

上海外国语大学附属外国语学校 2024-2025 学年下学期八年级期末数学试卷

一、填空题($9 \times 2' + 9 \times 3' = 45'$)

1. 若一个多边形的内角和为 1800° ，则这个多边形的对角线条数是_____。

【答案】 54

【解析】

【分析】 本题考查了多边形内角和公式与对角线公式的结合应用，关键在于准确求出边数并代入计算。根据多边形的内角和公式求出边数，然后根据对角线的条数的公式进行计算即可求解。

【详解】 解：设多边形的边数是 n ，则

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 1800^\circ,$$

解得 $n = 12$ ，

多边形的对角线条数公式为： $\frac{n(n-3)}{2}$ ，

代入 $n = 12$ ：

$$\frac{12 \times (12-3)}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54$$

故答案为： 54.

2. 抛物线 $y = ax^2 + c$ 的对称轴为_____。

【答案】 直线 $x = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数对称轴的求解，关键在于识别抛物线形式中缺少的一次项，从而直接得出对称轴为 y 轴。抛物线 $y = ax^2 + c$ 的形式为顶点式变形后的结果，其对称轴可通过顶点坐标公式或观察标准抛物线的形式推导得出。

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + c$ 是由抛物线 $y = ax^2$ 沿 y 轴平移得到，

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + c$ 的对称轴为直线 $x = 0$ 。

故答案为： 直线 $x = 0$ 。

3. 直线 $y = x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的交点坐标是_____，_____。

【答案】 ①. $(1, 3)$ ②. $(-2, 0)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象和抛物线的交点问题，联立两函数的解析式，所得方程组的解，即为两函数的交点坐标.

【详解】 解：联立两函数的解析式有： $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 + 2x \end{cases}$ ，解方程组，得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ ；

则直线 $y = x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的交点坐标是 $(1, 3)$ ， $(-2, 0)$.

故答案为： $(1, 3)$ ， $(-2, 0)$.

4. 将抛物线 $y = ax^2$ 向左平移后所得新抛物线的顶点横坐标为 -2 ，且新抛物线经过点 $(1, 3)$ ，则 a 的值为

_____ .

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象与几何变换，掌握平移的规律是解题的关键. 根据题意设平移后的解析式为 $y = a(x + 2)^2$ ，再把点 $(1, 3)$ 代入，即可得出答案.

【详解】 解：∵ 抛物线 $y = ax^2$ 向左平移后所得抛物线的顶点横坐标为 -2 ，

∴ 设平移后的解析式为 $y = a(x + 2)^2$ ，

把点 $(1, 3)$ 代入，

解得 $a = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$.

5. 某福彩玩法规定所购的彩票的 4 位数与开奖结果的 4 位数相同，则中一等奖. 那么购一张彩票中一等奖的概率是 _____ .

【答案】 $\frac{1}{10^4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查概率，让 1 除以数的总情况数即为所求的概率.

【详解】 解：每个数位都可以是 0 到 9 这 10 个数中的任意一个，共有 10^4 个，且每个出现的机会相同，所有中一等奖的概率是 $\frac{1}{10^4}$ ，

故答案为: $\frac{1}{10^4}$.

6. 关于 x 的方程 $\sqrt{1+\frac{9}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{9+x}} = 1$ 的解是 _____.

【答案】 $x=3$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程. 熟练掌握换元法解无理方程是解题的关键. 令 $y = \sqrt{1+\frac{9}{x}}$, 将方程转化为:

$y - \frac{2}{y} = 1$, 解分式方程即可.

【详解】 解: $\sqrt{1+\frac{9}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{9+x}} = 1$,

$\therefore \sqrt{\frac{9+x}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{9+x}} = 1$,

令 $y = \sqrt{1+\frac{9}{x}}$, 且 $y > 0$, 则 $\sqrt{\frac{x}{9+x}} = \frac{1}{y}$,

$\therefore y - \frac{2}{y} = 1$,

整理, 得: $y^2 - y - 2 = 0$

解得: $y = 2$ 或 $y = -1$ (舍去),

经检验: $y = 2$ 是原方程的解,

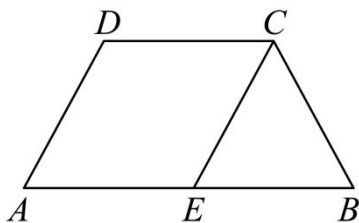
$\therefore 2 = \sqrt{1+\frac{9}{x}}$,

解得: $x = 3$;

经检验, $x = 3$ 是原方程的解,

故答案为: $x = 3$.

7. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 在 AB 上, $EC \parallel AD$, 则 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} =$ _____



【答案】 $\overrightarrow{BC}$

【解析】

【分析】 根据向量的线性运算法则和梯形的性质解答.

【详解】 解: $\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 在 AB 上, $EC \parallel AD$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{CD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE}$$

$$= -\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE}$$

$$= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$$

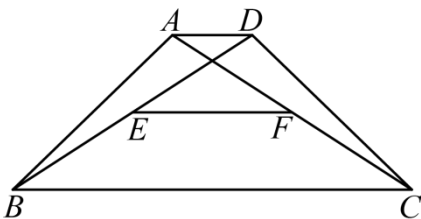
$$= \overrightarrow{BC},$$

故答案为: $\overrightarrow{BC}$.

【点睛】 本题考查了向量的线性运算, 掌握向量的加法运算法则是解答本题的关键.

8. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $BC = 10$, E 是 BD 的中点, F 是 AC 的中点, 则

$$EF = \underline{\quad\quad}.$$



【答案】 4

【解析】

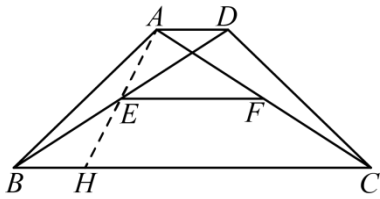
【分析】 本题考查三角形中位线的性质, 平行线的性质, 全等三角形的判定和性质, 正确添加辅助线是解题的关键.

