$ 代入 $y = kx + b$ ，得 $\begin{cases} 2k + b = 3 \\ 6k + b = 1 \end{cases}$ ，

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{一次函数表达式为 } y = -\frac{1}{2}x + 4$$

【小问 2 详解】

解) $\because ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\text{设直线 } CD \text{ 表达式为 } y = -\frac{1}{2}x + m,$$

$\therefore$ 直线 CD 与 x 轴交点 $C(2m, 0)$ ，与 y 轴交点 $D(0, m)$ ，

$$\because CD = AB, \text{ 即: } CD^2 = AB^2,$$

$$\therefore (0 - 2m)^2 + (m - 0)^2 = (6 - 2)^2 + (1 - 3)^2,$$

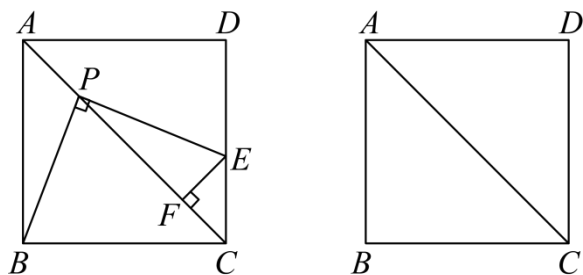
$$\therefore m = 2, \quad m = -2,$$

当 $m = -2$ ， $ABCD$ 构不成平行四边形，故舍去

∴ 直线 CD 的表达式 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

【点睛】 本题考查求一次函数，反比例函数解析式，平行四边形的性质，要掌握待定系数法求解析式；(1) 关键是求出 B 点的坐标；(2) 利用 $CD \parallel AB$ 巧妙设直线 CD 表达式是解题的关键.

26. 已知边长为 $4\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中， P 是对角线 AC 上的一个动点（与点 A ， C 不重合），过点 P 作 $PE \perp PB$ ， PE 交射线 DC 于点 E ，过点 E 作 $EF \perp AC$ ，垂足为点 F .



(备用图)

(1) 当点 E 落在线段 CD 上时（如图所示），设 $AP = x$ ， $\triangle PEF$ 的面积为 y ，求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出函数的定义域；

(2) 在点 P 的运动过程中， $\triangle PEC$ 能否为等腰三角形？如果能，试求出 AP 的长，如果不能，试说明理由.

【答案】(1) y 与 x 之间的函数关系式为 $y = 8 - 2x$ ($0 < x \leq 2$)

(2) 当点 E 在线段 DC 上时， $\triangle PEC$ 不可能是等腰三角形；理由见解析；若点 E 在线段 DC 的延长线上，能， AP 的长为 $4\sqrt{2}$

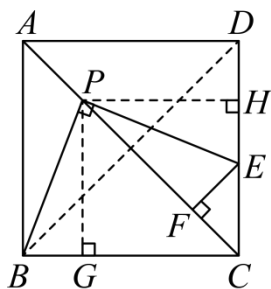
【解析】

【分析】(1) 过点 P 作 $PG \perp BC$ 于 G ，过点 P 作 $PH \perp DC$ 于 H ，连接 BD ，交 AC 于点 O ，证明 $\triangle PGB \cong \triangle PHE$ ，得到 $PB = PE$ ，再证明 $\triangle BOP$ 和 $\triangle PFE$ 全等，推出 $BO = PF$ ， $EF = PO$ ，由正方形的边长得到 $AO = PF = 4$ ，表示出 EF ，即可求出函数解析式；

(2) 分两种情况：①若点 E 在线段 DC 上，②若点 E 在线段 DC 的延长线上，根据等腰三角形的性质求解.

【小问 1 详解】

过点 P 作 $PG \perp BC$ 于 G ，过点 P 作 $PH \perp DC$ 于 H ，连接 BD ，交 AC 于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $PG \perp BC$, $PH \perp DC$,

$$\therefore \angle GPC = \angle ACB = \angle ACD = \angle HPC = 45^\circ,$$

$$\therefore PG = PH, \quad \angle GPH = \angle PGB = \angle PHE = 90^\circ,$$

$\because PE \perp PB$,

即 $\angle BPE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BPG = 90^\circ - \angle GPE = \angle EPH,$$

在 $\triangle PGB$ 和 $\triangle PHE$ 中,

$$\begin{cases} \angle PGB = \angle PHE \\ PH = PG \\ \angle BPG = \angle EPH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle PGB \cong \triangle PHE (ASA),$$

$$\therefore PB = PE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BOP = 90^\circ.$$

$\because PE \perp PB$,

$$\therefore \angle BPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PBO = 90^\circ - \angle BPO = \angle EPF,$$

$\because EF \perp PC$,

$$\therefore \angle PFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP = \angle PFE,$$

在 $\triangle BOP$ 和 $\triangle PFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle PBO = \angle EPF \\ \angle BOP = \angle PFE \\ BP = PE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOP \cong \triangle PFE (AAS),$$

$$\therefore BO = PF, \quad EF = PO,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 $4\sqrt{2}$ 的正方形,

$$\therefore AO = PF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4,$$

$$\because AP = x,$$

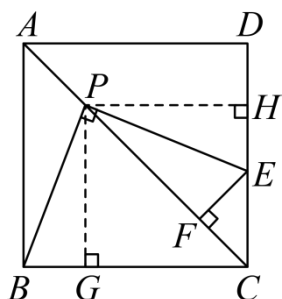
$$\therefore EF = 4 - x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}PF \cdot EF = \frac{1}{2} \times 4 \times (4 - x) = 8 - 2x (0 < x \leq 2),$$

即 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = 8 - 2x (0 < x \leq 2)$;

【小问 2 详解】

① 若点 E 在线段 DC 上,



$$\because \angle BPE = \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PBC + \angle PEC = 180^\circ,$$

$$\because \angle PBC < 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEC > 90^\circ.$$

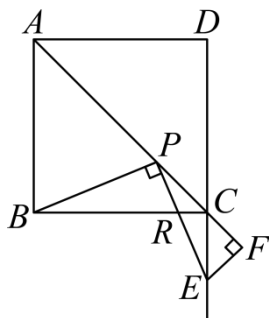
若 $\triangle PEC$ 为等腰三角形, 则 $EP = EC$,

$$\therefore \angle EPC = \angle ECP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PEC = 90^\circ, \text{ 与 } \angle PEC > 90^\circ \text{ 矛盾,}$$

$\therefore$ 当点 E 在线段 DC 上时, $\triangle PEC$ 不可能是等腰三角形;

② 若点 E 在线段 DC 的延长线上,



若 $\triangle PEC$ 是等腰三角形,

$$\because \angle PCE = 135^\circ,$$

$$\therefore CP = CE,$$

$$\therefore \angle CPE = \angle CEP = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ,$$

$$\because \angle PRC = 90^\circ + \angle PBR = 90^\circ + \angle CER,$$

$$\therefore \angle PBR = \angle CER = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle APB,$$

$$\therefore AP = AB = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AP \text{ 的长为 } 4\sqrt{2}.$$

【点睛】 此题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质: 等边对等角, 熟练掌握正方形的性质是解题的关键.