

## 2024 学年第二学期八年级期终学情调研

### 数学 试卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分) 2025.06

考生注意: 本卷共有 25 题, 请将所有答案写在答题纸上. 写在试卷上一律不计分.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【每题只有一个正确选项, 在答题纸相应位置填涂】

1. 下列函数中, 函数值  $y$  随  $x$  的增大而减小的是 ( )

A.  $y = \frac{3}{x}$

B.  $y = -3x$

C.  $y = 3x + 3$

D.  $y = 3$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数、反比例函数及常数函数的增减性, 根据各函数的系数符号及性质判断即可, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: A、反比例函数  $y = \frac{3}{x}$ ,  $k = 3 > 0$ , 在每一象限内  $y$  随  $x$  增大而减小, 但整体定义域内不单调递减, 故不符合题意;

B、一次函数  $y = -3x$ ,  $k = -3 < 0$ ,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 符合题意;

C、一次函数  $y = 3x + 3$ ,  $k = 3 > 0$ ,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 不符合题意;

D、常数函数  $y = 3$ ,  $y$  值不随  $x$  变化, 不符合题意;

故选: B.

2. 下列方程中, 有实数根的是 ( )

A.  $\frac{2}{x-2} = \frac{x}{2-x}$

B.  $x^2 + x + 2 = 0$

C.  $\sqrt{x^2 + 2} = 1$

D.  $2x^4 + 1 = 0$

【答案】 A

【解析】

【详解】 本题考查了解方程, 根据解分式方程, 一元二次方程, 无理方程逐一排除即可, 掌握解方程的方法及步骤是解题的关键.

解: A、 $\frac{2}{x-2} = \frac{x}{2-x}$

$$\frac{2}{x-2} = -\frac{x}{x-2},$$

$$2 = -x,$$

解得  $x = -2$ ,

经检验,  $x = -2$  是原方程的解, 原选项符合题意,

$$\text{B、} x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0, \text{ 无实数根, 原选项不符合题意,}$$

$$\text{C、} \sqrt{x^2 + 2} = 1,$$

$$x^2 + 2 = 1,$$

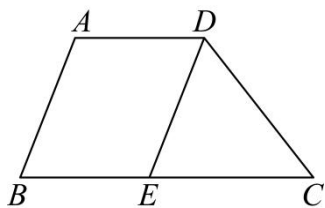
$$x^2 = -1, \text{ 无实数解, 原选项不符合题意,}$$

$$\text{D、} 2x^4 + 1 = 0,$$

$$x^4 = -\frac{1}{2}, \text{ 因 } x^4 \geq 0, \text{ 无实数解, 原选项不符合题意,}$$

故选: A.

3. 如图, 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ , 过点  $D$  作  $DE \parallel AB$  交  $BC$  于点  $E$ , 下列结论不正确的是 ( )



$$\text{A. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC}$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平面向量, 三角形法则, 平行四边形的性质等知识, 根据平行四边形的性质以及三角形法则求解即可, 解题的关键是熟练掌握三角形法则.

【详解】解: A、 $\because AD \parallel BC, DE \parallel AB$ ,

$\therefore$  四边形  $ABED$  是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}, \text{ 原选项正确, 不符合题意;}$$

$$\text{B、} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}, \text{ 原选项正确, 不符合题意;}$$

C、 $\because AD \parallel BC, DE \parallel AB,$

$\therefore$  四边形  $ABED$  是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE},$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC},$  原选项正确, 不符合题意;

D、 $\because AD \parallel BC, DE \parallel AB,$

$\therefore$  四边形  $ABED$  是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE},$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} \neq \overrightarrow{AC},$  原选项错误, 符合题意;

故选: D.

4. 下列事件属于必然事件的是 ( )

A. 蜡烛在没有氧气的瓶中燃烧

B. 任意选取两个非零实数, 它们的积为正

C. 10 只鸟关在 4 个笼子里, 至少有一个笼子关的鸟超过 3 只

D. 从长度为 3cm、4cm、5cm、6cm 的 4 根小木条中, 任取 3 根为边能拼成一个三角形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了事件分类, 根据随机事件, 必然事件, 不可能事件的特点, 逐一判断即可解答熟练掌握随机事件, 必然事件, 不可能事件的特点是解题的关键.

【详解】解: A、蜡烛燃烧需氧气, 无氧情况下无法燃烧, 为不可能事件, 不符合题意;

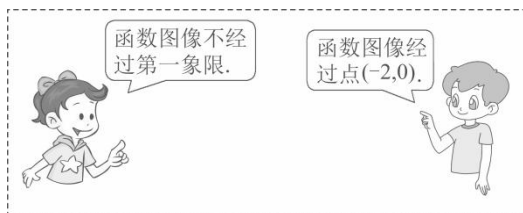
B、两非零实数积的正负由符号决定, 若一正一负, 积为负, 为随机事件, 不符合题意;

C、10 只鸟分到 4 个笼子, 若每笼最多 3 只 (如 3, 3, 3, 1), 则总数量为 10, 未超过单笼容量, 故 “至少一笼超 3 只” 为随机事件, 不符合题意;

D、从 3cm、4cm、5cm、6cm 中任取 3 根, 所有组合均满足三角形三边不等式 (如 3, 4, 5; 3, 4, 6; 3, 5, 6; 4, 5, 6), 均能构成三角形, 故为必然事件, 符合题意;

故选: D.