连接并延长 AE 交 BC 于点 H , 由 $AD \parallel BC$, 得 $\angle ADE = \angle HBE$, 而 $DE = BE$, $\angle AED = \angle HEB$, 即可根据 “ASA” 证明 $\triangle AED \cong \triangle HEB$, 得 $AD = HB = 2$, $AE = HE$, 因为 $BC = 10$, 所以

$$HC = BC - HB = 8, \text{ 由 } E \text{ 是 } AH \text{ 的中点, } F \text{ 是 } AC \text{ 的中点, 根据三角形中位线定理得 } EF = \frac{1}{2}HC = 4,$$

于是得到问题的答案.

【详解】解：连接并延长 AE 交 BC 于点 H ，



$\because AD \parallel BC$ ， E 是 BD 的中点，

$\therefore \angle ADE = \angle HBE$ ， $DE = BE$ ，

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle HEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle HBE \\ DE = BE \\ \angle AED = \angle HEB \end{cases},$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle HEB$ (ASA),

$\therefore AD = HB = 2$ ， $AE = HE$ ，

$\because BC = 10$ ，

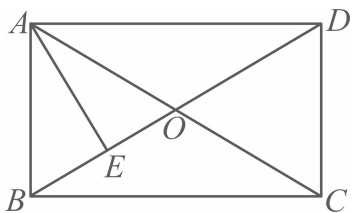
$\therefore HC = BC - HB = 10 - 2 = 8$ ，

$\because E$ 是 AH 的中点， F 是 AC 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}HC = 4,$$

故答案为：4.

9. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AE \perp BD$ ，垂足为 E ，且 $BE:ED=1:3$ ， $AB=4\text{cm}$ ，则 $AD=$ _____ cm.



【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】此题重点考查矩形的性质、线段的垂直平分线的性质、勾股定理等知识，由矩形的性质得

$OA = OB = OD = \frac{1}{2}BD$ ，由 $BE:ED=1:3$ ，得 $OE = BE = \frac{1}{4}BD$ ，则 AE 垂直平分 OB ，所以

$OA = OB = AB = 4\text{cm}$ ，则 $BD = 2OB = 8\text{cm}$ ，求得 $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2}$ ，于是得到问题的答案.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ， $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD$ ，且 $AC = BD$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore OA = OB = OD = \frac{1}{2}BD, \\
&\because AE \perp BD, \text{ 且 } BE:ED = 1:3, \\
&\therefore BE = \frac{1}{1+3}BD = \frac{1}{4}BD, \\
&\therefore OE = OB - BE = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4}BD, \\
&\therefore BE = OE, \\
&\therefore AE \text{ 垂直平分 } OB, \\
&\therefore OA = OB = AB = 4\text{cm}, \\
&\therefore BD = 2OB = 8\text{cm}, \\
&\therefore AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}(\text{cm}),
\end{aligned}$$

故答案为: $4\sqrt{3}$.

10. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{x-1} = 1+m$ 无解, 则 m 的值为 _____.

【答案】 $m < -1$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的非负数性质, 根据二次根式的非负数性质, 得出 $1+m < 0$ 时, 关于 x 的方程 $\sqrt{x-1} = 1+m$ 无解, 由此可解.

【详解】 解: 关于 x 的方程 $\sqrt{x-1} = 1+m$ 无解,

则 $1+m < 0$,

解得: $m < -1$,

故答案为: $m < -1$.

11. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + a = 2|x+1|$ 有且只有一个实数解时, 则 a 的值为 _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 此时考查了无理方程, 二次根式的性质, 绝对值的意义,

由 $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + a = 2|x+1|$, 化简得到 $|x+1| = a$, 然后根据题意得到 $|x+1| = a$ 有且只有一个实数解, 进而求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{x^2 + 2x + 1} + a = 2|x+1|$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2} + a = 2|x+1|$$

$$\therefore |x+1| + a = 2|x+1|$$

$$\therefore |x+1| = a$$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + a = 2|x+1|$ 有且只有一个实数解

$\therefore |x+1| = a$ 有且只有一个实数解.

$$\therefore |x+1| = a = 0.$$

故答案为: 0.

12. 已知一抛物线的形状与 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 的形状相同, 对称轴为 $x = -2$, 且与 x 轴的两交点之间的距离为 2, 则此抛物线的解析式是 _____.

【答案】 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式, 根据题意确定与 x 轴的交点坐标, 设出抛物线解析式为 $y = a(x+1)(x+3)$, 根据抛物线的形状与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 相同即可确定 a 的值, 从而求出解析式.

【详解】 解: $\because$ 对称轴是直线 $x = -2$, 且与 x 轴的两交点之间的距离为 2,

$\therefore$ 由对称性可知, 与 x 轴的交点分别为 $(-1, 0)$, $(-3, 0)$,

设抛物线解析式为 $y = a(x+1)(x+3)$,

$\because$ 抛物线的形状与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 相同,

$$\therefore a = \pm \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \pm \frac{1}{2}(x+1)(x+3)$,

即抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$.

13. 已知二次函数 $y = -x^2 + kx + 12$ 的图象与 x 轴交点都位于 $(6, 0)$ 左侧, 则 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $k < 4$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象与系数的关系, 抛物线与 x 轴的交点, 由于无论 k 取任何值, 二次函数

$y = -x^2 + kx + 12$ 的图象与 x 轴都有两个交点, 根据题意 $x = 6$ 时, $y < 0$, 对称轴 $x = -\frac{k}{2 \times (-1)} = \frac{k}{2} < 6$,

解不等式即可得答案.

