

静安区 2024 学年第二学期期末教学质量调研

八年级数学试卷

(完成时间: 100 分钟, 满分: 120 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 满分 18 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 一次函数 $y = 3x - b + 1$ 的图像在 y 轴上的截距是 ()

- A. 1 B. $-b + 1$ C. $b + 1$ D. $|-b + 1|$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与 y 轴的交点坐标, 掌握截距的定义是解题的关键.

根据一次函数的一般形式 $y = kx + b$, 其中 b 为 y 轴上的截距, 将题目中的函数整理为标准形式, 即可直接读出截距.

【详解】解: 将函数 $y = 3x - b + 1$ 整理为 $y = 3x + (-b + 1)$, 可知常数项为 $-b + 1$, 即 y 轴上的截距是 $-b + 1$
故选: B.

2. 经过点 $(-1, -1)$ 且平行于 $y = -2x$ 的直线不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 A

【解析】

【分析】 此题考查了待定系数法求直线表达式, 一次函数的图象和性质,
首先利用待定系数法求出直线表达式, 然后由 $-2 < 0$, $-3 < 0$ 得到 y 随 x 的增大而减小, 直线与 y 轴交于负半轴, 进而求解即可.

【详解】解: $\because$ 经过点 $(-1, -1)$ 且平行于 $y = -2x$ 的直线,

$\therefore$ 设直线解析式为 $y = -2x + b$.

代入点 $(-1, -1)$ 得: $-1 = -2 \times (-1) + b$,

解得 $b = -3$,

$\therefore$ 直线解析式为 $y = -2x - 3$.

$\because -2 < 0, -3 < 0,$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小, 直线与 y 轴交于负半轴,

$\therefore$ 直线经过第二、第三、第四象限, 不经过第一象限.

故选: A.

3. 下列事件中, 是随机事件的是 ()

A. 13 个人中至少有两个人的生日是同一个月份

B. 标准大气压下温度低于 -5 摄氏度, 纯净水结成了冰

C. 袋中装有 8 个黄球, 3 个绿球, 2 个白球, 从中任取一球, 然后放回袋中, 混合均匀, 再取一球. 如此反复 4 次, 4 次全部取到绿球

D. 将长度分别为 2cm、3cm、6cm 的三根小木条作为三条边, 能围成一个三角形

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了事件的分类. 根据确定事件和随机事件的定义来区分判断即可, 必然事件和不可能事件统称确定性事件; 必然事件: 在一定条件下, 一定会发生的事件称为必然事件; 不可能事件: 在一定条件下, 一定不会发生的事件称为不可能事件; 随机事件: 在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件称为随机事件.

【详解】解: A、13 个人中至少有两个人的生日是同一个月份, 是必然事件, 故选项不符合题意;

B、标准大气压下温度低于 -5 摄氏度, 纯净水结成了冰, 是必然事件, 故选项不符合题意;

C、袋中装有 8 个黄球, 3 个绿球, 2 个白球, 从中任取一球, 然后放回袋中, 混合均匀, 再取一球. 如此反复 4 次, 每次取到绿球的概率为 $\frac{3}{13}$, 可能发生也可能不发生, 属于随机事件, 故选项符合题意;

D、将长度分别为 2cm、3cm、6cm 的三根小木条作为三条边, 因 $2+3=5 < 6$, 不满足三角形三边关系, 属于不可能事件, 故选项不符合题意.

故选: C.

4. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 = b$ 无实数根, 那么实数 a 、 b 可以满足的条件是 ()

A. $a = b \neq 0$

B. $a < 0 < b$

C. $a > b > 0$

D. $a < b < 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式, 将方程整理为标准形式, 利用判别式分析无实根的条件, 结合选项判断符号关系.

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 = b$ 无实数根,

$$\therefore ax^2 - b = 0.$$

$$\therefore \Delta = 0^2 - 4a(-b) = 4ab < 0,$$

$$\therefore ab < 0,$$

A: $a = b \neq 0$, 此时 $ab = a^2 > 0$, 不满足条件.