5. 对于某个一次函数  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ), 根据下面两位同学的对话得出的结论, 正确的是 ( )



A.  $k > 0$

B.  $kb < 0$

C.  $k + b < 0$

D.  $b = -3k$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象及性质，根据一次函数的性质以及一次函数图象上点的坐标特征判断即可，掌握一次函数的图象及性质是解题的关键.

【详解】解：A、 $\because$ 一次函数的图象不经过第一象限，

$\therefore k < 0$ ，原选项错误，不符合题意；

B、 $\because$ 一次函数的图象不经过第一象限，函数图象经过点 $(-2, 0)$ ，

$\therefore$ 图象经过第二、三、四象限，

$\therefore b < 0$ ，

$\therefore k < 0$ ，

$\therefore kb > 0$ ，原选项错误，不符合题意；

C、 $\because$ 函数图象经过点 $(-2, 0)$ ，

$\therefore -2k + b = 0$ ，

$\therefore -2k + b + 3k = 3k$ ，

$\therefore k + b = 3k < 0$ ，原选项正确，符合题意；

D、 $\because$ 函数图象经过点 $(-2, 0)$ ，

$\therefore -2k + b = 0$ ，

$\therefore b = 2k$ ，原选项错误，不符合题意；

故选：C.

6. 在四边形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ ，下列说法错误的是 ( )

A. 如果  $AB = CD$ ， $\angle ABC = \angle BAD$ ，那么四边形  $ABCD$  是矩形

B. 如果  $AB = CD$ ， $AC = BD$ ，那么四边形  $ABCD$  是矩形

C. 如果  $OB = OD$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形  $ABCD$  是菱形

D. 如果  $AD = BC$ ， $\angle ABD = \angle CBD$ ，那么四边形  $ABCD$  是菱形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了矩形的判定，菱形的判定，等腰梯形的判定等知识点，熟练掌握各四边形的判定与性质是解题的关键.

根据矩形的判定，菱形的判定，等腰梯形的判定等知识点逐一分析即可.

【详解】解：A、 $\because AD \parallel BC$ ，若  $AB = CD$ ，

$\therefore$  四边形可能为等腰梯形或平行四边形， $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$

$\because \angle ABC = \angle BAD$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  为矩形，故 A 正确，不符合题意；

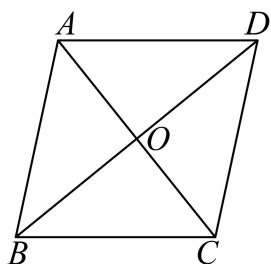
B、 $\because AD \parallel BC$ ，若  $AB = CD$ ，

$\therefore$  四边形可能为等腰梯形或平行四边形，

$\because AC = BD$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  为等腰梯形或矩形，故 B 错误，符合题意；

C、如图，



$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADO = \angle OBC$ ，

$\because OB = OD$ ， $\angle AOD = \angle BOC$ ，

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$  (ASA)，

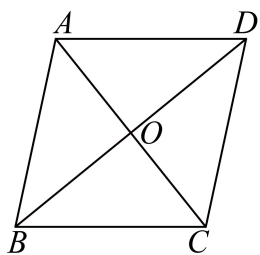
$\therefore AD = BC$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$\because AC \perp BD$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是菱形，故 C 正确，不符合题意；

D、如图：



$\because AD \parallel BC, AD = BC,$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  $\angle ADB = \angle DBC,$

$\because \angle ABD = \angle CBD,$

$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$

$\therefore AB = AD,$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是菱形, 故 D 正确, 不符合题意;

故选: B.

## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每小题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 直线  $y = -x - 1$  的截距是\_\_\_\_\_.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的截距, 根据一次函数的截距即为一次函数图象与  $y$  轴交点的纵坐标即可解答, 也是解题关键.

【详解】 解: 对于  $y = -x - 1$ , 令  $x = 0$ , 得:  $y = -1$ ,

$\therefore$  直线  $y = -x - 1$  的截距是  $-1$ .

故答案为:  $-1$ .

8. 已知函数  $y = -2x + 1$ , 如果函数值  $y > 5$ , 那么  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x < -2$

【解析】

【分析】 根据题意, 先求出当  $y = 5$  时, 自变量的值, 然后根据一次函数的增减性求解即可.

【详解】 解: 当  $y = 5$  时,  $-2x + 1 = 5$

解得:  $x = -2$

$\because$  函数  $y = -2x + 1$ ,  $-2 < 0$

∴  $y$  随  $x$  的增大而减小,

∴ 当  $y > 5$  时,  $x < -2$ ,

故答案为:  $x < -2$ .

9. 一次函数  $y = (k+2)x + k - 2$ , 如果函数值  $y$  随自变量  $x$  的值增大而减小, 那么  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $k < -2$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与系数的关系, 熟练掌握一次函数的相关知识是解题的关键. 根据一次函数的性质分析即可.

【详解】 解:  $y = (k+2)x + k - 2$ , 函数值  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则  $k+2 < 0$ ,

解得:  $k < -2$ .

故答案为:  $k < -2$ .

10. 如果关于  $x$  的方程  $ax = b$  无解, 那么实数  $a$ 、 $b$  满足的条件是\_\_\_\_\_.

【答案】  $a = 0, b \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程无解问题, 掌握方程无解的条件是解题的关键. 根据方程无解, 可得系数为零, 常数不为零, 据此求解即可.

