

2024 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初二数学试卷

(时间 90 分钟 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 一次函数 $y = -3x - 1$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】画出一一次函数 $y = -3x - 1$ 的大致图像进行判断即可.

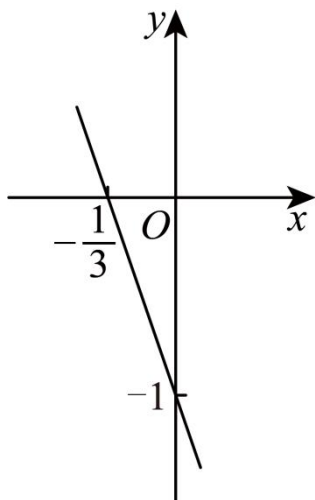
【详解】解: $\because y = -3x - 1$

当 $x = 0, y = -1,$

当 $y = 0, -3x - 1 = 0,$

$$\therefore x = -\frac{1}{3},$$

画出函数图像如下:



所以函数不经过第一象限,

故选 A.

【点睛】 本题考查的是一次函数的图像与性质, 掌握一次函数的图像与性质是解题的关键.

2. 下列事件中, 是确定事件的是()

A. 抛掷一枚质地均匀的硬币, 落地后反面朝上

B. 直线 $y = 2x + 1$ 与直线 $y = 2x$ 有公共点

C. 经过有交通信号灯的路口, 遇到黄灯

D. 射击运动员射击一次, 命中 9 环

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查事件的分类, 确定事件包括必然事件和不可能事件. 需逐一分析各选项是否必然发生或必然不发生.

【详解】 A. 抛硬币可能出现正面或反面, 是随机事件, 不是确定事件.

B. 直线 $y = 2x + 1$ 与 $y = 2x$ 的斜率均为 2, 平行且不重合, 因此无公共点, 属于不可能事件, 是确定事件.

C. 遇到黄灯可能发生也可能不发生, 是随机事件.

D. 命中 9 环的结果不确定, 是随机事件.

综上, 只有选项 B 是确定事件.

故选: B.

3. 下列方程中, 有实数根的是 ()

A. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

B. $x^2 - x + 1 = 0$

C. $\sqrt{x} + 1 = 0$

D. $x^2 + 2x + 1 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根的判别式, 分式方程, 二次根式; 逐一分析各选项方程是否有实数根, 结合分式方程、二次方程判别式及算术平方根的非负性进行判断.

【详解】 解: 选项 A: $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

两边同乘 $(x-1)$ 得 $1 = x$, 解得 $x = 1$.

但 $x=1$ 使分母为零，舍去，故无解。选项错误；

选项 B: $x^2 - x + 1 = 0$

判别式 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ，方程无实数根。选项错误；

选项 C: $\sqrt{x} + 1 = 0$

算术平方根 $\sqrt{x} \geq 0$ ，故 $\sqrt{x} + 1 \geq 1$ ，不可能等于 0，无解。选项错误；

选项 D: $x^2 + 2x + 1 = 0$

判别式 $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$ ，方程有唯一实数根 $x = -1$ 。选项正确；

综上，只有选项 D 有实数根。

故选：D。

4. 下列命题中，是假命题的是 ()

A. 若 $\vec{a} = \vec{0}$ ，则 $|\vec{a}| = 0$

B. 若 $|\vec{a}| = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$

C. 若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

D. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了向量基本概念，真假命题的判断，根据向量的性质对每一项分别进行分析，即可得出答案，掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】解：A、若 $\vec{a} = \vec{0}$ ，则 $|\vec{a}| = 0$ ，零向量的模为 0，命题为真命题，不符合题意；

B、若 $|\vec{a}| = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ ，模为 0 的向量必为零向量，命题为真命题，不符合题意；

C、若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，相等向量的模必相等，命题为真命题，不符合题意；

D、若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ，模相等仅说明长度相同，方向可能不同（如相反向量），故 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不一定相等，命题为假命题，符合题意；

故选：D。

5. 下列命题中，不正确的是 ()

A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形

B. 对角线相等的平行四边形是矩形；

C. 对角线相等的矩形是正方形

D. 对角线相等的菱形是正方形.

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查矩形的判定，菱形的判定，正方形的判定，掌握知识点是解题的关键.

根据特殊四边形的判定方法逐一分析选项的正误.

【详解】解：A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形. 平行四边形的对角线互相平分，若对角线还互相垂直，则符合菱形的判定定理，故 A 正确.

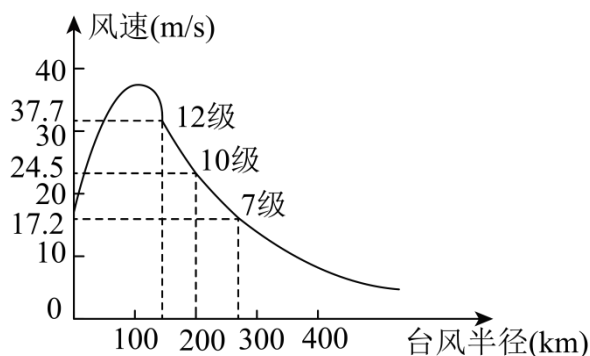
B. 对角线相等的平行四边形是矩形. 平行四边形的对角线相等时，四个角均为直角，符合矩形的定义，故 B 正确.

C. 对角线相等的矩形是正方形. 矩形的对角线本身相等，但正方形还需满足邻边相等或对角线垂直. 仅对角线相等无法直接判定为正方形，故 C 错误.

D. 对角线相等的菱形是正方形. 菱形的对角线互相垂直，若再满足相等，则符合正方形的对角线特性（相等且垂直），故 D 正确.

故选 C.

