

期末押题重难点检测卷（提高卷）

（满分 100 分，考试时间 120 分钟，共 25 题）

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上；
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效；
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效；
4. 测试范围：八下全部内容；
5. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题）

一、选择题（6 小题，每小题 2 分，共 12 分）

1. (2025 八年级下·上海松江·模拟预测) 袋子中装有 3 个白球，1 个红球。从中一次性取出 2 个球，下列事件是必然事件的是（ ）
- A. 两个球都是白球 B. 两个球都是红球
- C. 两个球中至少有一个白球 D. 两个球中至少有一个红球

【答案】C

【分析】根据袋子中球的个数以及每样球的个数对摸出的 2 个球的颜色进行分析即可。本题考查了确定事件及随机事件，解题的关键是熟练掌握事件的分类，事件分为随机事件和确定事件，而确定事件又分为必然事件和不可能事件。

【详解】解：∵ 袋子中装有 3 个白球，1 个红球，
∴ 从中一次性取出 2 个球，两个球都是白球是随机事件，故 A 选项不符合题意，
∴ 从中一次性取出 2 个球，两个球都是红球是不可能事件，故 B 选项不符合题意，
∴ 从中一次性取出 2 个球，两个球中至少有一个白球是必然事件，故 C 选项符合题意，
∴ 从中一次性取出 2 个球，两个球中至少有一个红球是随机事件，故 D 选项不符合题意，
故选：C。

2. (2024 八年级下·上海·专题练习) 关于 x 的分式方程 $\frac{m-1}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} = 0$ 的解为负数，则 m 的取值范围是（ ）
- A. $m < -3$ B. $m < 3$ C. $m < -3$ 且 $m \neq -7$ D. $m < 3$ 且 $m \neq 1$

【答案】C

【分析】本题考查了分式方程的解，注意在任何时候都要考虑分母不为 0，解分式方程，得到含 m 的解，根据“该分式方程的解是负数”，得到两个不等式，解之，即可得到 m 的取值范围.

【详解】解：方程两边同时乘以 $(x+2)(x-2)$ 得： $m-1-2(x-2)=0$ ，

解得： $m = \frac{a+3}{2}$ ，

∵ 该分式方程的解是负数，

∴ $x < 0$ ，且 $x+2 \neq 0, x-2 \neq 0$ ，

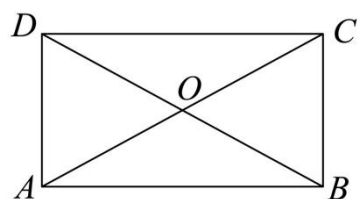
∴ $x < 0$ ，且 $x \neq \pm 2$ ，

∴ $\frac{m+3}{2} < 0$ ，且 $\frac{m+3}{2} \neq -2$ ，

解得： $m < -3$ ，且 $m \neq -7$ ，

故选：C.

3. (2024 八年级·上海·专题练习) 如图，在矩形 ABCD 中， $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} =$



A. $\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}$

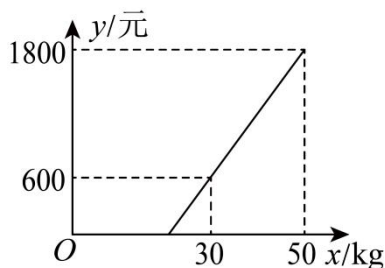
D. $\overrightarrow{BD}$

【答案】B

【详解】由题意， $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

故选 B.

4. (2025·上海静安·一模) 某航空公司规定，旅客乘机所携带行李的质量 x (单位：kg) 与其托运费 y (单位：元) 的关系如图所示的一次函数图象确定，那么旅客可免费携带行李的最大质量为 ()



A. 20kg

B. 22kg

C. 25kg

D. 28kg

【答案】A

【分析】本题考查的是用一次函数解决实际问题，关键是理解一次函数图象的意义以及与实际问题的结

合. 根据图中数据, 用待定系数法求出直线解析式, 然后求 $y=0$ 时, x 对应的值即可.

【详解】解: 设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$, 把点 $(30,600)$, $(50,1800)$ 分别代入得,

由题意可知
$$\begin{cases} 600=30k+b \\ 1800=50k+b \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} k=60 \\ b=-1200 \end{cases}$$

所以 y 与 x 的函数关系式为 $y=60x-1200$,

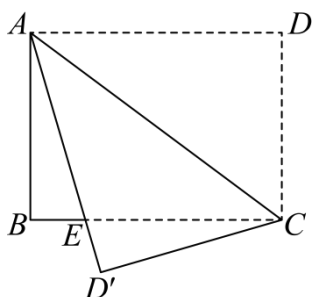
当 $y=0$ 时, $60x-1200=0$,

解得 $x=20$.

即旅客可免费携带行李的最大质量为 20kg ,

故选: A.

5. (24-25 八年级下·上海长宁·期中) 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=12$, $BC=16$, 将长方形沿对角线 AC 折叠, 点 D 落在了 D' 位置, AD' 与 BC 相交于点 E . 则 EC 的长等于 ()



A. $\frac{25}{2}$

B. 20

C. $\frac{2}{25}$

D. $\frac{25}{4}$

【答案】A

【分析】本题主要考查矩形的性质、图形折叠的性质、勾股定理, 设 $CE=x$, 则 $BE=16-x$, 根据题意可证得 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle CD'E$, 可得 $BE=ED'=16-x$, 根据 $EC^2=ED'^2+CD'^2$ 可得到关于 x 的方程, 求解即可得到答案.

【详解】解: 设 $CE=x$, 则 $BE=16-x$,

根据图形折叠的性质可知: $CD=CD'$, $\angle D=\angle D'$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为长方形,

$\therefore AB=CD=12$, $\angle B=\angle D=90^\circ$.

$\therefore AB=CD'=12$, $\angle B=\angle D'=90^\circ$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CD'E$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle D' \\ \angle AEB = \angle CED' \\ AB = CD' \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CD'E$ (AAS).

$$\therefore BE = ED' = 16 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle CED'$ 中, $EC^2 = ED'^2 + CD'^2$,

$$\text{即 } x^2 = (16 - x)^2 + 12^2.$$

$$\text{解得 } x = \frac{25}{2},$$

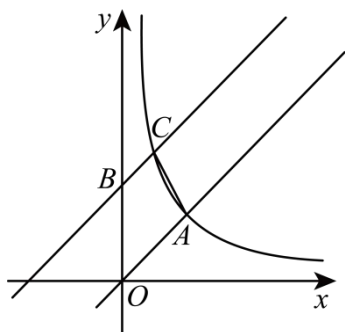
$$\text{即 } CE = \frac{25}{2}$$

故选: A.

6. (2025·上海杨浦·一模) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 的图象与正比例函数 $y = k_2x$ 的图象交于点 $A(2, 2)$,

将正比例函数 $y = k_2x$ 的图象向上平移 n 个单位长度后, 得到的直线与反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图象交于点

$C(1, m)$, 与 y 轴交于点 $B(0, n)$, 连接 AC , 则四边形 $OACB$ 的面积为 ()



A. 5

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{7}{2}$

D. 3

【答案】B

【分析】 本题考查的是一次函数的平移, 反比例函数的图象与性质, 反比例函数比例系数 k 的几何意义; 先求解反比例函数为: $y = \frac{4}{x}$, 正比例函数为 $y = x$, 直线 BC 为 $y = x + 3$, $B(0, 3)$, 再进一步求解即可.