【详解】 解: 当  $a = 0, b \neq 0$  时, 方程的左边  $= 0$ , 方程的右边  $\neq 0$ ,

∴ 关于  $x$  的方程  $ax = b$  无解.

故答案为:  $a = 0, b \neq 0$ .

11. 方程  $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{2x - 2}$  的根是\_\_\_\_\_.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程, 先平方将无理方程转化为整式方程, 求解后, 进行检验即可.

【详解】 解:  $\because \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{2x - 2}$ ,

$$\therefore x^2 - 5 = 2x - 2$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore x = -1 \text{ 或 } 3,$$

检验, 当  $x = -1$  时,  $x^2 - 5 = -4 < 0$ , 二次根式无意义, 舍去;

当  $x=3$  时,  $x^2-5=4>0$ ,  $2x-2=4>0$ , 满足题意;

$\therefore x=3$ .

故答案为: 3.

12. 用换元法解分式方程  $\frac{x^2-1}{3x} - \frac{x}{x^2-1} - 1 = 0$  时, 如果设  $\frac{x^2-1}{3x} = y$ , 将原方程化为关于  $y$  的整式方程, 那么这个整式方程是\_\_\_\_\_.

【答案】  $3y^2 - 3y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解分式方程.

设  $\frac{x^2-1}{3x} = y$ , 则  $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{3y}$ , 方程  $\frac{x^2-1}{3x} - \frac{x}{x^2-1} - 1 = 0$  可变为  $y - \frac{1}{3y} - 1 = 0$ , 两边都乘以  $3y$  即可.

【详解】 解: 设  $\frac{x^2-1}{3x} = y$ , 则  $\frac{3x}{x^2-1} = \frac{1}{y}$ ,

即  $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{3y}$ ,

因此方程  $\frac{x^2-1}{3x} - \frac{x}{x^2-1} - 1 = 0$  可变为  $y - \frac{1}{3y} - 1 = 0$ ,

两边都乘以  $3y$  得:  $3y^2 - 3y - 1 = 0$ ,

故答案为:  $3y^2 - 3y - 1 = 0$ .

13. 计算:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC} =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\overrightarrow{BA}$

【解析】

【分析】 此题考查了向量的线性运算. 先计算  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$  得到  $\overrightarrow{CA}$ , 进一步计算即可求解.

【详解】 解:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{BA}$ .

故答案为:  $\overrightarrow{BA}$ .

14. 已知点  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别为菱形  $ABCD$  四边  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $AD$  的中点, 如果  $AB = 4$ ,  $\angle ADC = 60^\circ$ , 那么四边形  $EFGH$  的面积为\_\_\_\_\_.

【答案】  $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的判定和性质, 菱形的性质, 平行四边形的判定和性质, 三角形中位线定理, 等边三角形的判定和性质, 勾股定理, 熟练掌握各知识点是解题的关键. 连接  $AC$ 、 $BD$  交  $O$ , 根据三角形的中位线定理推出  $EF \parallel AC \parallel HG$ ,  $EH \parallel BD \parallel FG$ , 得出四边形  $EFGH$  是平行四边形, 根据菱形性质推出  $EF \perp EH$ , 证明平行四边形  $EFGH$  是矩形, 根据等边三角形的判定和性质得到  $AC = AD = CD = 4$ , 根据勾股定理得到  $OD = 2\sqrt{3}$ , 即可得到  $EF = 2$ ,  $EH = 2\sqrt{3}$ , 进而根据矩形面积公式计算即可.

【详解】 解: 如图所示, 连接  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ .

$\because$  点  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  分别是菱形  $ABCD$  的边  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $AD$  的中点,

$$\therefore EF \parallel AC, FG \parallel BD, HG \parallel AC, EH \parallel BD, EF = \frac{1}{2}AC, EH = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore EF \parallel HG, EH \parallel FG,$$

$\therefore$  四边形  $EFGH$  是平行四边形,

$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\because EF \parallel AC, EH \parallel BD,$$

$$\therefore EF \perp EH,$$

$$\therefore \angle FEH = 90^\circ,$$

$\therefore$  平行四边形  $EFGH$  是矩形,

$$\because AB = 4, \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore AC = AD = CD = 4,$$

$$\therefore AO = 2,$$

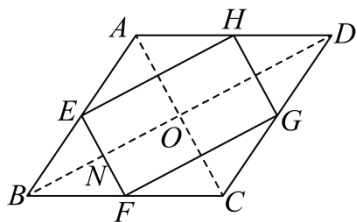
$$\therefore OD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = 2, EH = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$  四边形  $EFGH$  的面积  $= 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ .

故答案为:  $4\sqrt{3}$ .



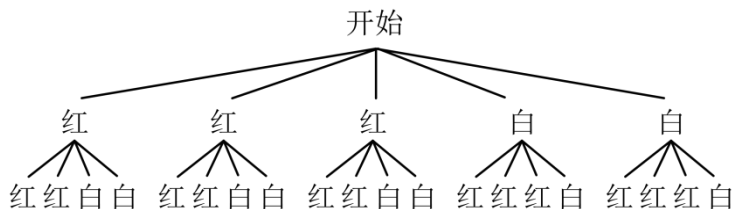
15. 在一个袋子中装有除颜色外其它完全相同的 3 个红球和 2 个白球, 如果从中随机摸出两个球, 那么摸到的两个球颜色相同的概率是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 此题考查了列表法或树状图法求概率. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比. 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与摸到的 2 个球颜色相同的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

【详解】 解: 画树状图得:



$\therefore$  共有 20 种等可能的结果, 摸到的 2 个球颜色相同的有 8 种情况,

$\therefore$  摸到的 2 个球颜色相同的概率为:  $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ .

故答案为  $\frac{2}{5}$ .

16. 一列火车到某站已经晚点 6 分钟, 如果将速度每小时加快 10 千米, 那么继续行驶 20 千米便可以在下一站正点到达. 如果设列车原来行驶的速度为  $x$  千米/时, 那么根据题意, 列出的方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{6}{60}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用. 设货车原来的行驶速度为  $x$  千米每小时, 然后根据将速度每小时加快 10 千米, 那么继续行驶 20 千米便可以在  $B$  站正点到达, 列出方程即可.

【详解】解：设货车原来的行驶速度为  $x$  千米每小时，

由题意得：  $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{6}{60}$ ，

故答案为：  $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{6}{60}$ 。

17. 定义：函数图像上到两坐标轴的距离都不大于  $n$  ( $n \geq 0$ ) 的点叫做这个函数图像的“ $n$ 阶方点”。例

如：点  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  是函数  $y = x$  图像的“ $\frac{1}{3}$ 阶方点”；点  $(-2, -1)$  是函数  $y = \frac{2}{x}$  图像的“2阶方点”。如果  $y$  关

于  $x$  的一次函数  $y = mx - 4m + 1$  图像的“2阶方点”有且只有一个，那么  $m$  的值为\_\_\_\_\_。

【答案】  $\frac{3}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图像和性质，新定义，根据题意得到当  $m > 0$  时， $y = mx - 4m + 1$  经过  $(-2, 2)$  或  $(2, -2)$ ；当  $m < 0$  时， $y = mx - 4m + 1$  经过  $(-2, -2)$  或  $(2, 2)$ ；计算即可。

【详解】解：∵  $y$  关于  $x$  的一次函数  $y = mx - 4m + 1$  图像的“2阶方点”有且只有一个，

∴ 当  $m > 0$  时， $y = mx - 4m + 1$  经过  $(-2, 2)$  或  $(2, -2)$ ，

∴  $-2m - 4m + 1 = 2$  或  $2m - 4m + 1 = -2$ ，

解得：  $m = -\frac{1}{6}$  (舍去) 或  $m = \frac{3}{2}$ ；

当  $m < 0$  时， $y = mx - 4m + 1$  经过  $(-2, -2)$  或  $(2, 2)$ ，

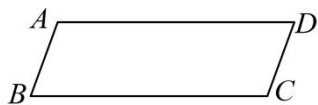
∴  $-2m - 4m + 1 = -2$  或  $2m - 4m + 1 = 2$ ，

解得：  $m = \frac{1}{2}$  (舍去) 或  $m = -\frac{1}{2}$ ；

综上所述， $m$  的值为  $\frac{3}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$ 。

故答案为：  $\frac{3}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$ 。

18. 将平行四边形  $ABCD$  (如图) 绕点  $B$  旋转后，点  $A$  落在边  $BC$  上，点  $D$  的对应点为点  $E$ ，且点  $D$ 、 $C$ 、 $E$  在一直线上。如果  $AB = 2$ ， $AD = 6$ ，那么  $\triangle BCE$  的周长为\_\_\_\_\_。

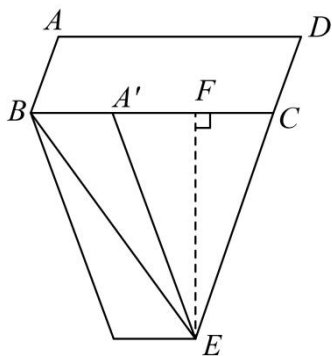


【答案】  $12 + 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质，平行四边形的性质，勾股定理，等腰三角形的性质与判定，证明  $EA' = EC = AD = 6$  是解题的关键；设  $A$  的对应点为  $A'$ ，过点  $E$  作  $EF \perp BC$  于点  $F$ ，先证明  $EA' = EC = AD = 6$ ，进而求得  $FA' = 2, BF = 4$ ，勾股定理求得  $EF, BE$ ，即可求解。

【详解】解：如图，设  $A$  的对应点为  $A'$ ，过点  $E$  作  $EF \perp BC$  于点  $F$ ，



$\because$  旋转，

$$\therefore A'E = AD = 6, \quad \angle BA'E = \angle A,$$

$\because$  点  $D$ 、 $C$ 、 $E$  在一直线上，四边形  $ABCD$  是平行四边形，则  $AB \parallel CD, AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ECF = 180^\circ - \angle BCD = \angle D, \quad \angle A = 180^\circ - \angle D,$$

$$\therefore \angle EA'F = 180^\circ - \angle BA'E = 180^\circ - \angle A,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle D = \angle EA'F,$$

$$\therefore EA' = EC = AD = 6,$$

$$\therefore FA' = FC = \frac{1}{2} A'C = \frac{1}{2} (BC - BA') = \frac{1}{2} (6 - 2) = 2, \quad BF = BA' + A'F = 2 + 2 = 4,$$

$$\text{在 Rt} \triangle EFC \text{ 中, } EF^2 = EC^2 - FC^2 = 6^2 - 2^2 = 32,$$

$$\text{在 Rt} \triangle BEF \text{ 中, } BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 32} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle BCE \text{ 的周长为: } BC + CE + BE = 6 + 6 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3},$$

故答案为:  $12 + 4\sqrt{3}$ 。

### 三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 解方程:  $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{4-x^2} = \frac{x+2}{x-2}$ .