【详解】解: $\because \Delta = k^2 - 4 \times (-1) \times 12 = k^2 + 48 > 0$,

$\therefore$ 无论 k 取任何值, 二次函数 $y = -x^2 + kx + 12$ 的图象与 x 轴都有两个交点,

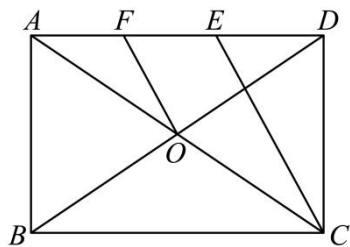
$\therefore$ 二次函数 $y = -x^2 + kx + 12$ 的图象开口向下, 且与 x 轴交点都位于 $(6, 0)$ 左侧,

$\therefore x = 6$ 时, $y = -x^2 + kx + 12 < 0$, 且对称轴 $x = -\frac{k}{2 \times (-1)} = \frac{k}{2} < 6$,

解得: $k < 4$,

故答案为: $k < 4$.

14. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , $AE = CE$, F 是 AE 的中点, $AD = 8, DC = 4$. 则线段 $OF =$ _____.



【答案】2.5

【解析】

【分析】本题考查矩形的性质, 勾股定理, 三角形中位线定理, 根据矩形的性质证明 OF 是 $\triangle ACE$ 的中位线, 得 $OF \parallel CE$, $OF = \frac{1}{2}CE$, 然后证明 $AF = EF = OF$, 设 $AF = EF = OF = x$, 根据勾股定理得到 $DE^2 + CD^2 = CE^2$, 代入列方程求出 x 的值即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$, $OA = OC$,

$\because F$ 是 AE 的中点,

$\therefore AF = EF$,

$\therefore OF$ 是 $\triangle ACE$ 的中位线,

$\therefore OF \parallel CE$, $OF = \frac{1}{2}CE$,

$\therefore \angle ECA = \angle FOA$,

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ECA,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle FOA,$$

$$\therefore AF = OF,$$

$$\therefore AF = EF = OF,$$

$$\text{设 } AF = EF = OF = x,$$

$$\therefore AE = CE = 2x, \quad DE = AD - AE = 8 - 2x,$$

$$\therefore DE^2 + CD^2 = CE^2,$$

$$\therefore (8 - 2x)^2 + 4^2 = (2x)^2,$$

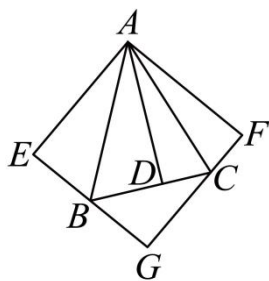
$$\therefore x = 2.5,$$

$$\therefore OF = 2.5,$$

故答案为: 2.5.

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ$, $AD \perp BC$, 垂足为点 D , $BD = 3$, $DC = 2$, 现将 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 分别沿着 AB 、 AC 翻折, 得到 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$, 延长 EB 、 FC 交于点 G , 则四边形 $AEGF$ 的面积是

_____.



【答案】 36

【解析】

【分析】由 $\angle BAC = 45^\circ$, $AD \perp BC$, $BD = 3$, $DC = 2$, 得 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, $BC = 5$, 由翻折得 $\angle E = \angle ADE = 90^\circ$, $\angle F = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle BAE = \angle BAD$, $\angle CAF = \angle CAD$, $BE = BD = 3$, $FC = DC = 2$, 则 $\angle BAE + \angle CAF = \angle BAC = 45^\circ$, 求得 $\angle EAF = 90^\circ$, 则四边形 $AEGF$ 是矩形, 而 $AE = AF = AD$, 所以四边形 $AEGF$ 是正方形, 设正方形 $AEGF$ 的边长为 m , 则 $BG = m - 3$, $CG = m - 2$, 由勾股定理得 $(m - 3)^2 + (m - 2)^2 = 5^2$, 求得符合题意的 m 值为 6, 所 $S_{\text{四边形} AEGF} = m^2 = 6^2 = 36$, 于是得到问题的答案.

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ$, $AD \perp BC$, $BD = 3$, $DC = 2$,
 $\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, $BC = BD + DC = 5$,

由翻折得 $\angle E = \angle ADE = 90^\circ$, $\angle F = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle BAE = \angle BAD$, $\angle CAF = \angle CAD$, $BE = BD = 3$, $FC = DC = 2$,

$$\therefore \angle BAE + \angle CAF = \angle BAD + \angle CAD = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle BAE + \angle CAF + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle E = \angle F = \angle EAF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是矩形,

$$\therefore \angle G = 90^\circ,$$

$$\because AE = AD, AF = AD,$$

$$\therefore AE = AF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是正方形,

设正方形 $AEGF$ 的边长为 m , 则 $BG = m - 3$, $CG = m - 2$,

$$\because BG^2 + CG^2 = BC^2,$$

$$\therefore (m - 3)^2 + (m - 2)^2 = 5^2,$$

解得 $m_1 = 6$, $m_2 = -1$ (不符合题意, 舍去),

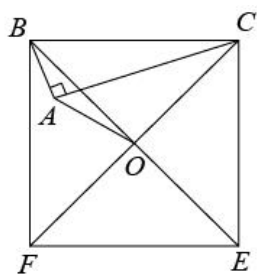
$$\therefore S_{\text{四边形} AEGF} = m^2 = 6^2 = 36,$$

故答案为: 36.

【点睛】此题重点考查翻折变换的性质、矩形的判定与性质、正方形的判定与性质、勾股定理等知识, 证明四边形 $AEGF$ 是正方形是解题的关键.