6. 台风影响着人们的生产和生活. 从函数角度研究地面风速随着离台风中心距离（即台风半径）变化而变化的规律，以台风半径 x (km) 为横轴，风速 y (m/s) 为纵轴的坐标系中画出了如图所示的函数图像，并在图中标注了该台风的 12 级、10 级和 7 级风圈半径. 例如当离台风中心的距离约为 150km 时，地面风速衰减至 37.7m/s，此时 150km 为 12 级风圈半径. 那么以下关于这场台风的说法中，正确的是（ ）



A. 越靠近台风中心位置，风速越大

B. 距台风中心 150km 处，风速达到最大值

C. 10 级风圈半径约为 280 km

D. 在某个台风半径达到最大风速之后，随台风半径的增大，风速又逐渐衰减.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了函数图象的实际应用，解题的关键是准确理解函数图象所反映的风速与台风半径的关系.

根据函数图象，分析每个选项中风速与台风半径的关系是否正确即可.

【详解】解：A、根据所给直角坐标系，不能判断越靠近台风中心位置，风速越大，选项说法错误，不符合题意；

B、距台风中心150km处，风速没有达到最大值，选项说法错误，不符合题意；

C、10级风圈半径不是280 km，选项说法错误，不符合题意；

D、在某个台风半径达到最大风速之后，随台风半径的增大，风速又逐渐衰减，选项说法正确，符合题意；
故选：D.

二、填空题（本大题共12题，每题2分，满分24分）

7. 方程 $x^3 - 1 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】本题考查了立方根，根据立方根的定义求解即可.

【详解】解： $\because x^3 - 1 = 0$,

$$\therefore x^3 = 1,$$

$$\therefore x = 1,$$

故答案为： $x = 1$.

8. 方程 $\sqrt{x+12} = x$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】把方程两边平方去根号得一元二次方程，解得后将解代入方程检验.

【详解】解：两边同时平方可得： $x+12 = x^2$

可解得： $x = 4$ 或 $x = -3$ ；

经检验 $x = -3$ 不符，

故答案为： $x = 4$.

【点睛】本题考查解一元二次方程，需要注意对解进行检验.

9. 用换元法解关于 x 的方程 $\frac{x^2-2}{x} = 3 + \frac{4x}{x^2-2}$ ，如果设 $\frac{x^2-2}{x} = m$ ，那么原方程可化为关于 m 的整式方

程为_____.

【答案】 $m^2 - 3m - 4 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解分式方程，掌握换元法的计算是关键.

根据换元法计算即可.

【详解】 解： 设 $\frac{x^2-2}{x} = m$ ， 则 $\frac{x}{x^2-2} = \frac{1}{m}$ ，

$\therefore$ 原分式方程变形得， $m = 3 + \frac{4}{m}$ ，

$\therefore$ 化为整式方程为： $m^2 - 3m - 4 = 0$ ，

故答案为： $m^2 - 3m - 4 = 0$.

10. 已知直线 $y = kx + b$ ($k > 0$) 经过点 $(-2, 0)$ ， 那么不等式 $kx + b > 0$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -2$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的增减性，利用一次函数求不等式的解集，解题关键是理解一次函数的增减性.

先判断一次函数的增减性，再根据一次函数经过的点，确定不等式的解集.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = kx + b$ ($k > 0$)，

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大，

$\because$ 直线 $y = kx + b$ ($k > 0$) 经过点 $(-2, 0)$ ，

$\therefore$ 不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $x > -2$.

故答案为： $x > -2$.

11. 如果从多边形的一个顶点出发的对角线有 4 条， 那么这个多边形的内角和为_____.

【答案】 900° 或 900 度

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和公式，多边形的对角线的公式，求出多边形的边数是解题的关键.

根据从多边形的一个顶点可以作对角线的条数公式 $(n-3)$ 求出边数，然后根据多边形的内角和公式

$(n-2) \cdot 180^\circ$ 列式进行计算即可得解.

【详解】设多边形边数为 n ,

$\because$ 多边形从一个顶点出发可引出 4 条对角线,

$$\therefore n-3=4,$$

解得: $n=7$,

$$\therefore \text{内角和} = (7-2) \times 180^\circ = 900^\circ.$$

故答案为: 900.

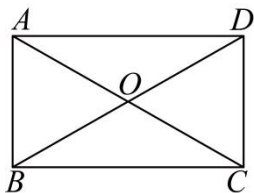
12. 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 已知 $\angle AOB = 60^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, 那么 BD 的长是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】首先根据矩形的性质得到 $OA = OC = OB = OD$, $\angle ADC = 90^\circ$, 然后求出 $\angle OAD = \angle ODA = 30^\circ$, 得到 $AC = 2CD$, 然后根据勾股定理求出 $CD = 1$, 进而求解即可.

【详解】如图所示,



$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O ,

$$\therefore OA = OC = OB = OD, \quad \angle ADC = 90^\circ$$

$$\because \angle AOB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 30^\circ$$

$$\therefore AC = 2CD,$$

$$\because \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2, \text{ 即 } (\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2$$

$$\therefore CD = 1$$

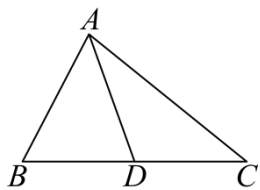
$$\therefore AC = 2$$

$$\therefore BD = AC = 2.$$

故答案为: 2.

【点睛】此题考查了矩形的性质, 等边对等角, 勾股定理, 含 30° 角直角三角形的性质, 解题的关键是掌握以上知识点.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 的中点, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 为_____.