【详解】 解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 的图象与正比例函数 $y = k_2x$ 的图象交于点 $A(2, 2)$,

$$\therefore k_1 = 2 \times 2 = 4, \quad 2k_2 = 2,$$

$$\text{解得: } k_2 = 1,$$

∴ 反比例函数为: $y = \frac{4}{x}$, 正比例函数为 $y = x$,

∴ 将正比例函数 $y = x$ 的图象向上平移 n 个单位长度后, 得到的直线与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于点

$C(1, m)$,

∴ $m = \frac{4}{1} = 4$, 即 $C(1, 4)$, 一次函数为 $y = x + n$,

∴ $1 + n = 4$,

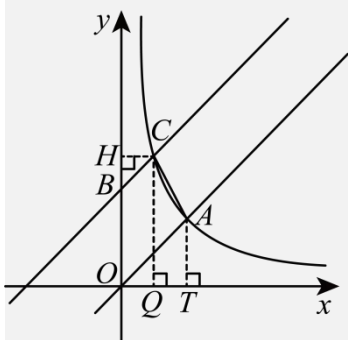
解得: $n = 3$,

∴ 直线 BC 为 $y = x + 3$,

当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

∴ $B(0, 3)$,

如图, 过 C 作 $CH \perp y$ 轴于 H , 作 $CQ \perp x$ 轴于 Q , 过 A 作 $AT \perp x$ 轴于 T ,



∴ 五边形 $HOTAC$ 的面积为 $4 + \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times 1 = 4 + 3 = 7$,

∴ 四边形 $OACB$ 的面积为 $7 - \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times (4 - 3) = 7 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$;

故选: B.

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题 (12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分)

7. (24-25 八年级下·上海·期中) 试写出一个二项方程, 使得它有一个解为 $x=1$, 这个二项方程可以是_____.

【答案】 $x^2 - 1 = 0$ (答案不唯一)

【分析】 按要求写出二项、有一个解为 1 的方程即可.

【详解】 解: 二项方程, 使得它有一个解为 $x=1$, 这样的方程不唯一,

比如: $x^2 - 1 = 0$, $x - 1 = 0$ 等,

故答案为: $x^2 - 1 = 0$ (答案不唯一).

【点睛】本题考查项及方程的解等概念的应用，属开放性题目，答案不唯一，解题的关键是理解项、方程的解等概念.

8. (2025 八年级下·上海·专题练习) 关于 x 的分式方程 $\frac{7x}{x-1} + 5 = \frac{2m-1}{x-1}$ 无解，则 m 的值为_____.

【答案】4

【分析】本题主要考查了分式方程无解问题. 先解分式方程，用含 m 的代数式表示出 x ，根据方程无解得到 $x=1$ ，代入计算即可.

【详解】解：去分母，得 $7x + 5(x-1) = 2m-1$ ，

整理，得 $6x = m+2$ ，

解得 $x = \frac{m+2}{6}$ ，

∵ 方程无解，则 $x=1$ ，

∴ $\frac{m+2}{6} = 1$ ，

解得 $m=4$.

故答案为：4.

9. (24-25 八年级下·上海虹口·课后作业) 填空题：

(1) 每一个内角都是 160° 的多边形有_____条边；

(2) 若一个多边形的内角和是 3240° ，则它的边数是_____.

【答案】 18 20

【分析】本题考查多边形的内角和，熟练掌握多边形的内角和公式，是解题的关键：

(1) 设多边形为 n 边形，根据题意，列出方程进行求解即可；

(2) 设多边形为 n 边形，根据题意，列出方程进行求解即可.

【详解】解：(1) 设多边形为 n 边形，由题意，得： $160n = 180(n-2)$ ，

解得： $n=18$ ；

故答案为：18；

(2) 设多边形为 n 边形，由题意，得： $(n-2) \cdot 180 = 3240$ ，

解得： $n=20$ ；

故答案为：20.

10. (24-25 八年级下·上海静安·期中) 已知一次函数 $y = ax + b$ 的两个变量 x 与 y 的部分对应值如下表所示：

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	4	3	2	1	0	-1	...

则关于 x 的不等式 $ax+b < 0$ 的解集是_____.

【答案】 $x > 2$

【分析】 本题主要考查了一次函数与一元一次不等式及一次函数的性质，能根据所给表格发现 $x=2$ 时 $y=0$ 及 y 随 x 的增大而减小是解题的关键.

根据所给表格得出当 $x=2$ 时， $y=0$ 及 y 随 x 的增大而减小，据此即可解答.

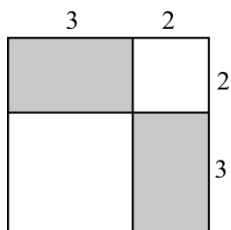
【详解】 解：由所给表格可知，

当 $x=2$ 时， $y=0$ 及 y 随 x 的增大而减小，

所以 $ax+b < 0$ 的解集为 $x > 2$.

故答案为： $x > 2$.

11. (2025·上海徐汇·一模) 如果小球在如图所示的地板上自由滚动，并随机停留在某块方砖上，则它最终停留在阴影区域的概率是_____.



【答案】 $\frac{12}{25}$

【分析】 本题考查几何概率. 熟练掌握几何概率的求法，是解题的关键.

根据阴影区域的面积除以总面积即得.

【详解】 解： $\because$ 两个阴影都是长为 3，宽为 2 的矩形，地板是边长为 $(3+2)$ 的正方形，小球自由滚动，随机停留在某块方砖上的机会均等，

$\therefore$ 小球最终停留在阴影区域的概率是 $P_{(\text{停留阴影})} = \frac{2 \times 3 \times 2}{(3+2)^2} = \frac{12}{25}$.

故答案为： $\frac{12}{25}$.

12. (24-25 八年级下·上海普陀·期中) 定义 $T\{a,b\} = a + kb$ ，其中 k 为常数， $Q\{a,b\} = \begin{cases} -T\{a,b\}, & T\{a,b\} \geq 0 \\ T\{a,b\}, & T\{a,b\} < 0 \end{cases}$

①当 $k=1$ 时, 若 $T\left\{0, \frac{1}{x}\right\}=2$, 则 $x=$ _____;

②若 $Q\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} \geq 0$ 无解, 则 $k=$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ /0.5 1

【分析】 本题主要考查了新定义运算、解分式方程、一元一次不等式的应用等知识, 理解新定义运算是解题关键.

(1) 根据新定义运算, 可得 $0+1 \times \frac{1}{x}=2$, 求解并检验, 即可获得答案;

(2) ②根据题意, 若 $Q\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} \geq 0$ 无解, 则有 $Q\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} < 0$ 恒成立, 然后分 $x > 1$ 和 $x < 1$ 两种情况, 分别分析并求解即可.