16. 如图以直角三角形 ABC 的斜边 BC 为边在三角形 ABC 的同侧作正方形 $BCEF$, 设正方形的中心为 O ,

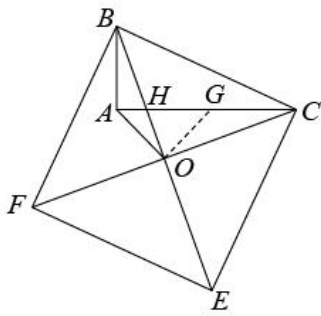
连结 AO , 如果 $AB=4$, $AO=6\sqrt{2}$, 则 $AC=$ _____



【答案】16.

【解析】

【详解】试题分析: 在 AC 上取一点 G 使 $CG = AB = 4$, 连接 OG .



$$\because \angle ABO = 90^\circ - \angle AHB, \angle OCG = 90^\circ - \angle OHC, \angle OHC = \angle AHB,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle OCG.$$

$$\because OB = OC, CG = AB,$$

$$\therefore \triangle OGC \cong \triangle OAB,$$

$$\therefore OG = OA = 6\sqrt{2}, \angle BOA = \angle GOC.$$

$$\because \angle GOC + \angle GOH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GOH + \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\text{即: } \angle AOG = 90^\circ.$$

$$\therefore \triangle AOG \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore AG = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12.$$

$$\therefore AC = 16.$$

故答案为 16.

点睛：本题的关键是通过作辅助线来构建全等三角形，然后将已知和所求线段转化到直角三角形中进行计算.

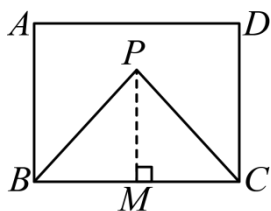
17. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=m$, $BC=4$, $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线相交于点 P , 如果点 P 在这个矩形的内部 (不在边 AD 上), 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 2$

【解析】

【分析】 过 P 作 $PM \perp BC$ 于 M , 根据矩形的性质得出 $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$, 求出 $\triangle PBC$ 是等腰直角三角形, 求出 PM 长, 即可得出答案.

【详解】 解: 如图, 过 P 作 $PM \perp BC$ 于 M ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$,

$\because \angle ABC$ 和 $\angle DCB$ 的角平分线交于 P ,

$\therefore \angle PBC = \angle PCB = 45^\circ$,

$\therefore \triangle PBC$ 是等腰直角三角形,

$\because PM \perp BC$,

$\therefore BM = CM$,

$\therefore PM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$,

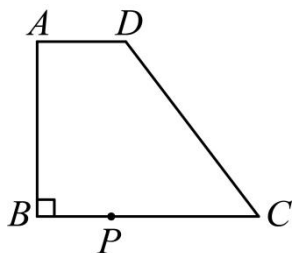
$\because P$ 在矩形 $ABCD$ 的内部, $AB = m$,

$\therefore m > 2$,

故答案为: $m > 2$.

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 等腰直角三角形的性质和判定的应用, 能求出 PM 的长是解此题的关键.

18. 已知如图, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AD = 2$, $BC = DC = 5$, 点 P 在 BC 上移动, 则当 $PA + PD$ 取最小值时, $\triangle APD$ 中边 AP 上的高为_____.

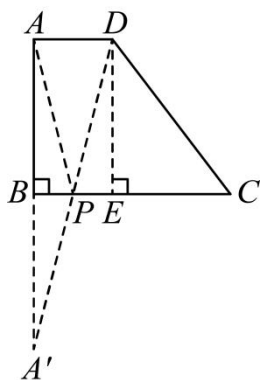


【答案】 $\frac{8\sqrt{17}}{17}$

【解析】

【分析】 此题考查了梯形一般辅助线的作法、勾股定理、三角形的面积计算等知识点. 要求 $\triangle APD$ 中边 AP 上的高, 根据三角形的面积, 由勾股定理即可得解.

【详解】 解: 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ,



$\because AD \parallel BC, AB \perp BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是矩形,

$\therefore BE = AD = 2,$

$\because BC = CD = 5,$

$\therefore EC = BC - BE = 3,$

$\therefore AB = DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = 4,$

延长 AB 到 A' , 使得 $A'B = AB$, 连接 $A'D$ 交 BC 于 P , 此时 $PA + PD$ 最小,

$\therefore \triangle A'PB \cong \triangle DPE,$

$\therefore BP = EP,$

$\therefore PA = PD,$

$\therefore BP = \frac{1}{2}AD = 1,$

$\therefore AP = \sqrt{17},$

在 $\triangle APD$ 中, 由面积公式可得 $\triangle APD$ 中边 AP 上的高 $= 2 \times 4 \div \sqrt{17} = \frac{8\sqrt{17}}{17}.$

故答案为: $\frac{8\sqrt{17}}{17}.$

二、选择题($4 \times 3' = 12'$)

19. 如果点 C 、 D 在线段 AB 上, $|AC| = |BD|$, 那么下列结论中正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是相等向量

B. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是相等向量

C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是相反向量

D. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量

【答案】D

【解析】

【详解】解：∵点 C 、 D 在线段 AB 上， $|AC|=|BD|$ ，

$$\therefore |AD|=|BC|.$$

A、 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 方向相反， $\therefore \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ ，故本选项错误；

B、 $\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相反， $\therefore \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ ，故本选项错误；



C、 $\therefore$ 相反向量是方向相反，模相等的两向量，而 $|AD|=|BC|>|BD|$ ， $\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 不是相反向量，故本选项错误；

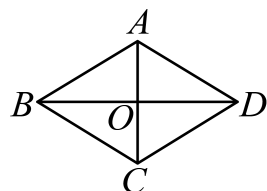
D、 $\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线， $\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量，故本选项正确。