【答案】  $x = -1$

【解析】

【分析】本题考查的知识点是分式方程的解法，解题的关键是熟练掌握分式方程的解法.根据分式方程的解法步骤即可得到答案.

【详解】解：  $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{4-x^2} = \frac{x+2}{x-2}$

去分母的得：  $x-2+4=(x+2)^2$

去括号并合并同类项得：  $x^2+3x+2=0$

解得：  $x_1=-2, x_2=-1$

经检验，当  $x=-2$  时，  $(x+2)(x-2)=0$ ，

当  $x=-1$  时，  $(x+2)(x-2) \neq 0$

$\therefore$  方程的解为：  $x=-1$

20. 解方程组：  $\begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ x^2-4xy-12y^2=0 & \text{②} \end{cases}$

【答案】  $\begin{cases} x=\frac{18}{13} \\ y=\frac{3}{13} \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，由①得，  $y=3-2x$  ③，代入②，解一元二次方程，进而求得  $x, y$  的值，即可求解。

【详解】解：由①得，  $y=3-2x$  ③，

将③代入②得，  $x^2-4x(3-2x)-12(3-2x)^2=0$

即  $39x^2-132x+108=0$

$\therefore (13x-18)(x-2)=0$

解得：  $x_1=\frac{18}{13}, x_2=2$

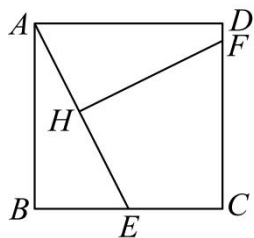
将  $x=\frac{18}{13}$  代入③得，  $y=3-2 \times \frac{18}{13} = \frac{3}{13}$

将  $x=2$  代入③得，  $y=3-2 \times 2 = -1$

$\therefore$  方程组的解为：  $\begin{cases} x=\frac{18}{13} \\ y=\frac{3}{13} \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

21. 如图，在边长为2的正方形  $ABCD$  中，点  $E$  为边  $BC$  的中点，点  $F$  在边  $DC$  上， $FH$  垂直平分线段  $AE$ ，

垂足为点  $H$ ，求  $DF$  的长.



【答案】  $DF$  的长为  $\frac{1}{4}$ .

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，线段垂直平分线的性质，勾股定理，解题的关键是正确作出辅助线. 由正方形的性质，得出线段的长度，根据勾股定理可得线段之间的数量关系，再由线段垂直平分线的性质建立等量关系，即可求得  $DF$  的长.

【详解】 解：  $\because$  在边长为 2 的正方形  $ABCD$  中，点  $E$  为边  $BC$  的中点，

$$\therefore AD = BC = CD = 2, \quad CE = \frac{1}{2}BC = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \quad \angle C = \angle D = 90^\circ,$$

如图，连接  $FA$ ， $FE$ ，设  $DF = x$ ，则  $CF = 2 - x$ ，

$\because FH$  垂直平分线段  $AE$ ，

$$\therefore FA = FE,$$

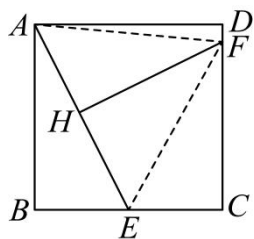
$$\therefore FA^2 = FE^2,$$

$$\therefore 2^2 + x^2 = 1^2 + (2 - x)^2,$$

$$\text{解得, } x = \frac{1}{4}$$

$$\therefore DF = \frac{1}{4}$$

答：  $DF$  的长为  $\frac{1}{4}$ .



22. 某超市购入一批进价为 20 元/盒的绿色食品进行销售，经市场调查发现：销售单价不低于进价时，日销售量  $y$ （盒）与销售单价  $x$ （元）是一次函数关系，下表是  $y$  与  $x$  的几组对应值.

|              |     |    |    |    |    |    |     |
|--------------|-----|----|----|----|----|----|-----|
| 销售单价 $x$ （元） | ... | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | ... |
|--------------|-----|----|----|----|----|----|-----|

|              |     |    |    |    |    |    |     |
|--------------|-----|----|----|----|----|----|-----|
| 日销售量 $y$ (盒) | ... | 56 | 52 | 48 | 44 | 40 | ... |
|--------------|-----|----|----|----|----|----|-----|

(1) 求  $y$  关于  $x$  的函数解析式;

(2) 如果销售该绿色食品的日利润为 400 元, 那么销售单价定为多少元?

**【答案】** (1)  $y = -2x + 100$ ;

(2) 销售单价定为 30 元或 40 元.

**【解析】**

**【分析】** 本题考查待定系数法求一次函数, 二次函数的应用.

(1) 设  $y$  与  $x$  的函数表达式为:  $y = kx + b (k \neq 0)$ , 把表格中的两组数值代入可得  $k$  和  $b$  的值, 即可求出  $y$  与  $x$  的函数关系式;

(2) 设日销售利润为  $w$  元,  $w = \text{每盒糖果的利润} \times \text{销售量}$ , 求出解析式, 根据“日利润为 400 元”求解即可.