【详解】解: ①当 $k=1$ 时, 若 $T\left\{0, \frac{1}{x}\right\}=2$,

则有 $0+1 \times \frac{1}{x}=2$, 解得 $x=\frac{1}{2}$,

经检验, $x=\frac{1}{2}$ 是该分式方程的解,

所以 $x=\frac{1}{2}$;

②根据题意, $Q\{a, b\} = \begin{cases} -T\{a, b\}, & T\{a, b\} \geq 0 \\ T\{a, b\}, & T\{a, b\} < 0 \end{cases}$, $T\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} = \frac{1-kx}{x-1}$,

若 $Q\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} \geq 0$ 无解,

则有 $Q\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} < 0$ 恒成立,

当 $x > 1$ 时,

可有 $Q\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} = \frac{1-kx}{x-1} < 0$ 恒成立,

所以 $1-kx < 0$,

所以 $kx > 1$,

所以 $k \geq 1$;

当 $x < 1$ 时,

可有 $Q\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{x}{1-x}\right\} = -\frac{1-kx}{x-1} < 0$ 恒成立,

所以 $1-kx < 0$,

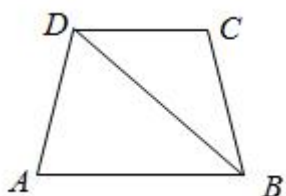
所以 $kx > 1$,

所以 $k \leq 1$.

综上所述, $k = 1$.

故答案为: ① $\frac{1}{2}$; ② 1.

13. (24-25 八年级下·上海青浦·阶段练习) 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $DC = 3$, $\angle A = 60^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 则 $AD =$ _____.



【答案】 3

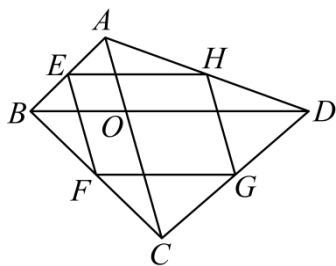
【分析】 由等腰梯形的性质可知 $\angle A = \angle ABC = 60^\circ$, 得到 $\angle ABD = \angle DBC = 30^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$, 因此求得 $CD = BC = AD = 3$.

【详解】 解: $\because$ 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $DC = 3$, $\angle A = 60^\circ$,
 $\therefore BC = AD$, $\angle A = \angle ABC = 60^\circ$,
 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle ABD = \angle DBC = 30^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = 30^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = \angle DBC$,
 $\therefore CD = BC = AD = 3$.

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查了等腰梯形的性质、平行线的性质、等腰三角形的判定和性质, 熟知等腰梯形的两底角相等是解答此题的关键.

14. (24-25 八年级下·上海闵行·期中) 如图, 四边形 $ABCD$, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别为边 AB 、 BC 、 CD 、 AD 的中点, $AC = 6$, $BD = 8$, 则四边形 $EFGH$ 的周长是_____.



【答案】 14

【分析】本题考查了三角形中位线定理，掌握三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题关键。根据中点可得 EF 是 ABC 中位线，则 $EF=3$ ，同理可得 $FG=EH=\frac{1}{2}BD=4$ ， $HG=\frac{1}{2}AC=3$ ，即可求出四边形 $EFGH$ 的周长。

【详解】解：∵点 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 的中点，

∴ EF 是 ABC 中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = 3,$$

同理可得， FG 、 HG 、 EH 分别是 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ABD$ 的中位线，

$$\therefore FG = EH = \frac{1}{2}BD = 4, \quad HG = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长} = EF + FG + HG + EH = 3 + 4 + 3 + 4 = 14,$$

故答案为：14.

15. (23-24 八年级下·上海奉贤·期末) 已知：点 A 在原点左侧，点 B 在原点右侧，且点 A 到原点的距离是点 B 到原点距离的 2 倍， $AB=15$ 。点 P 从点 A 出发，以每秒 1 个单位长度的速度向点 B 方向运动；同时，点 Q 从点 B 出发，先向点 A 方向运动，当与点 P 重合后，马上改变方向与点 P 同向而行且速度始终为每秒 2 个单位长度。设运动时间为 t 秒。①当点 P 与点 Q 重合时， t 的值为___；②当 $AP = \frac{2}{3}AQ$ 时， t 的值为___秒。

【答案】 5 $\frac{30}{7}$ 或 10

【分析】①根据点 P 与点 Q 运动的路程之和等于 15 列方程求解即可；

②先求出点 A 、 B 表示的数，再按照点 Q 往左运动和点 Q 往右运动两种情况求解。

【详解】①当点 P 与点 Q 重合时，得 $t+2t=15$ ，

解得 $t=5$ ，故答案为：5；

②∵点 A 到原点的距离是点 B 到原点距离的 2 倍， $AB=15$ ，

$$\therefore OA = 15 \times \frac{2}{3} = 10, OB = 15 \times \frac{1}{3} = 5,$$

∵点 A 在原点左侧，点 B 在原点右侧，

∴点 A 表示的数是 -10，点 B 表示的数是 5，

点 Q 往左运动时，点 P 表示的数是 $-10+t$ ，点 Q 表示的数是 $5-2t$ ，

此时 $AP=t$ ， $AQ=15-2t$ ，

$$\text{当 } AP = \frac{2}{3}AQ \text{ 时,}$$

$$t = \frac{2}{3} (15-2t),$$

$$\therefore t = \frac{30}{7};$$

当点 P 与点 Q 运动 5 秒时相遇，点 Q 往右运动，此时点 P 表示的数是 $-5 + (t-5) = t-10$ ，点 Q 表示的数是 $-5 + 2(t-5) = 2t-15$ ，

$$\therefore AP = t, \quad AQ = 2t-5,$$

当 $AP = \frac{2}{3}AQ$ 时，

$$t = \frac{2}{3}(2t-5),$$

$$\therefore t = 10,$$

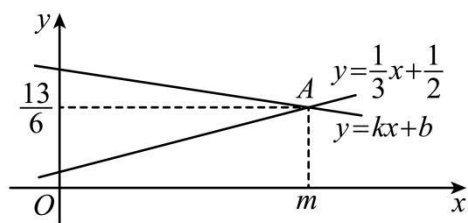
综上，当 $AP = \frac{2}{3}AQ$ 时， t 的值为 $\frac{30}{7}$ 或 10 秒，

故答案为： $\frac{30}{7}$ 或 10.

【点睛】此题考查数轴上点的运动问题，数轴上两点之间的距离公式，一元一次方程的应用，正确表示数轴上两点之间的距离及理解相遇问题及追及问题分析是解题的关键.

16. (24-25 八年级下·上海虹口·期中) 如图，在同一平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = kx + b$ 相

交于点 $A\left(m, \frac{13}{6}\right)$ ，则关于 x 的方程组 $\begin{cases} 2x - 6y = -3 \\ kx - y = -b \end{cases}$ 的解为_____.