B: $a < 0 < b$, 此时 $ab < 0$, 满足条件.

C: $a > b > 0$, 此时 $ab > 0$, 不满足条件.

D: $a < b < 0$, 此时 $ab > 0$, 不满足条件.

故选: B.

5. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 ()

A. $\vec{a} = \vec{b}$

B. $\vec{a} = -\vec{b}$

C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 以上都有可能

【答案】D

【解析】

【分析】利用单位向量的定义和性质直接判断即可.

【详解】解: 若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$,

可得: $\vec{a} = \vec{b}$, 或 $\vec{a} = -\vec{b}$, 或 $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

故选: D.

【点睛】此题考查平面向量问题. 解题时要认真审题, 注意单位向量、零向量、共线向量的定义和性质的合理运用.

6. 双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = kx$ ($k > 0$ 且 $k \neq 1$) 在一、三象限分别相交于 A 、 C 两点, 与直线 $y = \frac{1}{k}x$ 在一、三象限分别相交于 B 、 D 两点, 那么四边形 $ABCD$ 的形状一定是 ()

A. 矩形

B. 菱形

C. 正方形

D. 非矩形和菱形的任意平行四边形

【答案】A

【解析】

【分析】通过联立方程求出双曲线与直线的交点坐标, 确定四边形各顶点的位置. 利用勾股定理确定对边相等且 $\angle BAD = 90^\circ$ 证明出四边形 $ABCD$ 为矩形.

【详解】 $\because$ 双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = kx$ ($k > 0$ 且 $k \neq 1$) 在一、三象限分别相交于 A 、 C 两点,

$$\therefore \text{联立得, } \frac{1}{x} = kx$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ 或 } -\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \sqrt{k}\right) \text{ (第一象限), } C\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}, -\sqrt{k}\right) \text{ (第三象限).}$$

$\because$ 双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{k}x$ 在一、三象限分别相交于 B 、 D 两点,

$$\text{联立得, } \frac{1}{x} = \frac{1}{k}x$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{k} \text{ 或 } -\sqrt{k}$$

$$\therefore B\left(\sqrt{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ (第一象限), } D\left(-\sqrt{k}, -\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ (第三象限).}$$

$$\therefore AB^2 = \left(\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{k}\right)^2 = 2k + \frac{2}{k} - 4;$$

$$CD^2 = \left(-\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{k}} + \sqrt{k}\right)^2 = 2k + \frac{2}{k} - 4;$$

$$\therefore AB^2 = CD^2, \text{ 即 } AB = CD$$

$$\therefore AD^2 = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \sqrt{k}\right)^2 = 2k + \frac{2}{k} + 4;$$

$$BC^2 = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \sqrt{k}\right)^2 = 2k + \frac{2}{k} + 4;$$

$$\therefore AD^2 = BC^2, \text{ 即 } AD = BC$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\because AB^2 + AD^2 = 2k + \frac{2}{k} - 4 + 2k + \frac{2}{k} - 4 = 4k + \frac{4}{k}, \quad BD^2 = \left(\sqrt{k} + \sqrt{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = 4k + \frac{4}{k}$$

$$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形.

故选: A.

【点睛】此题考查了反比例函数和一次函数交点问题，矩形的判定，勾股定理等知识，解题的关键是掌握以上知识点.

二、填空题：（本大题共 12 题，满分 36 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 方程 $x^3 = 2$ 的根是_____.

【答案】 $\sqrt[3]{2}$

【解析】

【分析】本题考查了立方根的概念，根据立方根的概念即可求解，掌握立方根的概念是解题的关键.

【详解】解： $\because x^3 = 2$,

$$\therefore x = \sqrt[3]{2},$$

故答案为： $\sqrt[3]{2}$.

8. 方程 $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，因式分解法解一元二次方程，解题关键是掌握分式方程的解法.

先去分母，再利用因式分解法解一元二次方程，再验根，然后写出结果.