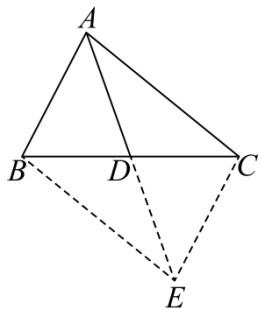


【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量，平行四边形的判定和性质，三角形法则等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造平行四边形解决问题，属于中考常考题型．如图，延长 AD 到 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE ， CE ．证明四边形 $ABEC$ 是平行四边形，利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AE}$ 即可解决问题．

【详解】 解：如图，延长 AD 到 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE ， CE ．



$$\because AD = DE, \quad BD = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形，

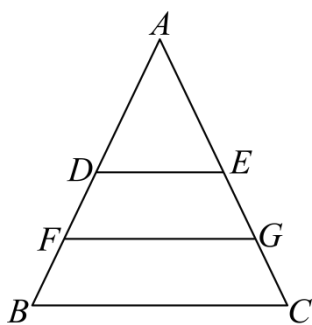
$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ．

14. 如图，在 ABC 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点， F 、 G 分别是 DB 、 EC 的中点，如果 $DE = 4$ ，那么 $FG =$ _____．



【答案】6

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形中位线定理，梯形中位线定理，根据三角形中位线定理可得 $BC = 2DE = 8$ ， $DE \parallel BC$ ，则四边形 $BCED$ 是梯形，根据梯形中位线定理可得 $2FG = DE + BC = 12$ ，据此可得答案.

【详解】解： $\because$ 在 ABC 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点，
 $\therefore DE$ 是 ABC 的中位线，
 $\therefore BC = 2DE = 8$ ， $DE \parallel BC$ ，
 $\therefore$ 四边形 $BCED$ 是梯形，
 $\because F$ 、 G 分别是 DB 、 EC 的中点，
 $\therefore FG$ 是梯形 $BCED$ 的中位线，
 $\therefore 2FG = DE + BC = 12$ ，
 $\therefore FG = 6$ ，

故答案为：6.

15. 晚上在清洗三只除颜色外完全相同的有盖茶杯时，忽然停电，爸爸摸黑将三个杯盖随机盖在三个茶杯上，运用枚举法可以求出三只茶杯和杯盖搭配完全正确的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 此题考查概率公式，解题关键在于掌握运算法则.
 根据题意，得出共 6 种情况，结合概率的计算公式可得答案.

【详解】 根据题意，三个只有颜色不同的有盖茶杯，
 设三个盖子分别为 A ， B ， C ，三个茶杯分别为 A_1 ， B_1 ， C_1
 $\therefore$ 所有可能的情况有：① AA_1 ， BB_1 ， CC_1 ；② AA_1 ， BC_1 ， CB_1 ；③ AB_1 ， BA_1 ， CC_1 ；④ AB_1 ， BC_1 ， CA_1 ；⑤ AC_1 ， BA_1 ， CB_1 ；⑥ AC_1 ， BB_1 ， CA_1 ；

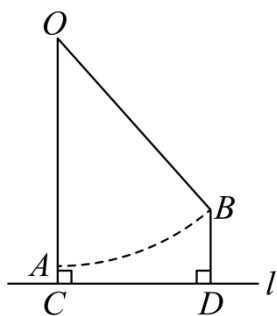
∴将茶杯和杯盖随机搭配在一起，共 6 种情况，而三个茶杯颜色全部搭配正确的有 1 种；

∴三个茶杯颜色全部搭配正确的概率为 $\frac{1}{6}$.

故答案为: $\frac{1}{6}$.

16. 我国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：平地秋千未起，踏板离地一尺．送行二步与人齐，五尺人高曾记．良工高士素好奇，算出索长有几？（1 步=5 尺）

这段话的意思是：秋千静止时，踏板离地面 1 尺高；将秋千的踏板向前推动 2 步 10 尺时，踏板就和推秋千的人一样高，同为 5 尺．小明根据上述信息画出了如图所示的示意图，则可求秋千的绳索长为_____尺．



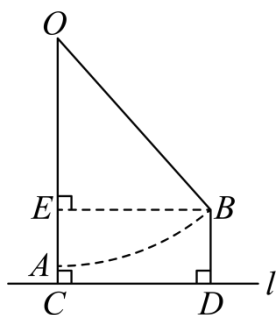
【答案】 14.5

【解析】

【分析】此题考查了勾股定理的应用，矩形的性质，如图，过点 B 作 $BE \perp OA$ 于点 E ，可得四边形 $ECDB$ 是矩形，得到 $EB = CD = 10$ 尺， $EC = BD = 5$ 尺，设秋千的绳索长为 x 尺，则 $OA = OB = x$ ，

$OE = OA + AC - EC = x - 4$ ，在 $\text{Rt}\triangle OEB$ 中由勾股定理得 $x^2 = (x - 4)^2 + 10^2$ ，解方程即可求解．

【详解】解：如图，过点 B 作 $BE \perp OA$ 于点 E ，则 $\angle BEC = \angle OEB = 90^\circ$ ，



由题意可得， $AC = 1$ 尺， $BD = 5$ 尺， $CD = 10$ 尺，

∵ $EC \perp l$ ， $BD \perp l$ ，

∴ $\angle ECD = \angle CDB = 90^\circ$ ，

∴ 四边形 $ECDB$ 是矩形，

∴ $EB = CD = 10$ 尺， $EC = BD = 5$ 尺，

设秋千的绳索长为 x 尺，则 $OA = OB = x$ ， $OE = OA + AC - EC = x + 1 - 5 = x - 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OEB$ 中, $OB^2 = OE^2 + EB^2$,

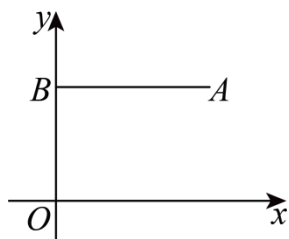
$$\therefore x^2 = (x-4)^2 + 10^2,$$

解得 $x = 14.5$,

答: 秋千的绳索长为 14.5 尺.

故答案为: 14.5.

17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(4,3)$, $AB \perp y$ 轴于点 B . 以 AB 为边作菱形 $ABCD$, 若点 C 在 x 轴上, 则点 D 的坐标为_____.