【答案】 $\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{13}{6} \end{cases}$

【分析】本题考查了一次函数与二元一次方程组的关系，由题意先求出交点坐标，两直线的交点坐标就是这两条直线组成的方程组的解，即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 直线 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = kx + b$ 相交于点 $A\left(m, \frac{13}{6}\right)$ ，

$\therefore$ 把 $A\left(m, \frac{13}{6}\right)$ 代入 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ ，得 $\frac{13}{6} = \frac{1}{3}m + \frac{1}{2}$ ，

解得： $m = 5$ ，

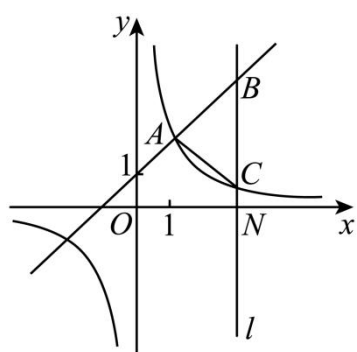
$\therefore A\left(5, \frac{13}{6}\right)$ ，

关于 x 的方程组 $\begin{cases} 2x-6y=-3 \\ kx-y=-b \end{cases}$ 整理后得 $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}, \\ y=kx+b \end{cases}$,

$\therefore$ 关于 x 的方程组 $\begin{cases} 2x-6y=-3 \\ kx-y=-b \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{13}{6} \end{cases}$.

故答案为: $\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{13}{6} \end{cases}$.

17. (24-25 八年级下·上海嘉定·单元测试) 如图, 一次函数 $y=kx+1$ 与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像有公共点 $A(1,2)$, 直线 $l \perp x$ 轴, 垂足为 $N(3,0)$, 且与上述一次函数和反比例函数的图像分别交于点 B 、 C , $\triangle ABC$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{10}{3}$

【分析】 本题考查一次函数与反比例函数图像的交点问题, 待定系数法求出两个函数解析式, 进而求出 B, C 两点坐标, 利用三角形的面积公式进行计算即可.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y=kx+1$ 与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像有公共点 $A(1,2)$,

$$\therefore 2=k+1, m=1 \times 2=2,$$

$$\therefore k=1,$$

$$\therefore y=x+1, \quad y=\frac{2}{x},$$

$\because$ 直线 $l \perp x$ 轴, 垂足为 $N(3,0)$, 且与上述一次函数和反比例函数的图像分别交于点 B 、 C ,

$\therefore$ 当 $x=3$ 时, 一次函数的函数值为 $y=3+1=4$, 反比例函数的函数值为 $y=\frac{2}{3}$,

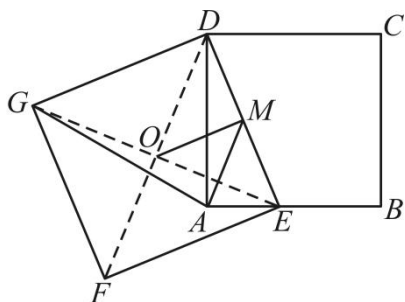
$$\therefore BC=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3},$$

$$\because A(1,2),$$

$\therefore ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (3-1) \times \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$;

故答案为: $\frac{10}{3}$.

18. (24-25 八年级下·上海杨浦·期中) 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是 AB 边上一个动点, 以 DE 为边在直线 DE 左侧作正方形 $DEFG$, Q 是其对角线交点, 取 DE 中点 M , 连接 GA , QM , MA .



(1) 当 E 是 AB 的中点时, QM 的长为_____;

(2) $GA + AM + MQ$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $2\sqrt{5}$

【分析】(1) 根据已知得出 $AE=1, AD=2$, 根据勾股定理求得 DE , 进而根据正方形的性质可得 $\angle DQE = 90^\circ$, 再根据直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半, 即可求解;

(2) 延长 CD 至 T , 使得 $TD=DC$, 连接 GT , 作点 D 关于 TG 是对称点 S , 连接 SA , 证明 $\triangle TDG \cong \triangle ADE$ (SAS), 得出 G 点的轨迹, 进而根据根据直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半, 得出 $AM = \frac{1}{2} DE$ 可得 $GA + AM + MQ$ 的最小值为 SA 的长, 进而勾股定理即可求解.

【详解】(1) 解: $\because$ 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中,

$\therefore AB = AD = 2$, $\angle DAE = 90^\circ$

$\therefore$ 当 E 是 AB 的中点时, $AE = 1$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \sqrt{5}$

$\because Q$ 是正方形 $DEFG$ 对角线交点,

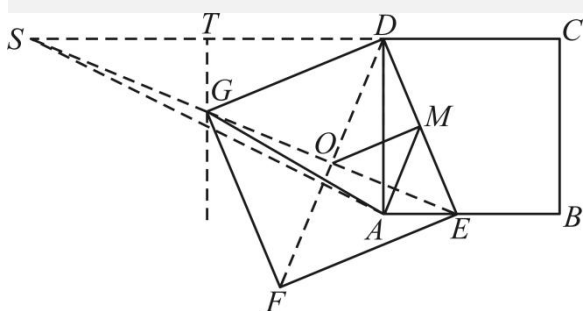
$\therefore \angle DQE = 90^\circ$

又 $\because M$ 是 DE 的中点,

$\therefore QM = \frac{1}{2} DE = \frac{\sqrt{5}}{2}$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) 如图所示, 延长 CD 至 T , 使得 $TD = DC$, 连接 GT , 作点 D 关于 TG 是对称点 S , 连接 SA ;



∵ 正方形 $ABCD$ ，正方形 $DEFG$ ，

∴ $DG = DE$, $\angle EDG = \angle ADT = \angle ADC = 90^\circ$, $AD = DC$ ，

∴ $\angle ADE = \angle TDG$ ，

又∵ $TD = DC$ ， $AD = DC$ ，

∴ $DA = DT$ ，

∴ $\triangle TDG \cong \triangle ADE$ (SAS)，

∴ $\angle DTG = \angle DAE = 90^\circ$ ，则 G 点在 TG 上运动，

∵ 点 S 是点 D 关于 TG 是对称点，

∴ $SG = DG$ ，

∵ M 是 $\text{Rt}\triangle ADE$ 斜边 DE 上的中点，

∴ $AM = \frac{1}{2}DE$ ，

又∵ $MQ = \frac{1}{2}DE$ ，

∴ $GA + AM + MQ = GA + DE = AG + DG = AG + SG \geq SA$ ，

在 $\text{Rt}\triangle SDA$ 中， $SD = 2TD = 2DC = 4$, $AD = 2$ ，

∴ 当 G 在 SA 上时， $GA + AM + MQ$ 取得最小值，最小值为 $\sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，

故答案为： $2\sqrt{5}$ 。

【点睛】 本题考查了勾股定理，全等三角形的性质与判定，正方形的性质，勾股定理，轴对称线的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键。

三、解答题 (7 小题，共 64 分)