【详解】解：去分母，得 $x^2 - 4 = 0$,

解得： $x_1 = -2$, $x_2 = 2$,

经检验： $x_1 = -2$ 是分式方程的根， $x_2 = 2$ 是增根，

所以分式方程的根为 $x = -2$.

故答案为： $x = -2$.

9. 方程 $\sqrt{x} = -x$ 的根是_____.

【答案】 $x = 0$

【解析】

【分析】本题主要考查了解无理方程. 方程两边同时平方，变为整式方程，然后再解一元二次方程即可，最后进行检验.

【详解】解： $\sqrt{x} = -x$,

方程同时平方得: $x = x^2$,

移项得: $x^2 - x = 0$,

分解因式得: $x(x-1) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x - 1 = 0$,

解得: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,

经检验 $x_1 = 0$ 是原方程的根, $x_2 = 1$ 是增根,

$\therefore$ 原方程的解为: $x = 0$.

故答案为: $x = 0$.

10. 已知方程 $\frac{3x}{x^2-1} = 4 - \frac{x^2-1}{x}$ 如果设 $\frac{x}{x^2-1} = y$, 那么原方程变形为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $3y^2 - 4y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查换元法解分式方程, 设 $\frac{x}{x^2+1} = y$, 则 $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{y}$, 原方程可变为 $3y = 4 - \frac{1}{y}$, 再去分母

即可, 掌握分式的运算法则是解题的关键.

【详解】 解: 设 $\frac{x}{x^2+1} = y$, 则 $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{y}$,

原方程可变为: $3y = 4 - \frac{1}{y}$,

去分母得: $3y^2 - 4y + 1 = 0$,

$\therefore$ 原方程变形为关于 y 的整式方程是 $3y^2 - 4y + 1 = 0$.

故答案为: $3y^2 - 4y + 1 = 0$.

11. 化简: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} =$ _____.

【答案】 $\vec{0}$

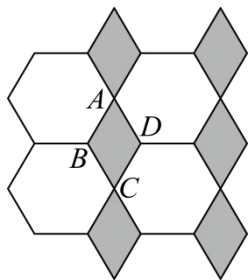
【解析】

【分析】 此题考查了向量的线性运算. 根据向量的运算法则计算即可.

【详解】 解: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$,

故答案为: 0 .

12. 如图, 地板砖的一部分是由若干四边形和各边相等且各角也相等的六边形镶嵌而成的, 那么四边形 $ABCD$ 中 $\angle BCD$ 的度数是_____度.



【答案】 60

【解析】

【分析】 本题考查平面镶嵌 (密铺), 根据正六边形内角和定理, 求出每个内角度数, 然后根据周角求出答案.

【详解】 解: $\because$ 正六边形内角和: $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$,

$\therefore$ 每个内角度数: $720^\circ \div 6 = 120^\circ$,

$$\therefore \angle BCD = \frac{360^\circ - 2 \times 120^\circ}{2} = 60^\circ,$$

$\therefore \angle BCD$ 的度数为 60° .

故答案为: 60.

13. 某商品购买价 100 元, 第一年使用后折旧 20%, 第二、三年折旧率相同. 在第三年末它折旧后的价值是 20 元, 求该商品第二、三年折旧率为_____.

【答案】 50%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键. 设该商品第二、三年折旧率为 x , 根据在第三年末它折旧后的价值是 20 元, 列出一元二次方程, 解之取符合题意的值即可.

【详解】 解: 设该商品第二、三年折旧率为 x ,

由题意得: $100(1-20\%)(1-x)^2 = 20$,

整理得: $(1-x)^2 = 0.25$,

解得: $x_1 = 0.5 = 50\%$, $x_2 = 1.5$ (不合题意, 舍去).

即该商品第二、三年折旧率为 50%.

故答案为: 50%.