【答案】 $(4+\sqrt{7}, 0)$ 或 $(4-\sqrt{7}, 0)$

【解析】

【分析】 本题考查坐标与图形, 菱形的性质, 勾股定理, 分两种情况: ①点 C 在原点的右侧; ②点 C 在原点的左侧, 并结合平移的性质即可得解. 解题的关键是掌握菱形的性质及勾股定理.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(4,3)$, $AB \perp y$ 轴,

$$\therefore B(0,3),$$

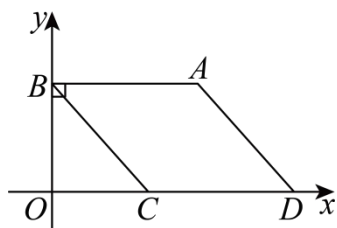
$$\therefore AB = 4, \quad OB = 3,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore BC = AB = 4, \quad BA \parallel CD, \quad BA = CD,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OBC \text{ 中, } OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

①点 C 在原点的右侧, 如图,



$$\therefore OC = \sqrt{7}, \text{ 点 } C \text{ 在 } x \text{ 轴上,}$$

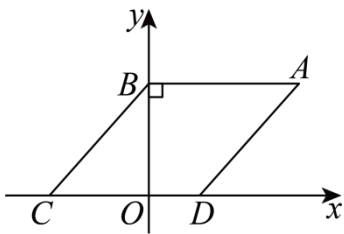
$$\therefore C(\sqrt{7}, 0),$$

$$\because BA \parallel CD, BA = CD, A(4, 3), B(0, 3),$$

则线段 BA 向下平移 3 个单位再向右平移 $\sqrt{7}$ 个单位与线段 CD 重合, 其中点 C 是点 B 的对应点, 点 D 是点 A 的对应点,

$$\therefore D(4 + \sqrt{7}, 0);$$

②点 C 在原点的左侧, 如图,



$$\because OC = \sqrt{7}, \text{ 点 } C \text{ 在 } x \text{ 轴上,}$$

$$\therefore C(-\sqrt{7}, 0),$$

$$\because BA \parallel CD, BA = CD, A(4, 3), B(0, 3),$$

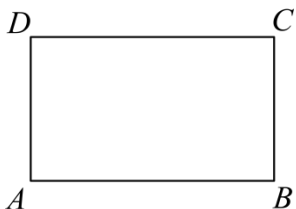
则线段 BA 向下平移 3 个单位再向左平移 $\sqrt{7}$ 个单位与线段 CD 重合, 其中点 C 是点 B 的对应点, 点 D 是点 A 的对应点,

$$\therefore D(4 - \sqrt{7}, 0);$$

综上所述, 点 D 的坐标为 $(4 + \sqrt{7}, 0)$ 或 $(4 - \sqrt{7}, 0)$.

故答案为: $(4 + \sqrt{7}, 0)$ 或 $(4 - \sqrt{7}, 0)$.

18. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $AD = 3$, E 是射线 DC 上一点, 将矩形沿着直线 AE 翻折, 点 D 的对应点 F 恰好和点 B 、 E 在一条直线上, 则 DE 的长为_____.



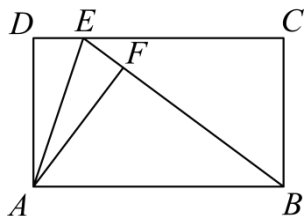
【答案】 1 或 9

【解析】

【分析】 本题考查了矩形与折叠, 勾股定理等知识, 利用分类讨论的思想是解题的关键. 分 E 在线段 CD 上

和线段 DC 的延长上讨论，先根据折叠的性质和勾股定理求得 BF ，然后在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中，根据勾股定理得到 $CE^2 + BC^2 = BE^2$ ，结合 $DE = FE$ ，求解即可。

【详解】解： $\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $AD = 3$ ，
 $\therefore \angle A = \angle D = \angle C = \angle B = 90^\circ$ ， $BC = AD = 3$ ， $CD = AB = 5$ ，
 当 E 在线段 CD 上，如图，

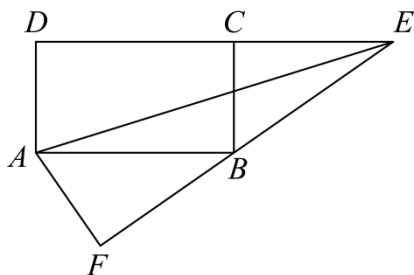


$\therefore$ 将矩形沿着直线 AE 翻折，点 D 的对应点 F 恰好和点 B 、 E 在一条直线上，
 $\therefore AF = AD = 3$ ， $\angle AFE = \angle D = 90^\circ$ ， $DE = FE$ ，
 $\therefore \angle AFB = 90^\circ$ ，
 $\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中， $CE^2 + BC^2 = BE^2$ ，
 $\therefore (5 - DE)^2 + 3^2 = (4 + DE)^2$ ，

解得 $DE = 1$ ；

当 E 在线段 DC 的延长上，如图，



$\therefore$ 将矩形沿着直线 AE 翻折，点 D 的对应点 F 恰好和点 B 、 E 在一条直线上，
 $\therefore AF = AD = 3$ ， $\angle AFE = \angle D = 90^\circ$ ， $DE = FE$ ，
 $\therefore \angle AFB = 90^\circ$ ，
 $\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中， $CE^2 + BC^2 = BE^2$ ，
 $\therefore (DE - 5)^2 + 3^2 = (DE - 4)^2$ ，

解得 $DE = 9$;

综上, DE 的长为 1 或 9,

故答案为: 1 或 9.

三、(本大题共 7 题, 第 19-20 题每题 7 分; 第 21 题 8 分; 第 22 题 9 分; 第 23 题 10 分; 第 24 题 11 分; 第 25 题 12 分; 满分 64 分)

19. 解方程: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$.

【答案】 $x = -4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程和解一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤.

先去分母, 将分式方程化为整式方程, 再用因式分解法求解, 最后进行检验即可.