19. (24-25 八年级下·上海·阶段练习) 解下列关于 x 的方程

(1) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{4}{1-x^2} = 1$

(2) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$

$$(3) x^2 + x - \frac{6}{x^2 + x} + 1 = 0$$

$$(4) ax^2 - 2 = 2x^2$$

【答案】(1) $x = -3$

$$(2) x = 20$$

$$(3) x_1 = -2, x_2 = 1$$

$$(4) a - 2 \leq 0, \text{ 方程无解}; a - 2 > 0, x_1 = \sqrt{\frac{2}{a-2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{2}{a-2}}$$

【分析】(1) 根据去分母，移项，合并同类项，系数化为一，检验即可。

(2) 根据移项，两边平方，再两边平方，检验即可。

(3) 设 $x^2 + x = y$ ，则 $\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{y}$ ，原方程可化为 $y - \frac{6}{y} + 1 = 0$ ，去分母得 $y^2 + y - 6 = 0$ ，解得 $y_1 = -3$ ， $y_2 = 2$ ，再分别解 $x^2 + x = -3$ 和 $x^2 + x = 2$ ，然后进行检验确定原方程的解。

(4) 移项得到 $x^2(a-2) = 2$ ，在分别计算： $a-2 \leq 0$ 时； $a-2 > 0$ 时，即可解答。

本题考查了解分式方程，解无理方程，换元法将分式方程转化为整式方程，公式法解一元二次方程，熟练掌握其运算法则是解题的关键。

【详解】(1) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{4}{1-x^2} = 1$

方程两边同时乘 $(x-1)(x+1)$ 得， $(x-3)(x+1) - 4 = (x-1)(x+1)$ ，

$$x^2 + x - 3x - 3 - 4 = x^2 - 1,$$

$$-2x = -1 + 7,$$

$$x = -3,$$

检验：当 $x = -3$ 时， $(x-1)(x+1) \neq 0$ ，

$\therefore x = -3$ 是原方程的解。

$$(2) \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$$

移项得： $\sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x+5}$ ，

两边平方得： $2x - 4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x + 5$ ，

整理得： $x - 10 = 2\sqrt{x+5}$ ，

再两边平方得： $x^2 - 24x + 80 = 0$ ，

$$(x-20)(x-4) = 0,$$

解得： $x_1 = 20$ ， $x_2 = 4$ ，

经检验 $x_2 = 4$ 是原方程的增根，舍去，

故答案为： $x = 20$.

$$(3) \quad x^2 + x - \frac{6}{x^2 + x} + 1 = 0$$

设 $x^2 + x = y$ ，则 $\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{y}$ ，

$\therefore$ 原方程可化为 $y - \frac{6}{y} + 1 = 0$ ，

去分母得 $y^2 + y - 6 = 0$ ，

解得 $y_1 = -3$ ， $y_2 = 2$ ，

当 $y_1 = -3$ ， $x^2 + x = -3$ ，此方程无实数解，

当 $y_2 = 2$ ， $x^2 + x = 2$ ，解得 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$ ，

经检验 $x_1 = -2$ 、 $x_2 = 1$ 是原方程的解，

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$.

$$(4) \quad ax^2 - 2 = 2x^2$$

$$ax^2 - 2x^2 = 2，$$

$$x^2(a - 2) = 2，$$

当 $a - 2 \leq 0$ 时， $a \leq 2$ ， $x^2(a - 2) \leq 0$ ，方程无解，

当 $a - 2 > 0$ 时， $a > 2$ ， $x^2 = \frac{2}{a - 2}$ ，解得 $x_1 = \sqrt{\frac{2}{a - 2}}$ ， $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{a - 2}}$.

20. (24-25 八年级下·上海徐汇·期中) 某课外学习小组做摸球试验：一只不透明的袋子中装有若干个红球和白球，这些球除颜色外都相同. 将这个袋中的球搅匀后从中任意摸出 1 个球，记下颜色后放回、搅匀，不断重复这个过程，获得如下数据：

摸球个数	200	300	400	500	1000	1600	2000
摸到白球的个数	116	192	232	a	590	968	1202
摸到白球的频率	0.580	0.640	0.580	0.596	0.590	0.605	b

(1) 表中的 $a =$ _____， $b =$ _____；

(2)当摸球次数很大时，摸到白球的概率的估计值是_____ (精确到 0.01)；

(3)若袋中有红球 30 个，请估计袋中白球的个数.

【答案】(1)298； 0.601

(2)0.60

(3)估计袋中白球的个数 45 个

【分析】 本题考查了利用频率估计概率：

(1) 根据摸到白球的个数等于摸球个数乘以摸到白球的频率，摸到白球的频率等于摸到白球的个数除以摸球个数计算即可；

(2) 根据频率估计概率计算；

(3) 由概率的估计值可计算白球的个数.

【详解】(1) 解： $a = 500 \times 0.596 = 298$, $b = 1202 \div 2000 = 0.601$,

故答案为： 298； 0.601；

(2) 解： 当摸球次数很大时，摸到白球的概率的估计值是： 0.60；

故答案为： 0.60.

(3) 解： $\because$ 摸到白球的概率的估计值是 0.60,

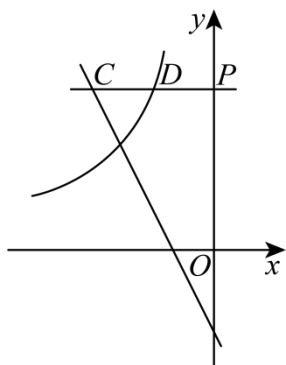
$\therefore$ 摸到红球的概率的估计值是 0.40,

$\because$ 袋中有红球 30 个,

$\therefore$ 球的个数共有： $30 \div 0.40 = 75$ (个),

$\therefore$ 袋中白球的个数为 $75 - 30 = 45$ (个).

21. (23-24 八年级下·上海嘉定·期末) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象经过点 $(-6, 1)$.



(1)求 k 的值;

(2)过点 $P(0, 4)$ 的直线平行于 x 轴, 交直线 $y = -2x - 2$ 于点 C , 交函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象于点 D , 求 CD 的长.

【答案】(1) $k = -6$

(2) $\frac{3}{2}$

【分析】此题考查了一次函数和反比例函数综合题，待定系数法求函数解析式，求自变量的值等知识，数形结合是解题的关键.

(1) 把点 $(-6, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 求出 k 的值即可;

(2) 分别把 $y = 4$ 分别代入 $y = -2x - 2$ 和 $y = -\frac{6}{x}$ 求出 x 的值, 即可得到 $C(-3, 4), D\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$, 即可求出 CD 的长.

【详解】(1) 解: 把点 $(-6, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $1 = \frac{k}{-6}$,

解得 $k = -6$.