14. 如果 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是函数 $f(x) = -x + 1$ 图象上不同的两点, 那么 $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$ 的计算结果_____. (填 “ >0 ”、“ <0 ”、“ $=0$ ” 或 “不能确定”)

【答案】 <0

【解析】

【分析】 此题考查了一次函数图象上点的坐标特征. 根据一次函数的性质知, 当 $k < 0$ 时, 判断出 y 随 x 的增大而减小, 即可比较出 x_1 与 x_2 , y_1 与 y_2 的大小.

【详解】 解: $\because -1 < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $f(x) = -x + 1$ 中 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 若 $x_1 > x_2$, 则 $y_1 < y_2$, 若 $x_1 < x_2$, 则 $y_1 > y_2$, 故 $x_1 - x_2$ 与 $y_1 - y_2$ 始终异号, 故 $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

故答案为: <0 .

15. 某博物馆有 A , B , C 三个大门, 其中 A , B 两门可进可出, C 门只进不出. 上午小海随机选择一个大门进馆, 参观结束后, 随机选择一个可出的大门出馆, 那么这次参观他在同一个大门出入的概率为_____.

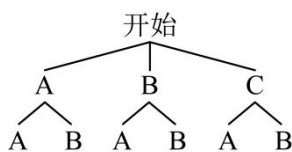
【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了树状图或列表法求解概率, 正确画出树状图或列出表格是解题的关键.

先画出树状图得到所有等可能性的结果数, 再找到符合题意的结果数, 最后依据概率计算公式求解即可.

【详解】 解: 由题意, 画树状图为:

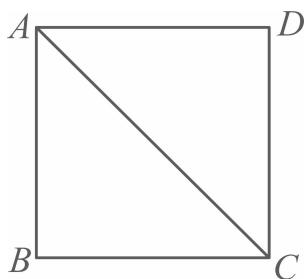


由树状图可知一共有 6 种等可能性的结果数, 他在同一个大门出入的结果数有 2 种,

$\therefore$ 他在同一个大门出入的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

16. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 边长为 1, 如果将边 AB 沿着过点 A 的直线翻折后, 边 AB 恰巧落在对角线 AC 上, 折痕交边 BC 于点 E , 那么 BE 的长是_____.

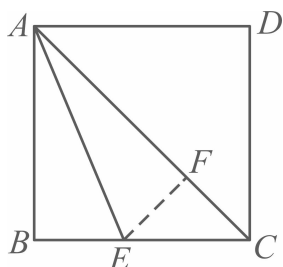


【答案】 $\sqrt{2}-1$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形与折叠问题，勾股定理，分母有理化．由折叠的性质知 $BE = EF$ ，利用等积法列式计算即可求解．

【详解】 解： 设点 B 的对应点为点 F ，连接 EF ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为 1,

$$\therefore AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

由折叠的性质知 $BE = EF$ ，

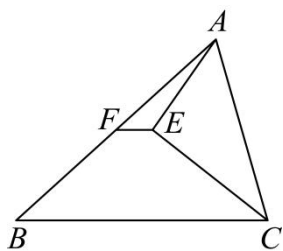
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} AB \times BE + \frac{1}{2} AC \times EF,$$

$$\therefore 1 \times 1 = BE + \sqrt{2} BE,$$

$$\therefore BE = \sqrt{2} - 1,$$

故答案为： $\sqrt{2}-1$ ．

17. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACE = \angle ECB$ ， $AE \perp EC$ ， F 是边 AB 的中点， $AE = 3$ ， $EC = 4$ ， $BC = 7$ ，那么 FE 的长是_____．



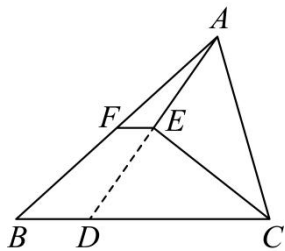
【答案】1

【解析】

【分析】本题考查三角形中位线定理，勾股定理以及全等三角形的判定和性质，解题的关键是通过延长 AE 构造全等三角形，得出线段关系，再利用中位线定理求解.