【详解】 解: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 1$,

$$2x^2 - 8 = x^2 - 2x,$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$(x-2)(x+4) = 0,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -4,$$

检验: 当 $x = 2$ 时, $x(x-2) = 0$; 当 $x = -4$ 时, $x(x-2) \neq 0$;

$\therefore x = -4$ 是原分式方程的解.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 16 \text{ ①} \\ x^2 + 3xy = 0 \text{ ②} \end{cases}.$$

【答案】 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 12 \\ y = -4 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}, \begin{cases} x = -12 \\ y = 4 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元一次方程组和解高次方程组, 能把高次方程组转化成二元一次方程组是解此题的关键.

先把原方程组的每个方程化简, 这样原方程组转化成四个方程组, 求出每个方程组的解即可.

【详解】
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 16 \text{ ①} \\ x^2 + 3xy = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得: $(x+2y)^2 = 16$

$x+2y = \pm 4$

由②得: $x(x+3y) = 0$

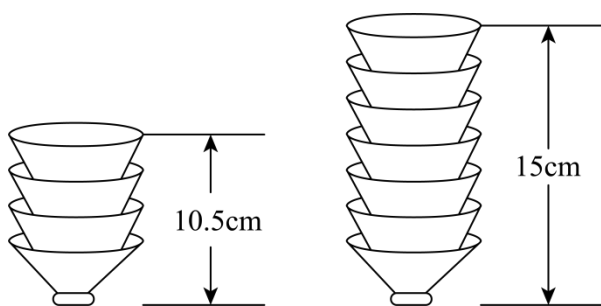
$x = 0$ 或, $x+3y = 0$

即原方程组化为: $\begin{cases} x+2y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y = 4 \\ x+3y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y = -4 \\ x = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y = -4 \\ x+3y = 0 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 12 \\ y = -4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -12 \\ y = 4 \end{cases}$,

所以原方程组的解为: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 12 \\ y = -4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -12 \\ y = 4 \end{cases}$.

21. 如图, 两摞相同规格的饭碗整齐地叠放在桌面上, 请根据图中给的数据信息, 解答下列问题:



- (1) 像这样规格的饭碗整齐地叠放在桌面上时, 求一摞饭碗的高度 y (cm) 与饭碗数 x (个) 之间的函数解析式;
- (2) 把图中这两摞饭碗整齐地摆成一摞时, 这摞饭碗的高度是多少 cm?
- (3) 如果一摞饭碗的高度超过 25cm 时容易发生侧翻, 请问一摞最多能放多少个碗?

【答案】 (1) $y = 1.5x + 4.5$

(2) 21cm

(3) 13 个

【解析】

【分析】 本题意在考查学生利用待定系数法求解一次函数关系式, 并利用关系式求值的运算技能和从情景中提取信息、解释信息、解决问题的能力.

(1) 利用待定系数法解答, 即可求解;

(2) 把 $x = 4 + 7 = 11$ 代入 (1) 中解析式, 即可求解;

(3) 把 $y = 25$ 代入 (1) 中解析式, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设函数解析式为 $y = kx + b$,

根据题意得: 当 $x = 4$ 时, $y = 10.5$; 当 $x = 7$ 时, $y = 15$,

$$\therefore \begin{cases} 10.5 = 4k + b \\ 15 = 7k + b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = 1.5 \\ b = 4.5 \end{cases},$$

$\therefore$ 该函数解析式为 $y = 1.5x + 4.5$;

【小问 2 详解】

解: 当 $x = 4 + 7 = 11$ 时, $y = 1.5 \times 11 + 4.5 = 21$,

即这两摞饭碗整齐地摆成一摞时, 这摞饭碗的高度是 21cm;

【小问 3 详解】

解: 当 $y = 25$ 时, $1.5x + 4.5 = 25$,

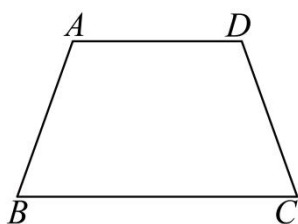
$$\text{解得: } x = 13\frac{2}{3},$$

$\therefore x$ 为正整数,

$\therefore x$ 取 13,

$\therefore$ 一摞最多能放 13 个碗.

22. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD = CD$, $\angle B = \angle C$.



(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形;

(2) 当 $BD \perp DC$ 时, 求 $\angle B$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) 60°

【解析】

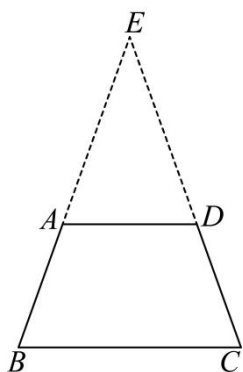
【分析】(1) 延长 BA , CD 交于点 E , 求出 $EA = ED$, 然后根据等边对等角得到 $\angle EAD = \angle EDA$, 进而求出 $AD \parallel BC$, 然后结合 $AB = CD$ 求解即可;

(2) 如图所示, 连接 BD , 利用等边对等角和平行线得到 $\angle CBD = \angle ABD$, 求出

$\angle C = \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 2\angle CBD$ ，然后结合 $BD \perp DC$ 求出 $\angle CBD = 30^\circ$ ，进而求解即可.