故选：D。

由点 C 、 D 在线段 AB 上， $|AC|=|BD|$ ，可得 $|AD|=|BC|$ ，然后根据相等向量、相反向量与平行向量的定义，即可求得答案。注意排除法的应用。

此题考查了平面向量的知识。解此题的关键是熟记相等向量、相反向量与平行向量的定义与数形结合思想的应用。

20. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ， $AC \perp BD$ ， $BO = DO$ ，那么下列条件中不能判定四边形 $ABCD$ 是菱形的为（ ）



A. $\angle OAB = \angle OBA$

B. $\angle OBA = \angle OBC$

C. $AD \parallel BC$

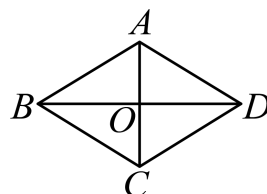
D. $AD = BC$

【答案】A

【解析】

【分析】根据菱形的判定方法有三种：①定义：一组邻边相等的平行四边形是菱形；②四边相等；③对角线互相垂直平分的四边形是菱形，据此判断即可。

【详解】A. $\because AC \perp BD$ ， $BO = DO$ ，



$\therefore AC$ 是 BD 的垂直平分线，

$\therefore AB=AD, CD=BC,$
 $\therefore \angle ABD=\angle ADB, \angle CBD=\angle CDB,$
 $\therefore \angle OAB=\angle OBA,$
 $\therefore \angle OAB=\angle OBA=45^\circ,$
 $\therefore OC$ 与 OA 的关系不确定,
 $\therefore$ 无法证明四边形 $ABCD$ 的形状, 故此选项正确;

B. $\because AC \perp BD, BO=DO,$
 $\therefore AC$ 是 BD 的垂直平分线,
 $\therefore AB=AD, CD=BC,$
 $\therefore \angle ABD=\angle ADB, \angle CBD=\angle CDB,$
 $\therefore \angle OBA=\angle OBC,$
 $\therefore \angle ABD=\angle ADB=\angle CBD=\angle CDB,$
 $BD=BD,$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD,$
 $\therefore AB=BC=AD=CD,$
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 故此选项错误;

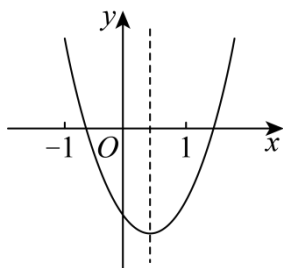
C. $\because AD \parallel BC,$
 $\therefore \angle DAC=\angle ACB,$
 $\therefore \angle AOD=\angle BOC, BO=DO,$
 $\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC,$
 $\therefore AB=BC=CD=AD,$
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 故此选项错误;

D. $\because AD=BC, BO=DO,$
 $\angle BOC=\angle AOD=90^\circ,$
 $\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC,$
 $\therefore AB=BC=CD=AD,$
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 故此选项错误.

故选 A.

【点睛】此题考查菱形的判定, 解题关键在于掌握菱形的三种判定方法.

21. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示, 则 $abc, b^2-4ac, 2a+b, a+b+c$ 这四个式子中, 值为正数的有 ()



A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 由抛物线的开口方向判断 a 与 0 的关系，由抛物线与 y 轴的交点判断 c 与 0 的关系，然后根据对称轴及抛物线与 x 轴交点情况进行推理，进而对所得结论进行判断.

【详解】 ①由图示知，抛物线开口向上，则 $a > 0$ ；对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，则 a 、 b 异号，即 $b < 0$ ；抛物线与 y 轴交于负半轴，则 $c < 0$. 所以 $abc > 0$. ②由图示知，抛物线与 x 轴有两个交点，则 $b^2 - 4ac > 0$ ；③由 $-\frac{b}{2a} < 1$ ， $a > 0$ 得到 $-b < 2a$ ，即 $2a + b > 0$ ；④由图可知，当 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，即 $a + b + c < 0$. 综上所述， abc ， $b^2 - 4ac$ ， $2a + b$ ， $a + b + c$ 这四个式子中，值为正数的有 3 个.

故选 B.

【点睛】 本题主要考查了图象与二次函数系数之间的关系. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 系数符号由抛物线开口方向、对称轴、抛物线与 y 轴的交点、抛物线与 x 轴交点的个数确定.

22. 已知 a 是自然数，关于 x 的方程 $2x - a\sqrt{1-x} - a + 4 = 0$ 至少有一个整数根，则 a 可取值的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】

【分析】 首先根据方程 $2x - a\sqrt{1-x} - a + 4 = 0$ ，求得 $a = \frac{2x+4}{\sqrt{1-x}+1}$ ，再假设

设 $\sqrt{1-x} = y$ (y 为非负整数)，则求得 x 代入转化为 y 的方程. 利用整数的特点进一步确定 y 的值，进而求得 a 的值.

【详解】 $2x - a\sqrt{1-x} - a + 4 = 0$

显然满足条件的 x ，必使得 $\sqrt{1-x}$ 为整数，否则 $a = \frac{2x+4}{\sqrt{1-x}+1}$ 不可能为整数，

设 $\sqrt{1-x} = y$ (y 为非负整数),

则原式变为 $2(1-y^2) - ay - a + 4 = 0$,

$$a = \frac{2(1-y^2)+4}{1+y} = 2(1-y) + \frac{4}{1+y},$$

$\because y$ 为非负整数(又 4 能整除 $1+y$),

$\therefore$ 要使 a 为整数, 则 $y=0, 1, 3$,

此时 $a=6, 2, -3$.

又知 a 为非负整数, $a=6, 2$,

当 $a=0$ 时, 方程也有一个整数根,

$a=6, 2, 0$,

故选: C.