延长 AE 交 BC 于点 D ，先证 $\triangle AEC \cong \triangle DEC$ ，得到 $AC = CD$ 的长度，利用勾股定理求得 AC 的长度，再结合 E 为 AD 中点， F 是 AB 中点，利用中位线定理求 FE .

【详解】延长 AE 交 BC 于点 D ，



$$\therefore \angle AEC = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp EC,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle ECB \\ EC = EC \\ \angle AEC = \angle DEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DEC (\text{ASA}),$$

$$\therefore AC = CD, \quad AE = DE,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中， $AE = 3$ ， $EC = 4$ ，

$$\therefore AC = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore BC = BD + CD$$

$$\therefore BD = BC - CD = 7 - 5 = 2$$

$$\because AE = DE,$$

$\therefore E$ 为 AD 的中点，

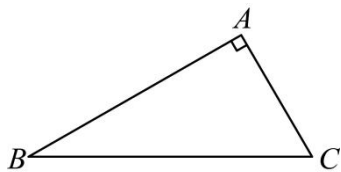
又 $\because F$ 是边 AB 的中点，

$$\therefore FE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

故答案为：1.

18. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转到 $\triangle ADE$ （点 D 与点 B 对应），

且使直线 $AD \parallel BC$ ，直线 DE 交直线 BC 于点 G ，那么 $\angle EAG$ 的度数为_____.

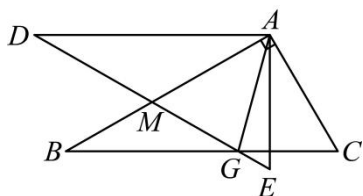


【答案】 15° 或 105°

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，平行线的性质，等角对等边. 分两种情况讨论，当点 D 与点 A 的左侧时，证明 $\angle DAM = \angle D = \angle ABC = \angle MGB = 30^\circ$ ，推出 $AD = AB = DG$ ，利用三角形内角和定理求解即可；当点 D 与点 A 的右侧时，如图，延长 BA 交 EG 于点 M ，同理即可求解.

【详解】 解：当点 D 与点 A 的左侧时，如图，



由旋转的性质得 $\angle DAE = \angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle D = \angle ABC = 30^\circ$ ， $AD = AB$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DAB = \angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle D = \angle MGB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle DAM = \angle D = \angle ABC = \angle MGB = 30^\circ$ ，

$\therefore MD = MA$ ， $MB = MG$ ，

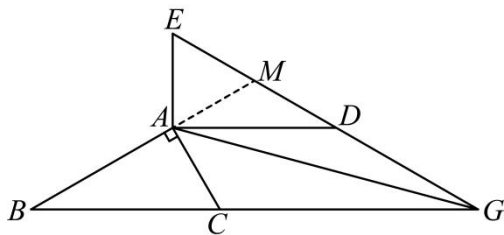
$\therefore AD = AB = DG$ ，

$\therefore \angle D = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle DAG = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle D) = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle EAG = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ ；

当点 D 与点 A 的右侧时，如图，延长 BA 交 EG 于点 M ，



由旋转的性质得 $\angle DAE = \angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle ADE = \angle ABC = 30^\circ$ ， $AD = AB$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAM = \angle ABC = 30^\circ, \quad \angle MDA = \angle MGB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle MDA = \angle ABC = \angle MGB = 30^\circ,$$

$$\therefore MD = MA, \quad MB = MG,$$

$$\therefore AD = AB = DG,$$

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG = \frac{1}{2} \angle ADE = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle EAG = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ;$$

综上, $\angle EAG$ 的度数为 15° 或 105° .

故答案为: 15° 或 105° .

三、解答题: (本大题共 8 题, 满分 66 分) 【如无特别说明, 本大题作答在答题纸上, 须写出证明或计算的主要步骤】

19. 解无理方程: $x - \sqrt{x-2} = 4$.