【小问 1 详解】

如图所示，延长 BA ， CD 交于点 E



$$\because \angle B = \angle C$$

$$\therefore BE = CE$$

$$\because AB = CD$$

$$\therefore EA = ED$$

$$\therefore \angle EAD = \angle EDA$$

$$\because \angle E + \angle EAD + \angle EDA = 180^\circ, \quad \angle E + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\therefore \angle EAD = \angle B$$

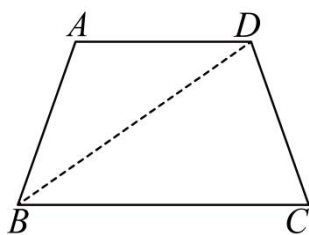
$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\text{又} \because AB = CD, \quad AD \neq BC$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形；

【小问 2 详解】

如图所示，连接 BD



$$\because AB = AD$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB$$

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ADB$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ABD$$

$$\therefore \angle C = \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 2\angle CBD$$

$$\because BD \perp DC$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ$$

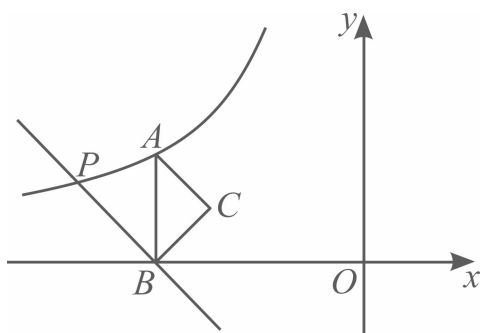
$$\therefore \angle CBD + \angle C = 90^\circ, \text{ 即 } \angle CBD + 2\angle CBD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CBD = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle CBD = 60^\circ.$$

【点睛】此题考查了等腰梯形的判定，等边对等角，平行线的性质等知识，解题的关键是掌握以上知识点.

23. 在平面直角坐标系中，如图所示，已知点A在反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$ ($x < 0$) 的图像上. 过A作 $AB \perp x$ 轴，垂足为点B. 在AB的右侧，以AB为斜边作等腰直角三角形ABC，再过点B作 $BP \parallel AC$ 交反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$ ($x < 0$) 的图像于点P.



(1) 当点A的横坐标为-4时，求点C的坐标和直线BP的表达式；

(2) 当四边形ACBP是正方形时，求点A的坐标.

【答案】(1) 点C的坐标为 $(-3, 1)$ ，直线BP: $y = -x - 4$

(2) $A(-2, 4)$

【解析】

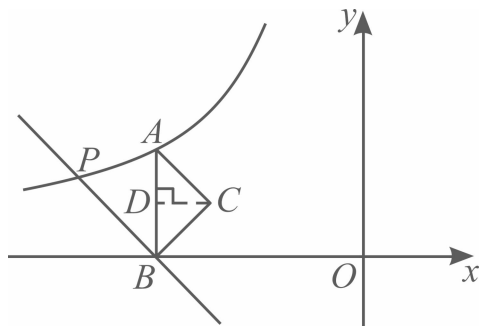
【分析】(1) 如图所示，过点C作 $CD \perp AB$ 于点D，首先求出 $A(-4, 2)$ ，得到 $AB = 2$ ， $B(-4, 0)$ ，然后根据等腰直角三角形的性质得到 $CD = AD = BD = \frac{1}{2}AB = 1$ ，即可求出点C的坐标为 $(-3, 1)$ ；然后利用待定系数法求解即可；

(2) 首先画出图形，设 $A\left(a, -\frac{8}{a}\right)$ ，根据题意得到 $\triangle ABP$ 是等腰直角三角形，点P和点C关于AB对称，

表示出 $P\left(a+\frac{4}{a}, -\frac{4}{a}\right)$, 然后代入 $y = -\frac{8}{x}$ 求解即可.

【小问 1 详解】

如图所示, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D



$$\because \text{当点 } A \text{ 的横坐标为 } -4 \text{ 时, } y = -\frac{8}{x} = -\frac{8}{-4} = 2$$

$$\therefore A(-4, 2)$$

$$\therefore AB = 2, \quad B(-4, 0)$$

$\because$ 以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABC ,

$$\therefore CD = AD = BD = \frac{1}{2} AB = 1$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的横坐标为 } -4 + 1 = -3$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (-3, 1);$$

设 AC 所占直线表达式为 $y = kx + b$

$$\because A(-4, 2), \quad C(-3, 1)$$

$$\therefore \begin{cases} -4k + b = 2 \\ -3k + b = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore y = -x - 2$$

$$\because BP \parallel AC$$

$$\therefore \text{设直线 } BP \text{ 的表达式为 } y = -x + b_1$$

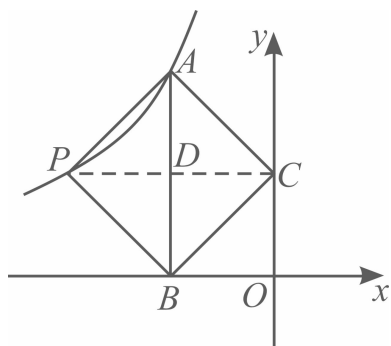
$$\text{将 } B(-4, 0) \text{ 代入得, } 0 = 4 + b_1$$

解得 $b_1 = -4$

$\therefore$ 直线 BP 的表达式为 $y = -x - 4$;

【小问 2 详解】

如图所示，当四边形 $ACBP$ 是正方形时，



设 $A\left(a, -\frac{8}{a}\right)$

$\because$ 以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABC ,

$$\therefore CD = AD = BD = \frac{1}{2} AB = -\frac{8}{a}$$

$\because$ 四边形 $ACBP$ 是正方形

$\therefore \triangle ABP$ 是等腰直角三角形

$\therefore AB \perp x$ 轴

$\therefore$ 点 P 和点 C 关于 AB 对称

$$\therefore P\left(a + \frac{4}{a}, -\frac{4}{a}\right)$$

$\because$ 点 P 在反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$ ($x < 0$) 的图像上

$$\therefore -\frac{4}{a} = \frac{8}{a + \frac{4}{a}}$$

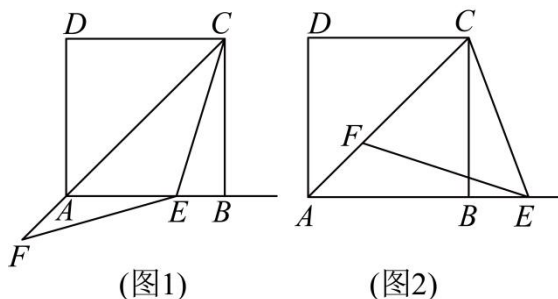
解得 $a = -2$ 或 $a = 2$ (舍去)

$$\therefore A(-2, 4).$$

【点睛】 本题考查反比例函数图象上点的坐标特征、反比例函数和一次函数交点问题、等腰直角三角形的性质，正方形的性质，熟练掌握反比例函数上的点符合反比例函数的关系式是关键.