(2) $\because P(0, 4)$, 过点 $P(0, 4)$ 的直线平行于 x 轴, 交直线 $y = -2x - 2$ 于点 C , 交函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象于点 D ,

$\therefore$ 把 $y = 4$ 分别代入 $y = -2x - 2$ 和 $y = -\frac{6}{x}$ 得

$$4 = -2x - 2, \quad 4 = -\frac{6}{x},$$

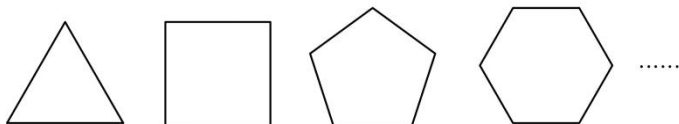
$$\text{解得 } x = -3, \quad x = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore C(-3, 4), D\left(-\frac{3}{2}, 4\right),$$

$$\therefore CD = -\frac{3}{2} - (-3) = \frac{3}{2}.$$

22. (24-25 八年级下·上海金山·阶段练习) 在日常生活中, 观察各种建筑物的地板, 就能发现地板常用各种正多边形地砖铺砌成美丽的图案. 也就是说, 使用给定的某些正多边形, 能够拼成一个平面图形, 既不留下一丝空白, 又不互相重叠 (在几何里叫做平面镶嵌). 这显然与正多边形的内角大小有关. 当围绕一点拼在一起的几个多边形的内角加在一起恰好组成一个周角 (360°) 时, 就拼成了一个平面图形.

正多边形边数	3	4	5	6	...
正多边形每个内角的度数					...



(1)请根据下列图形，填写表中空格：

(2)如图，如果限于用一种正多边形镶嵌，哪几种正多边形能镶嵌成一个平面图形；

【答案】(1) 60° ， 90° ， 108° ， 120°

(2)只选一种正多边形进行平面镶嵌时，只有正三角形，正方形，正六边形可以进行平面镶嵌.

【分析】本题主要考查了平面镶嵌、多边形的内角和等知识点，掌握多边形的内角和公式是解题的关键.

(1) 先根据多边形内角和公式计算内角和，再运用正多边形内角度数等于内角和除以边数逐个计算即可；

(2) 根据镶嵌的知识可知，由于图形都是正多边形，故只要该正多边形的内角度数可以整除 360° 时，则可以进行镶嵌，据此即可解答.

【详解】(1) 解：根据正多边形的内角和公式可知，正 n 边形的内角和 $= (n-2) \times 180^\circ$ ，

故 n 边形一个内角度数为 $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ ，

当正多边形有 3 条边时，内角度数为 $\frac{(3-2) \times 180^\circ}{3} = 60^\circ$ ；

当正多边形有 4 条边时，内角度数为 $\frac{(4-2) \times 180^\circ}{4} = 90^\circ$ ；

当正多边形有 5 条边时，内角度数为 $\frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$ ；

当正多边形有 6 条边时，内角度数为 $\frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$.

填表如下：

正多边形边数	3	4	5	6	...
正多边形每个内角的度数	60°	90°	108°	120°	...

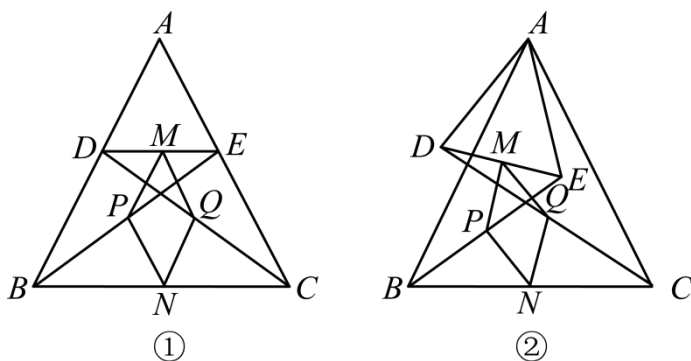
故答案为： 60° ， 90° ， 108° ， 120° .

(2) 解：根据镶嵌的知识可知，使得几个图形的角度之和为 360° 时，可以进行镶嵌，由于图形都是正多边形，故只要该正多边形的内角度数可以整除 360° 时，则可以进行镶嵌，

可知 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ 均可以整除 360° ，当正多边形的内角度数大于 120° 时，都不能整除 360° ，

故只选一种正多边形进行平面镶嵌时，只有正三角形，正方形，正六边形可以进行平面镶嵌.

23. (24-25 八年级下·上海奉贤·期中) 在 ABC 和 ADE 中， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE = \alpha$ ，点 M ， N ， P ， Q 分别为 DE ， BC ， BE ， DC 的中点.



(1)当点 D , E 分别在 AB , AC 上时, 如图①, 直接写出四边形 $PMQN$ 的形状.

(2)当点 D 不在 AB 上时, 其位置如图②所示.

① (1) 中的结论成立吗? 请说明理由;

②当 $\alpha =$ _____ $^\circ$ 时, 四边形 $PMQN$ 是正方形.

【答案】 (1)菱形

(2)①成立, 理由见解析; ② 90

【分析】 (1) 利用三角形中位线性质可得 $MP = NQ = \frac{1}{2}BD$, $MQ = PN = \frac{1}{2}CE$, 又由 $AB = AC$, $AD = AE$ 得 $BD = CE$, 即得 $MP = PN = NQ = MQ$, 即可求证;

(2) ①连接 BD 、 CE , 可证 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS) , 得 $BD = CE$, 同理 (1) 可得 $MP = NQ = \frac{1}{2}BD$, $MQ = PN = \frac{1}{2}CE$, 即得 $MP = PN = NQ = MQ$, 即可求证; ②当 $\alpha = 90^\circ$, 四边形 $PMQN$ 是正方形, 由三角形中位线的性质可得 $PN \parallel CE$, $NQ \parallel BD$, 即得 $\angle BNP = \angle BCE$, $\angle CNQ = \angle CBD$, 又由全等三角形的性质得 $\angle ABD = \angle ACE$, 即可得 $\angle BCE + \angle CBD = \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ$, 即得到 $\angle PNQ = 90^\circ$, 即可求证.

【详解】 (1) 解: 四边形 $PMQN$ 是菱形, 理由如下:

$\because$ 点 M 是 DE 的中点, 点 P 是 BE 的中点,

$\therefore MP$ 是 BDE 的中位线,

$$\therefore MP = \frac{1}{2}BD ,$$

$$\text{同理可得 } NQ = \frac{1}{2}BD , \quad MQ = PN = \frac{1}{2}CE ,$$

$$\because AB = AC , \quad AD = AE ,$$

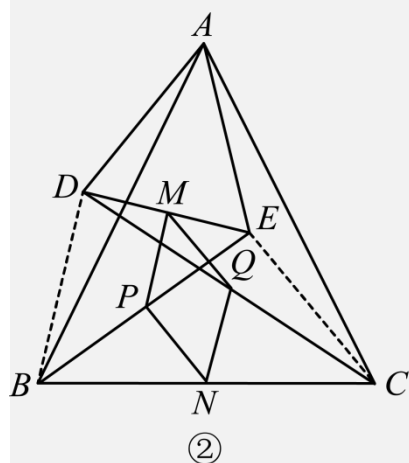
$$\therefore BD = CE ,$$

$$\therefore MP = PN = NQ = MQ ,$$

$\therefore$ 四边形 $PMQN$ 是菱形;

(2) 解: ①成立, 理由如下:

如图②，连接 BD 、 CE ，



$$\because \angle BAC = \angle DAE = \alpha,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CE,$$

$$\text{同理 (1) 可得 } MP = NQ = \frac{1}{2}BD, MQ = PN = \frac{1}{2}CE,$$

$$\therefore MP = PN = NQ = MQ,$$

$\therefore$ 四边形 $PMQN$ 是菱形;