【答案】 $x = 6$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程的解法, 解题的关键是通过移项、平方将无理方程转化为整式方程求解, 最后要检验增根.

先移项使无理式单独在一边, 再两边平方化为整式方程, 求解整式方程后检验根的有效性.

【详解】 解: $x - 4 = \sqrt{x-2}$.

$$x^2 - 8x + 16 = x - 2,$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0,$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 6$$

经检验 $x_1 = 3$ 是增根, 舍去,

所以, 原方程的根是 $x = 6$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0 & \text{①} \\ x - y = 1 & \text{②} \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} \\ y_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查高次方程（组），将①分解成 $x-3y=0$ 或 $2x+y=0$ ，再与② 联立方程组求解即可.

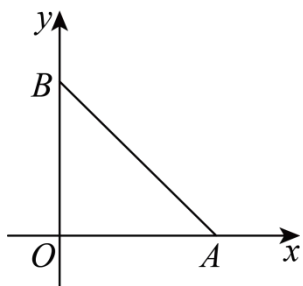
【详解】 解：由①得， $(x-3y)(2x+y)=0$ ，

得 $x-3y=0$ 或 $2x+y=0$ ，

原方程组可化为： $\begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ ，

解得原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ y_1=\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=\frac{1}{3} \\ y_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$.

21. 在平面直角坐标系中，已知直线 $y_1 = -x + 3$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点（如图所示），直线 $y_2 = ax + a (a > 0)$ 交 x 轴于点 C .



(1) 点 A 、 B 的坐标，并求出直线 y_2 位于 x 轴上方所有点的横坐标的取值范围；

(2) 现将直线 y_2 平移，使其经过点 B ，交 x 轴于点 D ，如果 $BD = BA$ ，求 a 的值.

【答案】 (1) $A(3,0), B(0,3)$, $x > -1$

(2) $a = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的综合应用，等腰三角形的性质等知识，解题的关键是：

(1) 利用直线 $y_1 = -x + 3$ 确定 A 、 B 的坐标，利用直线 $y_2 = ax + a (a > 0)$ 确定 C 的坐标，然后利用一次函数的性质求解即可；

(2) 根据三线合一的性质可得出 $DO = AO = 3$ ，则 $D(-3,0)$ ，根据平移的性质可设 $y_{BD} = ax + 3$ ，把点 D 的坐标代入求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y_1 = -x + 3$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 3$; 当 $y = 0$ 时, $-x + 3 = 0$, 解得 $x = 3$,

$\therefore A(3, 0), B(0, 3)$,

$\because$ 直线 $y_2 = ax + a (a > 0)$ 交 x 轴于点 C ,

$\therefore$ 当 $y = 0$ 时, $ax + a = 0$, 解得 $x = -1$,

$\therefore C(-1, 0)$,

$\therefore$ 直线 y_2 位于 x 轴上方所有点的横坐标的取值范围 $x > -1$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 将直线 y_2 平移, 经过点 $B(0, 3)$, 交 x 轴于点 D , 且 $BD = BA, BO \perp DA$,

$\therefore DO = OA = 3$,

$\therefore D(-3, 0)$,

$\because$ 直线 y_{BD} 由直线 y_2 平移而得到,

$\therefore$ 两直线平行,

设 $y_{BD} = ax + 3$,

把 $D(-3, 0)$ 代入, 得 $-3a + 3 = 0$,

$\therefore a = 1$.

22. 小王送外卖比送快递每单多赚 2 元钱. 某段时间内, 他送快递赚了 1200 元, 送外卖赚了 1500 元. 已知快递比外卖多送了 100 单, 求送快递每单赚多少钱?

【答案】送快递每单赚 3 元

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的实际应用, 一元二次方程的解法, 解题关键是准确列出分式方程.

先设送快递每单赚 x 元, 再根据题意列出分式方程求解, 注意要验根.