**【小问 1 详解】**

解: 设  $y$  与  $x$  的函数表达式为:  $y = kx + b (k \neq 0)$ ,

将  $(22, 56), (24, 52)$  代入得:

$$\begin{cases} 22k + b = 56 \\ 24k + b = 52 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 100 \end{cases}$$

$$\therefore y = -2x + 100;$$

**【小问 2 详解】**

解: 设日销售利润为  $w$  元.

$$\text{可得 } w = (x - 20)(-2x + 100) = -2x^2 + 140x - 2000,$$

$\therefore$  销售该绿色食品的日利润为 400 元,

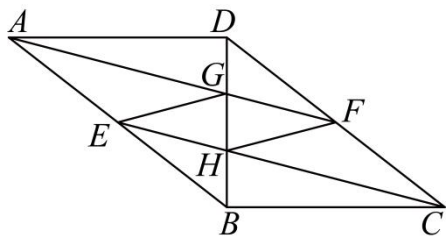
$$\therefore -2x^2 + 140x - 2000 = 400$$

$$\text{整理得 } x^2 - 70x + 1200 = 0$$

$$\text{解得: } x_1 = 30, \quad x_2 = 40,$$

答：销售单价定为 30 元或 40 元.

23. 已知：如图，在平行四边形  $ABCD$  中，点  $E$ 、 $F$  分别是边  $AB$ 、 $CD$  的中点， $AF$ 、 $CE$  与对角线  $BD$  分别相交于点  $G$ 、 $H$ ，联结  $EG$ 、 $FH$ 。



(1) 求证：  $AG = CH$ ；

(2) 当  $AD \perp BD$  时，求证：四边形  $EHFG$  是菱形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

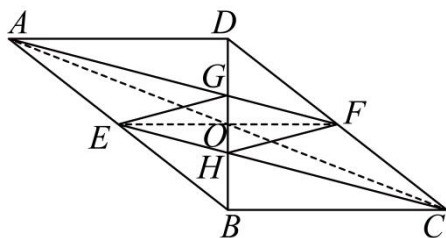
【分析】 本题考查了平行四边形的性质与判定，中位线的性质与判定，全等三角形的性质与判定，菱形的判定；熟练掌握以上知识是解题的关键；

(1) 连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ ，连接  $EO$ 、 $FO$ ，根据平行四边形的性质可得  $AO = OC$ ， $BO = OD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，根据中位线的性质可得  $OE \parallel AD$ ， $OF \parallel BC$ ， $OE = \frac{1}{2}AD$ ， $OF = \frac{1}{2}BC$  得出  $OE = OF$ ， $E, O, F$  共线，则四边形  $AECF$  是平行四边形，进而证明  $\triangle GOF \cong \triangle HOE$  得出  $GF = HE$ ，即可得证；

(2) 根据 (1) 的结论得出四边形  $GFHE$  是平行四边形，根据已知可得  $GH \perp EF$ ，即可证明四边形  $EHFG$  是菱形.

【小问 1 详解】

证明：如图，连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ ，连接  $EO$ 、 $FO$ ，



$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$\therefore AO = OC, BO = OD, AD \parallel BC, AD = BC$

又  $\because E, F$  分别为  $AB, CD$  的中点，

$\therefore OE \parallel AD, OF \parallel BC, OE = \frac{1}{2}AD, OF = \frac{1}{2}BC$

$\therefore OE \parallel BC, OE = OF,$

$\therefore E, O, F$  共线,

$\therefore AO = CO, EO = FO$

$\therefore$  四边形  $AECF$  是平行四边形,

$\therefore AF = CE, AF \parallel CE$

$\therefore \angle GFO = \angle HEO$

又  $\therefore \angle GOF = \angle HOE, OE = OF$

$\therefore \triangle GOF \cong \triangle HOE (ASA),$

$\therefore GF = HE,$

$\therefore AF - FG = CE - EH, \text{ 即 } AG = CH;$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 可得到  $GF = HE, GF \parallel HE,$

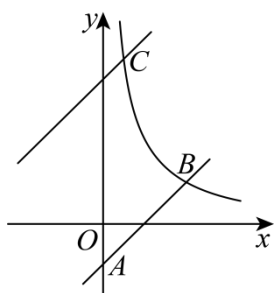
$\therefore$  四边形  $GFHE$  是平行四边形,

又  $\therefore BD \perp AD, AD \parallel EF,$

$\therefore GH \perp EF,$

$\therefore$  四边形  $EHFG$  是菱形.

24. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $y = x - 2$  与  $y$  轴相交于点  $A$ , 与反比例函数在第一象限内的图像相交于点  $B(m, 2)$ .



(1) 求该反比例函数的解析式;

(2) 将直线  $y = x - 2$  向上平移后与反比例函数在第一象限内的图像相交于点  $C$ , 且  $ABC$  的面积为 18, 求平移后的直线的表达式;

(3) 在 (2) 的条件下, 点  $D$  是坐标平面内一点, 当四边形  $ABCD$  是等腰梯形时, 请直接写出点  $D$  的坐标.

【答案】(1)  $y = \frac{8}{x}$

(2)  $y = x + 7$

(3)  $D(-6,1)$  或  $D(-3,4)$  或  $D\left(-\frac{23}{5}, \frac{36}{5}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的面积，平移的性质，用待定系数法求出反比例函数的解析式和函数图象上点的坐标特征等知识点，能综合运用知识点进行计算是解此题的关键.