【点睛】考查一元二次方程的整数根与有理根, 解决本题的关键是巧妙运用整数的特点以及在分数计算中整数的倍数关系.

三、解答题 ($4'+6'=10'$)

23. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在 $x = -1$ 时, y 有最小值 -4 , 它的图象与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 10$, 求该二次函数的解析式.

【答案】 $y = x^2 + 2x - 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的顶点式的运用, 根与系数的关系的运用, 完全平方公式的运用, 根据完全平方公式建立方程是解题关键. 先设此抛物线的解析式 $y = a(x+1)^2 - 4 = ax^2 + 2ax + a - 4$, 然后由根与系数关系, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2a}{a} = -2$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{a-4}{a}$, 然后根据 $x_1^2 + x_2^2 = 10$ 建立方程, 求出 a 的值即可.

【详解】 解: $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在 $x = -1$ 时, y 有最小值 -4

$\therefore$ 设此抛物线的解析式 $y = a(x+1)^2 - 4 = ax^2 + 2ax + a - 4$,

由根与系数关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2a}{a} = -2$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{a-4}{a}$,

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$, $x_1^2 + x_2^2 = 10$

$$\therefore 10 = (-2)^2 - 2 \times \frac{a-4}{a},$$

$$\therefore -\frac{2a-8}{a} = 6, \text{ 解得: } a = 1,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 + 2x - 3.$$

24. 已知二次函数 $y = x^2 + px + q$ 顶点坐标为 $(2, -9)$, 这条抛物线与 x 轴的两个交点 A, B , 设点 M 在这条抛物线上, 且 $S_{\triangle ABM} = 24$, 求点 M 的坐标.

【答案】 $(2 + \sqrt{17}, 8)$ 或 $(2 - \sqrt{17}, 8)$ 或 $(1, -8)$ 或 $(3, -8)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的几何应用, 利用顶点式求出抛物线的解析式, 求出 A, B 的坐标, 然后假设出点 M 坐标, 根据 $S_{\triangle ABM} = 24$ 列出方程求出 m 的值, 即可求解, 利用顶点式求出二次函数的解析式是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 二次函数 $y = x^2 + px + q$ 顶点坐标为 $(2, -9)$,

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = (x-2)^2 - 9 = x^2 - 4x - 5,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = 5,$$

$$\therefore A(-1, 0), B(5, 0),$$

$$\therefore AB = 5 - (-1) = 6,$$

$$\text{设点 } M \text{ 坐标为 } (m, m^2 - 4m - 5),$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times AB \times |m^2 - 4m - 5| = 3|m^2 - 4m - 5| = 24,$$

$$\therefore |m^2 - 4m - 5| = 8,$$

$$\therefore m^2 - 4m - 5 = 8 \text{ 或 } m^2 - 4m - 5 = -8,$$

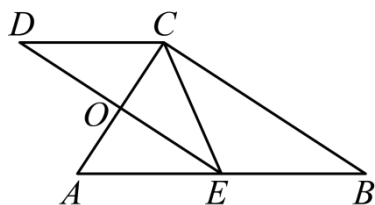
$$\text{解得 } m_1 = 2 + \sqrt{17}, m_2 = 2 - \sqrt{17}, m_3 = 1, m_4 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (2 + \sqrt{17}, 8) \text{ 或 } (2 - \sqrt{17}, 8) \text{ 或 } (1, -8) \text{ 或 } (3, -8).$$

四、证明题 (5+7=12)

25. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, E 为 AB 的中点, 四边形 $BCDE$ 是平行四边形, 求证: AC 与

DE 互相垂直平分.



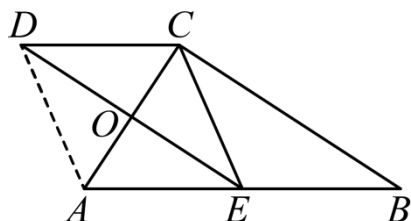
【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质，菱形的判定与性质，斜边上的中线等于斜边的一半，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

先结合四边形 $BCDE$ 是平行四边形，得 $BE = CD$ ， $BE \parallel CD$ ，由直角三角形的性质可得 $AE = BE = CE$ ，通过题意证明四边形 $AECD$ 是菱形，即可求解.

【详解】解：如图，连接 AD ，



$\because$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形，

$\therefore BE = CD$ ， $BE \parallel CD$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， E 为 AB 的中点，

$\therefore AE = BE = CE$ ，

$\therefore AE = CD$ ，

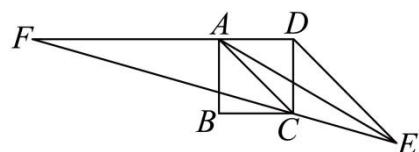
$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形，

又 $\because AE = CE$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $AECD$ 是菱形，

$\therefore AC$ 与 DE 互相垂直平分.

26. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， $DE \parallel AC$ ，且 $CE = CA$ ，直线 EC 交 DA 延长线于 F . 求证： $AE = AF$.

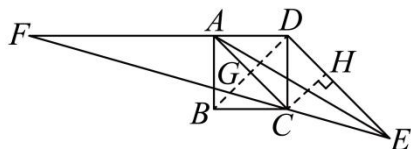


【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了正方形的判定与性质、三角函数、等腰三角形的判定与性质等知识点，数形结合并熟练掌握相关性质及定理是解题的关键. 连接 BD ，作 $CH \perp DE$ 于 H ，根据正方形的性质证出正方形 $DGCH$ ，求出 $2CH = CE$ ，求出 $\angle CEH = 30^\circ$ ，根据等腰三角形性质和三角形的外角性质求出 $\angle AEC = \angle CAE = 15^\circ$ ，求出 $\angle F$ 的度数即可.