【详解】解: 设送快递每单赚 x 元, 由题意得:

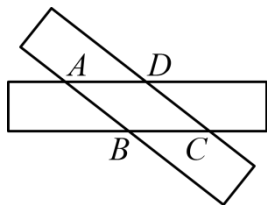
$$\frac{1200}{x} - \frac{1500}{x+2} = 100,$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0, \text{ 解得 } x_1 = 3, x_2 = -8.$$

经检验, x_1 、 x_2 都是原方程的根, 但 $x_2 = -8$ 不合题意, 舍去.

答：送快递每单赚 3 元.

23. 操作 现有两张完全相同的长方形纸条，它们的长为 25 厘米，宽为 5 厘米，将其交叠摆放（如图所示），使它们对角线的交点重合. 现固定其中一张纸片，将另一张纸片绕对角线交点旋转一定角度，使它们的重叠部分始终形成四边形 $ABCD$.



(1) 重叠部分四边形 $ABCD$ 是什么形状的四边形？请说明理由，

(2) 重叠部分图形的最小面积和最大面积分别是多少？请直接填写：最小面积_____ cm^2 ，最大面积_____ cm^2 .

【答案】(1) 四边形 $ABCD$ 是菱形（特殊位置时为正方形），见解析

(2) 25, 65

【解析】

【分析】本题考查菱形的判定和性质，正方形的判定，全等三角形的判定和性质，勾股定理，正确理解题意是解题的关键：

(1) 先证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，过点 A 分别作 $AE \perp BC$ ， $AF \perp DC$ ，垂足分别是点 E 、 F ，证明 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ADF$ ，得出 $AD = AB$ ，即可得出结论；（特殊的，当 $AB \perp BC$ ，即 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，菱形 $ABCD$ 是正方形）

(2) 当两张纸条垂直时，重叠部分为正方形（此时菱形邻边与长方形宽重合），面积最小，设菱形 $ABCD$ 的边长为 $x\text{cm}$ ，根据勾股定理得出 $x^2 = 5^2 + (25 - x)^2$ ，最大面积是以长方形宽 5cm 为高，菱形边长 13cm 为底的四边形即可得出答案.

【小问 1 详解】

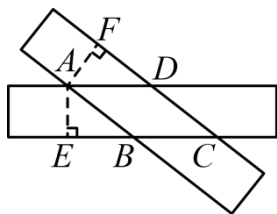
解：四边形 $ABCD$ 是菱形（特殊位置时为正方形）.

证明：∵ 两张完全相同的长方形纸条，

∴ $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel DC$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

过点 A 分别作 $AE \perp BC$ ， $AF \perp DC$ ，垂足分别是点 E 、 F ，



$$\therefore \angle AFD = \angle AEB = 90^\circ, \quad AF = AE = 5\text{cm},$$

$$\because \angle FDA = \angle DCB, \angle DCB = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle FDA = \angle ABE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ADF,$$

$$\therefore AD = AB,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

(特殊的, 当 $AB \perp BC$, 即 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, 菱形 $ABCD$ 是正方形)

【小问 2 详解】

解: 当两张纸条垂直时, 重叠部分为正方形 (此时菱形邻边与长方形宽重合), 面积最小, 正方形边长等于长方形纸条的宽, 即 5cm ,

所以最小面积为 $5 \times 5 = 25\text{cm}^2$;

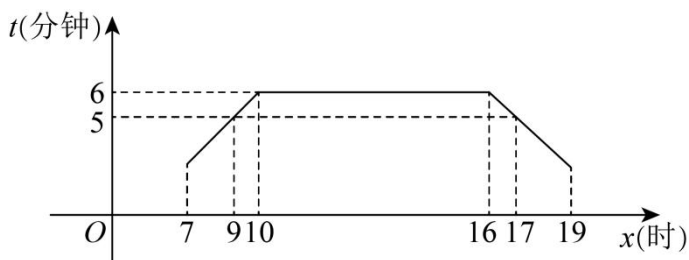
设菱形 $ABCD$ 的边长为 $x\text{cm}$, 在由长方形长的剩余部分与宽构成的直角三角形中, 一条直角边为长方形的宽 5cm , 另一条直角边为 $(25-x)\text{cm}$, 斜边为菱形边长 $x\text{cm}$,

$$\text{根据勾股定理 } x^2 = 5^2 + (25-x)^2,$$

$$\text{解得: } x = 13$$

最大面积是以长方形宽 5cm 为高, 菱形边长 13cm 为底的四边形, 最大面积为 $5 \times 13 = 65\text{cm}^2$.