(1) 先求出  $B$  点的坐标，即可求出答案；

(2) 先设出  $C$ 、 $D$  的坐标，求出  $CD$ ，再根据三角形面积公式求出  $b$  值，即可求出答案；

(3) 分两种情况：当  $BC = AD, AB \parallel CD$  时，先求点  $C$  点的坐标为：  $C(1,8)$ ，再设  $D(m, m+7)$ ，再根据  $BC = AD$ ，求出  $m$  值，即可求出答案；当  $AB = CD, BC \parallel AD$  时，同理求解即可.

【小问 1 详解】

把  $B(m,2)$  代入  $y = x - 2$  得：  $m - 2 = 2$ ，

解得：  $m = 4$ ，

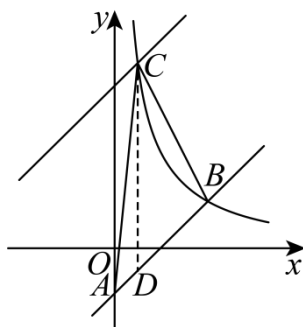
所以  $B(4,2)$ ，

把  $B$  点坐标代入  $y = \frac{k}{x}$  得：  $k = 8$ ，

所以反比例函数关系式是  $y = \frac{8}{x}$ ；

【小问 2 详解】

过点  $C$  作  $CD \parallel y$  轴，交线段  $AB$  于点  $D$ ，



设平移后的直线的解析式是  $y = x + b$ ，

$\because$  点  $C$  在直线  $y = x + b$  上，  $D$  在直线  $y = x - 2$  上，

$\therefore$  可设  $C(t, t + b)$ ，则  $D(t, t - 2)$ ，则

$$CD = (t + b) - (t - 2) = b + 2,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD},$$

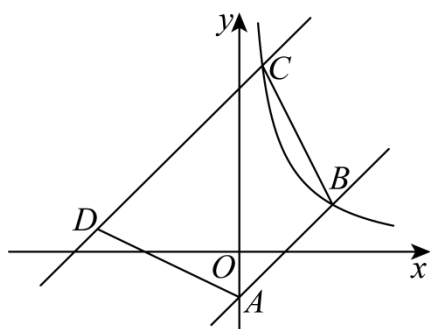
$$\therefore 18 = \frac{1}{2} \times (b+2) \times 4,$$

$$\text{解得: } b = 7,$$

$$\therefore \text{平移后的直线的函数关系式是 } y = x + 7;$$

【小问3详解】

如图：当  $BC = AD, AB \parallel CD$  时，



$\because$  直线  $CD$  的解析式是  $y = x + 7$ ，与反比例函数  $y = \frac{8}{x}$  交于点  $C$ ，

联立解得：  $x = 1$  ( $x = -8$  舍去)，

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = \frac{8}{1} = 8$$

点  $C$  点的坐标为：  $C(1, 8)$ ，

设  $D(m, m + 7)$ ，

$$\because BC = AD, \quad A(0, -2)$$

$$\therefore \sqrt{(4-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{(m-0)^2 + [m+7-(-2)]^2}$$

解得  $m = -6$  或  $m = -3$ ，

$$\therefore D(-6, 1) \text{ 或 } D(-3, 4);$$

当  $AB = CD, BC \parallel AD$  时，

$$\because C(1, 8), \quad B(4, 2),$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式是 } y = -2x + 10,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的解析式是 } y = -2x - 2,$$

设点  $D(n, -2n-2)$ ,

$$\because AB = CD,$$

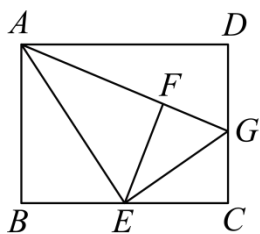
$$\therefore \sqrt{4^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(n-1)^2 + (-2n-2-8)^2},$$

解得:  $n_1 = -\frac{23}{5}$ ,  $n_2 = -3$  (舍去, 此时四边形  $ABCD$  是平行四边形),

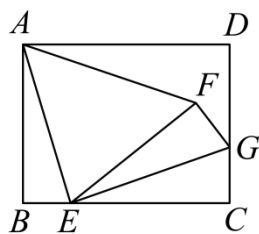
$$\therefore D\left(-\frac{23}{5}, \frac{36}{5}\right);$$

综上,  $D$  的坐标为  $D(-6, 1)$  或  $D(-3, 4)$  或  $D\left(-\frac{23}{5}, \frac{36}{5}\right)$ .

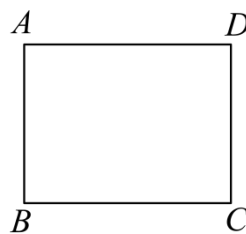
25. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ , 点  $E$ 、 $G$  分别在边  $BC$ 、 $CD$  上,  $EG \perp AE$ . 将  $EGC$  沿直线  $EG$  翻折得  $\triangle EGF$ , 联结  $AF$ .



(1) 图



(2) 图



备用图

- (1) 如图, 当  $EF \perp AF$  时, 求证:  $BE = EC$ ;
- (2) 如图, 当  $AE = EG$  时, 求  $\triangle AEF$  的面积;
- (3) 当  $\triangle AEF$  为等腰三角形时, 求线段  $BE$  的长.