24. 已知，如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 E 为射线 AB 上一个动点，连接 CE ，以点 E 为圆心， CE

为半径画弧与直线 CA 交于点 F ，连接 EF ，且规定 $0^\circ < \angle BCE < 45^\circ$ 。



- (1) 如图 1，当点 E 在边 AB 上时，求证： $\angle BCE = \angle AEF$ ；
- (2) 如图 2，当点 E 在边 AB 的延长线上时，求解下列问题：
- ① 设 BE 的长为 x ， AF 的长为 y ，试求 y 关于 x 的函数解析式及 x 的取值范围；
- ② 当 $\angle BEC = 3\angle BCE$ 时，求 BE 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) ① $y = \sqrt{2}x (0 < x < 6)$ ；② $BE = 6\sqrt{2} - 6$

【解析】

【分析】 (1) 根据正方形的性质及三角形的外角的性质即可求解；

(2) ① 如图所示，过点 E 作 $EG \perp AC$ 于点 G ，勾股定理求出 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 6\sqrt{2}$ ，然后得到 $\triangle AGE$ 是等腰直角三角形，求出 AG ， FG ，证明出 $CF = 2FG$ 得到 $6\sqrt{2} - y = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 3\sqrt{2} - y\right)$ ，进而求解即可；然后由 $0^\circ < \angle BCE < 45^\circ$ 即可得到 x 的取值范围；

② 由 $\angle BEC = 3\angle BCE$ 求出 $\angle BCE = 22.5^\circ$ ，然后证明出 $\angle ACE = \angle AEC$ ，得到 $AC = AE = 6\sqrt{2}$ ，进而求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 正方形 $ABCD$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle BCA = 45^\circ$ 。

$\because CE = EF$ ，

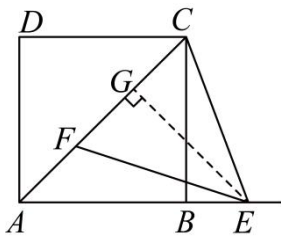
$\therefore \angle AFE = \angle ACE$ 。

$\because \angle CAB = \angle AFE + \angle AEF$ ， $\angle BCA = \angle ACE + \angle BCE$ ，

$\therefore \angle AEF = \angle BCE$ 。

【小问 2 详解】

① 如图所示，过点 E 作 $EG \perp AC$ 于点 G



$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 6

$$\therefore AB = BC = 6$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 6\sqrt{2}$$

$\because$ 设 BE 的长为 x , AF 的长为 y

$$\therefore CF = AC - AF = 6\sqrt{2} - y, \quad AE = AB + BE = x + 6$$

$$\because EG \perp AC, \quad \angle BAC = 45^\circ$$

$\therefore \triangle AGE$ 是等腰直角三角形

$$\therefore AG = EG = \frac{\sqrt{2}}{2} AE = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + 6) = \frac{\sqrt{2}}{2} x + 3\sqrt{2}$$

$$\therefore FG = AG - AF = \frac{\sqrt{2}}{2} x + 3\sqrt{2} - y$$

$$\because CE = EF, \quad EG \perp AC$$

$$\therefore CG = FG$$

$$\therefore CF = 2FG$$

$$\therefore 6\sqrt{2} - y = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x + 3\sqrt{2} - y \right)$$

$$\text{整理得, } y = \sqrt{2}x$$

$$\because \text{规定 } 0^\circ < \angle BCE < 45^\circ$$

$$\therefore x > 0$$

当 $\angle BCE = 45^\circ$ 时,

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ$$

$\therefore$ 此时点 F 和点 C 重合,

$$\therefore BC \perp BE$$

$\therefore \triangle BCE$ 是等腰直角三角形

$$\therefore x = BE = BC = 6$$

$\therefore x$ 的取值范围 $0 < x < 6$;

②当 $\angle BEC = 3\angle BCE$ 时

$$\because BC \perp BE, \text{ 即 } \angle CBE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCE + \angle BEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCE + 3\angle BCE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCE = 22.5^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 3\angle BCE = 67.5^\circ, \angle ACE = \angle ACB + \angle BCE = 67.5^\circ$$

$$\therefore \angle ACE = \angle AEC$$

$$\therefore AC = AE = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore BE = AE - AB = 6\sqrt{2} - 6.$$

【点睛】 本题考查正方形的性质，三角形外角的性质，勾股定理，等腰直角三角形的判定及性质，熟练掌握相关性质是解决问题的关键.

25. 综合与探究

新定义：至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫做邻等对补四边形.

请运用研究特殊四边形的经验，对“邻等对补四边形”进行探究.

(1) 概念理解：用分别含有 30° 和 45° 角的直角三角形纸板拼出如图 1 所示的 4 个四边形，其中是邻等对补四边形的有 _____ (填序号).