【详解】证明：连接 BD ，作 $CH \perp DE$ 于 H ，



在正方形 $ABCD$ 中，

$$\angle DGC = 90^\circ, \quad GC = DG,$$

$$\because DE \parallel AC, \quad CH \perp DE$$

$$\therefore \angle DHC = \angle GCH = \angle DGC = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $DGCH$ 是正方形.

$$\text{由 } AC = CE = 2GC = 2CH,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CEH \text{ 中, } \sin \angle CEH = \frac{CH}{CE} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle CEH = 30^\circ$$

$$\because DE \parallel AC, \quad CE = CA$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CEA = \angle AED = \frac{1}{2} \angle CEH = 15^\circ$$

$$\because \text{在正方形 } ABCD \text{ 中, } \angle BAC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle FAE = \angle FAB + \angle BAC + \angle CAE = 90^\circ + 45^\circ + 15^\circ = 150^\circ$$

$$\therefore \angle F = 180^\circ - \angle FAE - \angle CEA = 180^\circ - 150^\circ - 15^\circ = 15^\circ$$

$$\therefore \angle F = \angle AEF$$

$$\therefore AE = AF.$$

五、综合题 (10'+11' = 21')

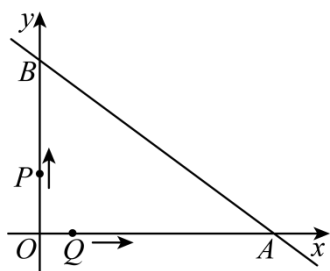
27. 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点，动点 P 、 Q 同时从 O 点出发，同时到达 A 点，运动停止. 点 Q 沿线段 OA 运动，速度为每秒 1 个单位长度，点 P 沿路线 $O \rightarrow B \rightarrow A$ 运动.

(1) 直接写出 A 、 B 两点的坐标；

(2) 设点 Q 的运动时间为 t (秒)， $\triangle OPQ$ 的面积为 S ，求出 S 与 t 之间的函数关系式；

(3) 当 $S = \frac{48}{5}$ 时，求出点 P 的坐标，并直接写出以点 O 、 P 、 Q 为顶点的平行四边形的第四个顶点 M 的坐

标.



【答案】(1) $A(8, 0)$, $B(0, 6)$;

$$(2) S = \begin{cases} t^2 (0 \leq t \leq 3) \\ -\frac{3}{5}t^2 + \frac{24}{5}t (3 < t \leq 8) \end{cases};$$

$$(3) M_1\left(\frac{28}{5}, \frac{24}{5}\right), M_2\left(-\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right), M_3\left(\frac{12}{5}, -\frac{24}{5}\right).$$

【解析】

【分析】(1) 分别把 $x=0$ 、 $y=0$ 代入 $y=-\frac{3}{4}x+6$ 即可求得结果;

(2) 先根据勾股定理求得 AB 的长, 根据点 Q 由 O 到 A 的时间可求得点 P 的速度, 再分当 P 在线段 OB 上运动 (或 $0 \leq t \leq 3$) 时, 当 P 在线段 BA 上运动 (或 $3 < t \leq 8$) 时, 两种情况, 根据三角形的面积公式求解即可;

(3) 把 $S=\frac{48}{5}$ 代入 (2) 中的函数关系式即可求得点 P 的坐标, 再根据平行四边形的性质求解即可.

【详解】解: (1) 把 $x=0$ 、代入 $y=-\frac{3}{4}x+6$, 得 $y=6$

把 $y=0$ 代入 $y=-\frac{3}{4}x+6$, 得 $x=8$

$\therefore A(8, 0) B(0, 6)$;

(2) $\because OA=8, OB=6$

$\therefore AB=10$

$\because$ 点 Q 由 O 到 A 的时间是 $\frac{8}{1}=8$ (秒)

$\therefore$ 点 P 的速度是 $\frac{6+10}{8}=2$ (单位/秒)

当 P 在线段 OB 上运动 (或 $0 \leq t \leq 3$) 时, $OQ=t, OP=2t, S=t^2$

当 P 在线段 BA 上运动 (或 $3 < t \leq 8$) 时, $OQ=t, AP=6+10-2t=16-2t$

作 $PD \perp OA$ 于点 D ，由 $\frac{PD}{BO} = \frac{AP}{AB}$ ，得 $PD = \frac{48-6t}{5}$ ，

$$\therefore S = \frac{1}{2} OQ \times PD = -\frac{3}{5} t^2 + \frac{24}{5} t;$$

(3) 当 $S = \frac{48}{5}$ 时， $\therefore \frac{48}{5} > \frac{1}{2} \times 3 \times 6$ ， $\therefore$ 点 P 在 AB 上

$$\text{当 } S = \frac{48}{5} \text{ 时， } -\frac{3}{5} t^2 + \frac{24}{5} t = \frac{48}{5}$$

$$\therefore t = 4$$

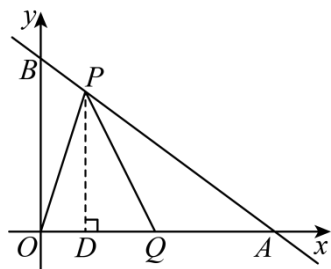
$$\therefore PD = \frac{48-6 \times 4}{5} = \frac{24}{5}, \quad AP = 16 - 2 \times 4 = 8$$

$$AD = \sqrt{8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{32}{5}$$

$$\therefore OD = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5}$$

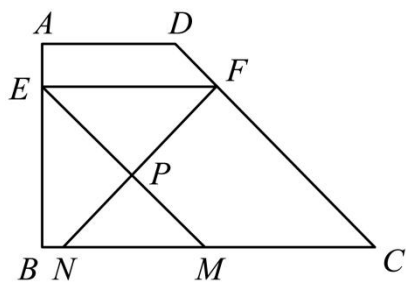
$$\therefore P\left(\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

$$M_1\left(\frac{28}{5}, \frac{24}{5}\right), \quad M_2\left(-\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right), \quad M_3\left(\frac{12}{5}, -\frac{24}{5}\right)$$