【答案】(1) 见解析 (2)  $\frac{9}{2}$

(3)  $\frac{7}{8}$  或  $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的折叠, 矩形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 勾股定理, 掌握折叠的性质是解题的关键;

- (1) 根据折叠得出  $EF = EC$ , 根据已知证明  $\triangle ABE \cong \triangle AFE$  (AAS) 得出  $BE = EF$ , 等量代换即可得证;
- (2) 过点  $A$  作  $AH \perp EF$  于点  $H$ , 证明  $\triangle ABE \cong \triangle ECG$  (AAS) 得出  $EC = AB = 3$ , 同 (1) 可得  $\triangle ABE \cong \triangle AHE$ , 则  $AH = AB = 3$ , 进而根据三角形的面积公式, 即可求解;
- (3) 分三种情况讨论, ①当  $AF = EF$  时, 如图, 过点  $E$  作  $EK \perp AD$  于点  $K$ , 则四边形  $ABEK$  是矩形, 设  $BE = a$ , 则  $AK = BE = a$ , 在  $Rt\triangle KEF$  中, 根据勾股定理建立方程, 得出方程无解, 故此情形不存在;

②  $AE = EF$  时, 设  $BE = a$ , 则  $EC = 4 - a$ , 在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $AE^2 = BE^2 + AB^2$ , 根据勾股定理建立方程, 得出  $a = \frac{7}{8}$ ; ③ 当  $AE = AF$  时, 过点  $A$  作  $AH \perp EF$  于点  $H$ , 同 (1) 可得  $\triangle ABE \cong \triangle AHE$ , 进而得出  $BE = \frac{1}{3}BC = \frac{4}{3}$ , 即可求解.

【小问 1 详解】

证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$\because$  将  $EGC$  沿直线  $EG$  翻折得  $\triangle EGF$ ,

$$\therefore \angle EFG = \angle C = 90^\circ, \quad \angle CEG = \angle FEG, \quad EF = EC,$$

$$\text{又} \because EG \perp AE, \quad \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEG = \angle CEG = 90^\circ - \angle AEB = \angle BAE,$$

$$\because EF \perp AF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ABE = 90^\circ, \quad \angle AEF = 90^\circ - \angle EAF = 90^\circ - \angle FEG,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FEG,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle BAE,$$

$$\text{又} \because AE = AE,$$

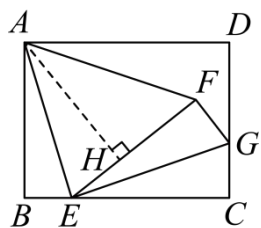
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = EF,$$

$$\therefore BE = EC;$$

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点  $A$  作  $AH \perp EF$  于点  $H$ ,



(2) 图

$$\because EG \perp AE, \quad \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG = 90^\circ - \angle AEB = \angle BAE,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 90^\circ, \quad AE = EG,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECG (\text{AAS}),$$

$$\therefore EC = AB = 3,$$

$\therefore$  折叠,

$$\therefore EF = EC = 4 - 3,$$

同 (1) 可得  $\triangle ABE \cong \triangle AHE$ ,

$$\therefore AH = AB = 3,$$

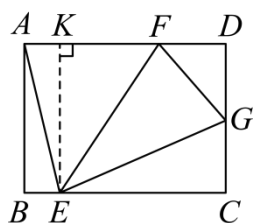
$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} EF \times AH = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2};$$

【小问 3 详解】

当  $\triangle AEF$  为等腰三角形时, 分三种情况讨论,

①当  $AF = EF$  时, 如图, 过点  $E$  作  $EK \perp AD$  于点  $K$ , 则四边形  $ABEK$  是矩形,

$$\therefore AK = BE, KE = AB = 3,$$



备用图

$$\therefore \angle AEF = \angle FAE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEF,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle AEB,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DAE,$$

$\therefore F$  在  $AD$  上,

设  $BE = a$ , 则  $AK = BE = a$ ,

$\therefore$  折叠,

$$\therefore EF = EC = BC - BE = 4 - a,$$

$$\therefore AF = EF = 4 - a,$$

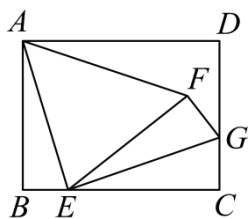
$$\therefore KF = AF - AK = 4 - a - a = 4 - 2a,$$

在  $\text{Rt}\triangle KEF$  中,  $KE^2 + KF^2 = EF^2$ ,

$$\therefore 3^2 + (4 - 2a)^2 = (4 - a)^2,$$

此方程无解, 故此情形不存在;

②当  $AE = EF$  时, 设  $BE = a$ , 则  $EC = 4 - a$ ,



∵ 折叠,

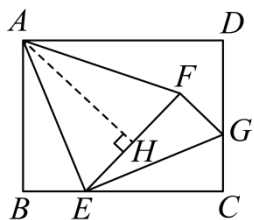
$$\therefore EC = FE = 4 - a,$$

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $AE^2 = BE^2 + AB^2$ ,

$$\text{即 } (4 - a)^2 = a^2 + 3^2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{7}{8};$$

③ 当  $AE = AF$  时, 过点 A 作  $AH \perp EF$  于点 H,



$$\therefore EH = HF = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}EC,$$

同 (1) 可得  $\triangle ABE \cong \triangle AHE$ ,

$$\therefore BE = EH = \frac{1}{2}EC,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{3}BC = \frac{4}{3};$$

综上所述, 当  $\triangle AEF$  为等腰三角形时, 线段  $BE$  的长为  $\frac{7}{8}$  或  $\frac{4}{3}$ .