②当 $\alpha = 90^\circ$ ，四边形 $PMQN$ 是正方形，理由如下：

$\because PN$ 是 $\triangle BCE$ 的中位线， NQ 是 $\triangle CBD$ 的中位线，

$$\therefore PN \parallel CE, NQ \parallel BD,$$

$$\therefore \angle BNP = \angle BCE, \angle CNQ = \angle CBD,$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle CBD = \angle ACB + \angle ABC,$$

$$\because \angle BAC = \alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle CBD = \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BNP + \angle CNQ = \angle BCE + \angle CBD = 90^\circ,$$

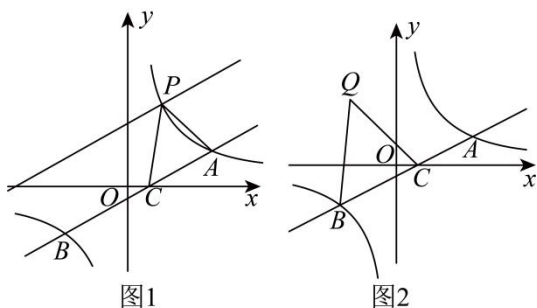
$$\therefore \angle PNQ = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $PMQN$ 是正方形,

故答案为：90.

【点睛】本题考查了三角形中位线的性质，菱形的判定，全等三角形的判定和性质，正方形的判定，正确作出辅助线是解题的关键.

24. (2025·上海虹口·一模) 如图，一次函数 $y = \frac{1}{2}x + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象分别交于点 $A(4, m)$ 和点 $B(n, -2)$ ，且与 x 轴交于点 $C(1, 0)$.



(1) 求一次函数和反比例函数的解析式;

(2) 如图 1，将直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 向上平移 $d (d > 0)$ 个单位，平移后的直线与 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象在第一象限交于点 P ，若 $S_{\triangle PCA} = \frac{15}{4}$ ，求平移距离 d ;

(3) 如图 2， Q 是第二象限内一点， $\angle QCO = 45^\circ$ ，连接 QB ，将 $\triangle QCB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° ，点 Q 的对应点恰好落在该反比例函数图象上，求点 Q 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = \frac{6}{x}$

(2) $\frac{5}{2}$

(3) $(-2, 3)$

【分析】(1) 先将点 $C(1, 0)$ 代入一次函数 $y = \frac{1}{2}x + b$ ，求得一次函数解析式，再求出点 $A(4, \frac{3}{2})$ ，即可求出反比例函数解析式;

(2) 法 1: 作 $PD \parallel y$ 轴交直线 AB 于点 D ，根据 $\frac{1}{2} \times PD \times |x_A - x_C| = \frac{15}{4}$ ，即可求 $d = PD = \frac{5}{2}$.

法 2: 设直线 AB 平移前后与 y 轴分别交于 E, F 两点，连接 AF, CF ，根据 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ACF$ 同底等高，

$\frac{1}{2} \times EF \times |x_A - x_C| = \frac{15}{4}$ ，即可求 $EF = \frac{5}{2}$;

(3) 连接 OQ ，设点 Q 的对应点为点 G ，过点 G 作 $GN \perp x$ 轴于 N ，过点 Q 作 $QM \perp x$ 轴于 M ，由旋转的性质可证明 $\triangle QOM \cong \triangle OGN$ ，得 $QM = ON, OM = GN$ ，设 $OM = t$ ，则 $CM = QM = t + 1$ ，得点 G 的坐标为 $(t + 1, t)$ ，列方程 $t(t + 1) = 6$ ，解方程进而可求点 Q 的坐标.

【详解】(1) 解: $\because$ 点 $C(1,0)$ 在一次函数 $y=\frac{1}{2}x+b$ 上,

$$\therefore \frac{1}{2}+b=0,$$

$$\therefore b=-\frac{1}{2}$$

一次函数 $y=\frac{1}{2}x+b$ 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$;

$\because$ 点 $A(4,m)$ 在直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 上,

$$\therefore \frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{2}=m,$$

$$\therefore m=\frac{3}{2}.$$

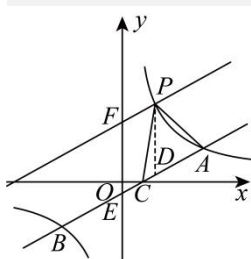
$$\therefore A\left(4,\frac{3}{2}\right),$$

把 $A\left(4,\frac{3}{2}\right)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $\frac{3}{2}=\frac{k}{4}$,

解得: $k=6$,

$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式为 $y=\frac{6}{x}$;

(2) 解: 法 1: 作 $PD\parallel y$ 轴交直线 AB 于点 D ,



$$\therefore S_{\triangle PCA}=\frac{15}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times PD\times |x_A-x_C|=\frac{15}{4},$$

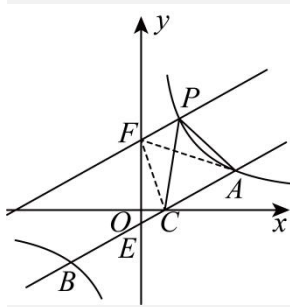
$$\therefore \frac{1}{2}\times PD\times (4-1)=\frac{15}{4},$$

$$\therefore PD=\frac{5}{2},$$

$$\therefore d=PD=\frac{5}{2}.$$

法 2: 设直线 AB 平移前后与 y 轴分别交于 E,F 两点,

连接 AF,CF ,



$\therefore \triangle ACP$ 与 $\triangle ACF$ 同底等高,

$$\therefore S_{\triangle FCA} = \frac{15}{4},$$

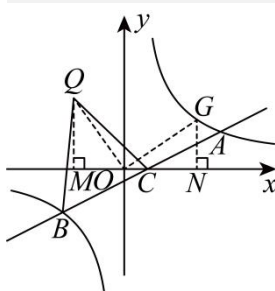
$$\therefore \frac{1}{2} \times EF \times |x_A - x_C| = \frac{15}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times EF \times (4 - 1) = \frac{15}{4},$$

$$\therefore EF = \frac{5}{2},$$

$$\therefore d = EF = \frac{5}{2};$$

(3) 解: 连接 OQ , 设点 Q 的对应点为点 G , 过点 G 作 $GN \perp x$ 轴于 N , 过点 Q 作 $QM \perp x$ 轴于 M , 由旋转的性质可知: $OQ = OG, \angle QOG = 90^\circ$,



$\therefore \angle GON + \angle QOM = 90^\circ$,

$\because QM \perp x$ 轴, $GN \perp x$ 轴,

$$\therefore \angle QMO = \angle GNO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OQM + \angle QOM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OQM = \angle GON,$$

$$\therefore \triangle QOM \cong \triangle OGN,$$

$$\therefore QM = ON, OM = GN,$$

$\because$ 点 $C(1,0), \angle QCO = 45^\circ$,

$\therefore OC = 1, \triangle QMC$ 为等腰直角三角形.