【点睛】本题考查一次函数综合，二次函数综合此类问题综合性强，难度较大，在中考中比较常见，需仔细分析题意，结合图象，利用函数解析式即可解决问题。

28. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $AB = 8$ ， $BC = 14$ ，点 E 、 F 分别在边 AB 、 CD 上， $EF \parallel AD$ ，点 P 与 AD 在直线 EF 的两侧， $\angle EPF = 90^\circ$ ， $PE = PF$ ，射线 EP 、 FP 与边 BC 分别相交于点 M 、 N ，设 $AE = x$ ， $MN = y$ 。



(1) 求边 AD 的长；

(2) 如图，当点 P 在梯形 $ABCD$ 内部时，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

(3) 如果 MN 的长为 2, 求梯形 $AEFD$ 的面积.

【答案】(1) $AD = 6$

(2) y 关于 x 的函数解析式为 $y = -3x + 10$. 定义域为 $1 \leq x < \frac{10}{3}$.

(3) 梯形 $AEFD$ 的面积为 $\frac{176}{9}$ 或 32

【解析】

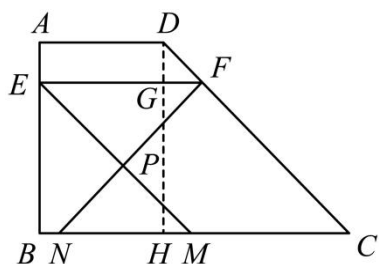
【分析】(1) 过 D 作 $DH \perp BC$, DH 与 EF 、 BC 分别相交于点 G 、 H , 判定四边形 $ABHD$ 是矩形, 在 $Rt\triangle DHC$ 中求出 CH 的长, 利用 $AD = BH = BC - CH$ 求出 AD 的长;

(2) 首先确定 $PM = PN$, 过点 P 作 $QR \perp EF$, QR 与 EF 、 MN 分别相交于 Q 、 R , 根据 $\angle MPN = \angle EPF = 90^\circ$, $QR \perp MN$, 可表示出 PQ 、 PR , 从而得出 y 关于 x 的函数解析式, 也能得出定义域;

(3) ①当点 P 在梯形 $ABCD$ 内部时, 由 $MN = 2$ 及 (2) 的结论得 $2 = -3x + 10$, $AE = x = \frac{8}{3}$, 可求得梯形的面积; ②当点 P 在梯形 $ABCD$ 外部时, 由 $MN = 2$ 及与 (2) 相同的方法得: $\frac{1}{2}(x + 6) - \frac{1}{2} \times 2 = 8 - x$, $AE = x = 4$, 可求得梯形的面积.

【小问 1 详解】

解: 过 D 作 $DH \perp BC$, DH 与 EF 、 BC 分别相交于点 G 、 H , 如图所示



$\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $\angle B = 90^\circ$,

$\therefore DH \parallel AB$,

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形,

$\because \angle C = 45^\circ$,

$\therefore \angle CDH = 45^\circ$,

$\therefore CH = DH = AB = 8$,

$\therefore AD = BH = BC - CH = 6$.

【小问 2 详解】

解: $\because DH \perp EF$, $\angle DFE = \angle C = \angle FDG = 45^\circ$,

$$\therefore FG = DG = AE = x,$$

$$\therefore EG = AD = 6,$$

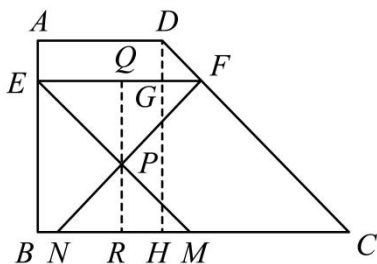
$$\therefore EF = x + 6,$$

$$\therefore PE = PF, EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle PFE = \angle PEF = \angle PMN = \angle PNM,$$

$$\therefore PM = PN,$$

过点 P 作 $QR \perp EF$, QR 与 EF 、 MN 分别相交于 Q 、 R , 如图所示



$$\therefore \angle MPN = \angle EPF = 90^\circ, QR \perp MN,$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2}(x + 6), PR = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2}y,$$

$$\therefore QR = BE = 8 - x,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(x + 6) + \frac{1}{2}y = 8 - x,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = -3x + 10. \text{ 定义域为 } 1 \leq x < \frac{10}{3}.$$

【小问 3 详解】

解: 当点 P 在梯形 $ABCD$ 内部时, 由 $MN = 2$ 及 (2) 的结论得 $2 = -3x + 10$, $AE = x = \frac{8}{3}$,

$$\therefore S_{\text{梯形}AEFD} = \frac{1}{2} (AD + EF) \cdot AE = \frac{1}{2} \left(6 + 6 + \frac{8}{3} \right) \times \frac{8}{3} = \frac{176}{9},$$

当点 P 在梯形 $ABCD$ 外部时, 由 $MN = 2$ 及与 (2) 相同的方法得: $\frac{1}{2}(x + 6) - \frac{1}{2} \times 2 = 8 - x$, $AE = x = 4$,

$$\therefore S_{\text{梯形}AEFD} = \frac{1}{2} (AD + EF) \cdot AE = \frac{1}{2} (6 + 6 + 4) \times 4 = 32.$$

【点睛】 本题考查梯形及有实际问题列一次函数关系式的知识, 综合性较强, 对于此类题目, 要学会由小及大, 将所求的问题缩小, 一步一步求解.