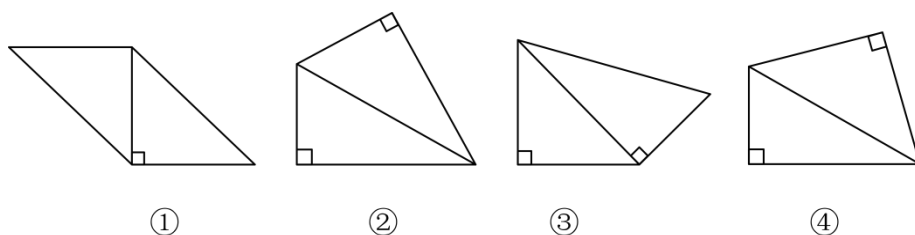


图1

(2) 性质探究:

小明从特殊到一般，围绕邻等对补四边形的对角线展开研究，首先根据图 1②中的特殊情况得到一个结论:

若邻等对补四边形中，两组邻边均相等，则必有一条对角线平分一组对角;

于是他画出了如图 2 的更一般的邻等对补四边形，并从对角线的维度得到了以下猜想:

若邻等对补四边形中，仅有一组邻边相等，则必有一条对角线平分一个内角;

请根据图 2，改写命题，写出已知条件和求证，并进行证明.

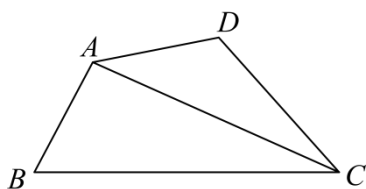


图2

(3) 综合应用:

如图 3, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB < BC$. 分别在边 BC , AC 上取点 E , F , 使四边形 $ABEF$ 是邻等对补四边形.

若 $\angle A = m$, 请画出所有符合条件的图形, 并直接写出或用含 m 的代数式表示 $\angle ABF$.

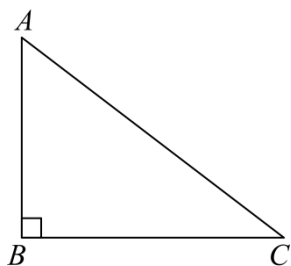


图3

【答案】(1) ②④ (2) 见解析

(3) $\angle ABF = 90^\circ - \frac{1}{2}m$ 或 $\angle ABF = 135^\circ - m$ 或 $\angle ABF = 45^\circ$

【解析】

【分析】(1) 按照“邻等对补四边形”的定义逐个判断即可;

(2) 首先根据题意写出已知条件和求证, 然后作 $AE \perp BC$ 于 E , $AF \perp CD$ 延长线于 F , 证明 $\triangle AEB \cong \triangle AFD$, 再用角平分线的判定证明即可;

(3) 首先得出 $\angle AFE = 90^\circ$, 然后根据至少有一组邻边相等分三种情况讨论, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 图①和图③没有对角互补, 不是邻等对补四边形, 图②和图④对角互补且有一组邻边相等, 是邻等对补四边形,

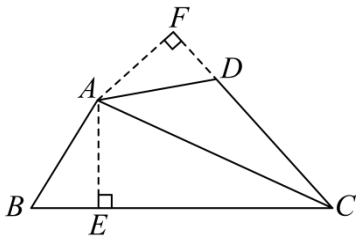
故答案为: ②④;

【小问 2 详解】

已知条件: 四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形, $AB = AD$, AC 是它的一条对角线.

求证: $\angle ACB = \angle ACD$.

证明: 作 $AE \perp BC$ 于 E , $AF \perp CD$ 延长线于 F ,



$$\therefore \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \quad \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF,$$

$$\because AB = AD,$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFD (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = AF,$$

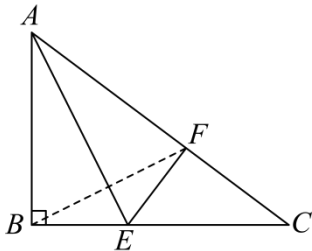
$$\therefore \angle ACB = \angle ACD;$$

【小问 3 详解】

$$\because \text{四边形 } ABEF \text{ 是邻等对补四边形}, \quad \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFE = 90^\circ$$

①如图所示，当 $BE = EF$ 时，连接 BF



$$\because \angle ABE = \angle AFE = 90^\circ, \quad AE = AE, \quad BE = FE$$

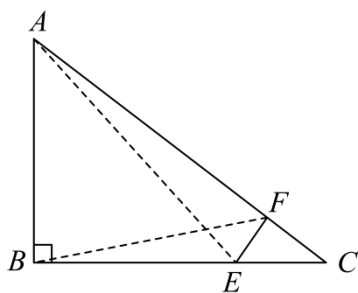
$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle AFE (\text{HL})$$

$$\therefore AB = AF$$

$$\because \angle A = m$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAF) = 90^\circ - \frac{1}{2}m;$$

②如图所示，当 $AB = BE$ 时，连接 BF ， AE



$$\because \angle ABE = 90^\circ$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形

$$\therefore \angle BAE = 45^\circ$$

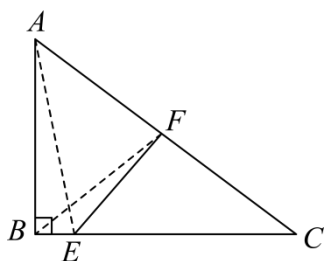
$\because AE$ 不平分 $\angle BAF$ 和 $\angle BEF$, BF 不平分 $\angle ABE$

$\therefore$ 由 (2) 得, BF 平分 $\angle AFE$

$$\therefore \angle AFB = \frac{1}{2} \angle AFE = 45^\circ$$

$$\therefore \angle ABF = 180^\circ - \angle BAF - \angle AFB = 180^\circ - m - 45^\circ = 135^\circ - m;$$

③如图所示, 当 $AF = EF$ 时, 连接 BF , AE



$\because AE$ 不平分 $\angle BAF$ 和 $\angle BEF$, BF 不平分 $\angle AFE$

$\therefore$ 由 (2) 得, BF 平分 $\angle ABE$

$$\therefore \angle ABF = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ.$$

综上所述, $\angle ABF = 90^\circ - \frac{1}{2}m$ 或 $\angle ABF = 135^\circ - m$ 或 $\angle ABF = 45^\circ$.

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的性质和判定, 全等三角形的判定与性质, 直角三角形的性质, 等知识, 明确题意, 理解新定义, 添加合适辅助线, 构造全等三角形是解题的关键.