设 $OM = t$, 则 $CM = QM = t + 1$,

$$\therefore ON = QM = t + 1, GN = OM = t,$$

∴ 点 G 的坐标为 $(t+1, t)$,

∵ 点 $G(t+1, t)$ 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上,

∴ $t(t+1) = 6$,

解得: $t_1 = 2, t_2 = -3$ (不合题意, 舍去),

当 $t = 2$ 时, $t+1 = 3$,

∴ 点 Q 的坐标为 $(-2, 3)$.

【点睛】 本题主要涉及一次函数与反比例函数的性质及应用, 还包括图形的旋转等知识, 解题的关键在于利用函数图像上点的坐标满足函数解析式这一性质, 求出函数中的未知参数, 进而确定函数解析式; 对于三角形面积问题, 通过合理设点坐标利用面积公式求解; 对于图形旋转问题, 根据旋转的性质得到对应点坐标的关系, 再结合反比例函数解析式求解.

25. (2025·上海崇明·一模) 综合与探究

问题情境:

如图 1, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 沿过点 B 的直线将矩形 $ABCD$ 折叠, 使点 A 落在 BC 边上的点 A' 处, 折痕交 AD 边于点 E , 连接 BE .

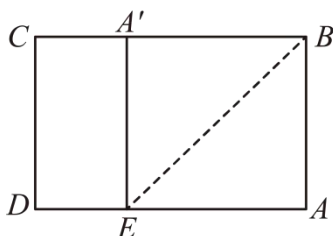


图1

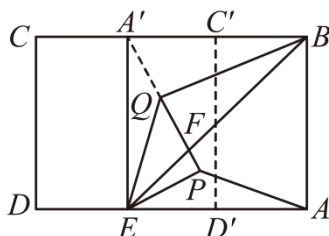
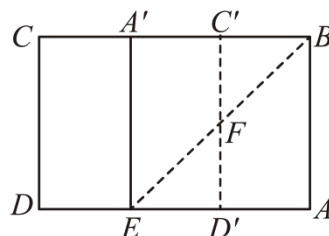


图1



备用图

猜想证明:

- (1) 判断四边形 $ABA'E$ 的形状, 并说明理由.

深入探究:

- (2) 创新小组在解决了上述问题后, 继续将矩形 $ABCD$ 沿 $A'E$ 所在直线折叠, 使点 C, D 分别落在 BC, AD 边上的点 C', D' 处, $C'D'$ 交 BE 于点 F , 展开展平. 将 $\triangle EFD'$ 绕点 E 逆时针方向旋转, 得到 $\triangle EQP$, 点 F, D' 的对应点分别为 Q, P , 如图 2, 连接 AP, BQ . 试探究线段 AP, BQ 之间的数量关系, 并说明理由. 问题解决:

- (3) 在 (2) 的条件下, 若 $AB = 4, BC = 6$, 在旋转的过程中, 当 B, P, Q 三点在同一条直线上时, 请直接写出 $\triangle BEQ$ 的面积.

【答案】(1) 四边形 $ABA'E$ 是正方形. 理由见解析;

(2) $BQ = \sqrt{2}AP$, 理由见解析;

(2) $2\sqrt{7} - 2$ 或 $2\sqrt{7} + 2$.

【分析】(1) 根据矩形的性质可得: $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$, 根据折叠的性质可证: $\angle BA'E = \angle A = 90^\circ$, $BA = BA'$, 从而可证四边形 $ABA'E$ 是正方形;

(2) 根据矩形的性质可得 $\angle BAD = \angle D = 90^\circ$, 根据折叠的性质可得: $\angle C'D'E = \angle D = 90^\circ$, 从而可证 $C'D' \parallel AB$, 根据平行线的性质可得 $\frac{EF}{EB} = \frac{ED'}{EA}$, 根据旋转的性质可得 $\frac{EQ}{EB} = \frac{EP}{EA}$, $\angle AEP = \angle BEQ$, 从而可证 $\triangle BEQ \sim \triangle AEP$, 根据相似三角形的性质可得 $BQ = \sqrt{2}AP$;

(3) 利用勾股定理可得 $BE = 4\sqrt{2}$, 根据旋转的性质可得: $EP = EP' = ED' = PQ = P'D' = 2$, 从而可求 $BP = BP' = 2\sqrt{7}$, $BQ = 2\sqrt{7} + 2$, $BQ' = 2\sqrt{7} - 2$, 根据三角形的面积公式求解即可.

【详解】(1) 解: 四边形 $ABA'E$ 是正方形,
理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle A = \angle ABC = 90^\circ$,

由折叠的性质可得: $\angle BA'E = \angle A = 90^\circ$, $BA = BA'$,

$\therefore$ 四边形 $ABA'E$ 是矩形,

$\therefore$ 四边形 $ABA'E$ 是正方形;

(2) $BQ = \sqrt{2}AP$,

理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD = \angle D = 90^\circ$,

由折叠的性质可得: $\angle C'D'E = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \angle C'D'E = \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore C'D' \parallel AB$,

$\therefore \frac{EF}{EB} = \frac{ED'}{EA}$.

由旋转的性质, 得 $EF = EQ$, $ED' = EP$, $\angle AEP = \angle BEQ$,

$$\therefore \frac{EQ}{EB} = \frac{EP}{EA},$$

$$\therefore \triangle BEQ \sim \triangle AEP,$$

$$\therefore \frac{BQ}{AP} = \frac{EB}{EA},$$

由折叠的性质，知 $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$ ，

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中，} \sin 45^\circ = \frac{EA}{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{BQ}{AP} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \text{ 即 } BQ = \sqrt{2}AP;$$

$$(3) \text{ 解: } 2\sqrt{7} - 2 \text{ 或 } 2\sqrt{7} + 2,$$

理由如下：

如下图所示，

$$\therefore BC = AD = 6,$$

$$\therefore AE = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \times 6 = 4,$$

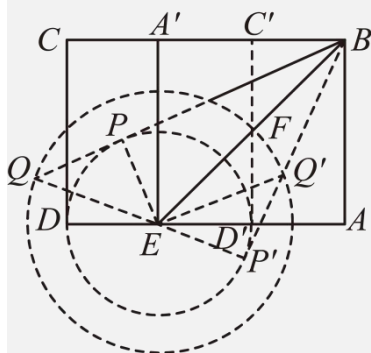
$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中，} BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{根据旋转的性质可得: } EP = EP' = ED' = PQ = P'D' = 2,$$

$$\text{则 } BP = BP' = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 2^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore BQ = AP + PQ = 2\sqrt{7} + 2, \quad BQ' = BP' - P'Q' = 2\sqrt{7} - 2,$$

$$\therefore S_{\triangle BEQ} = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{7} + 2) \times 2 = 2\sqrt{7} + 2, \quad S_{\triangle BEQ'} = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{7} - 2) \times 2 = 2\sqrt{7} - 2.$$



【点睛】 本题主要考查了矩形的性质、折叠的性质、旋转的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理，解决本题的关键是根据折叠的性质和旋转的性质找到边之间的关系。