24. 从火车站至人民广场, 地铁列车在非高峰时段 (10~16 时), 相邻班次之间的间隔时间均为 6 分钟: 高峰时段 (7~10 时和 16~19 时), 相邻班次间隔时间 t (分钟) 随时刻 x (时) 变化而变化, 分别可以近似看成是 t 关于 x 的一次函数关系, 已知每天 9 时和 17 时的地铁相邻班次间隔时间都是 5 分钟 (图像如图所示),



(1) 请分别将每天 7~19 时三个时段, 相邻班次的间隔时间 t (分钟) 关于某一时刻 x (时) 的函数解析式填入表内.

时段	峰段	t (分钟) 关于 x (时) 的函数解析式
7~10 时	高峰段	
10~16 时	非高峰段	
16~19 时	高峰段	

(2) 游客从火车站赴人民广场附近某商场, 可选择先乘地铁 7 分钟至人民广场站, 假设地铁平均候车时间为相邻班次间隔时间的一半 (即 $\frac{t}{2}$), 然后再步行 10 分钟到达商场; 游客也可选择乘出租车直接到达商场, 高峰时段用时 19 分钟, 非高峰时段用时 14 分钟. 如果游客在上午 7~12 时之间到达火车站 (火车站到地铁站或出租点时间忽略不计), 为了尽快抵达商场, 请为游客选择出行方案, 并分析说明理由.

【答案】 (1) $t = x - 4$, $t = 6$, $t = -x + 22$

(2) 当 $7 \leq x < 8$ 时, 选择地铁; 当 $x = 8$ 时, 两种皆可; 当 $8 < x \leq 12$ 时, 选择出租

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用, 截图的关键是:

(1) 根据待定系数法求解即可;

(2) 先求出非高峰时段地铁出行为 20 分钟 $>$ 19 分钟, 再求出高峰时段 7~10 时地铁出行和出租车用时相等对应的时刻, 最后分情况讨论结合函数图象求解即可.

【小问 1 详解】

解: 7~10 时

设 $t = k_1x + b_1$,

把 $(9, 5)$, $(10, 6)$ 代入, 得
$$\begin{cases} 9k_1 + b_1 = 5 \\ 10k_1 + b_1 = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = 1 \\ b_1 = -4 \end{cases},$$

$$\therefore t = x - 4;$$

$$\text{当 } 10 \sim 16 \text{ 时, } t = 6;$$

$$\text{当 } 16 \sim 19 \text{ 时,}$$

$$\text{设 } t = k_2 x + b_2,$$

$$\text{把 } (17, 5), (16, 6) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} 17k_2 + b_2 = 5 \\ 16k_2 + b_2 = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = -1 \\ b_2 = 22 \end{cases},$$

$$\therefore t = -x + 22;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 非高峰时段地铁出行: } \frac{6}{2} + 7 + 10 = 20 \text{ 分钟} > 19 \text{ 分钟}$$

高峰时段 7~10 时, 当地铁出行的时间与出租车的时间相等时,

$$\text{则 } \frac{x-4}{2} + 7 + 10 = 19,$$

$$\text{解得 } x = 8,$$

综上, 当 $7 \leq x < 8$ 时, 选择地铁; 当 $x = 8$ 时, 两种皆可; 当 $8 < x \leq 12$ 时, 选择出租.

25. 平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别在 AD, BC 上, 连接 AF, BE 交于点 G , 连接 CE, DF 交于点 H , 四边形 $EGFH$ 是矩形.

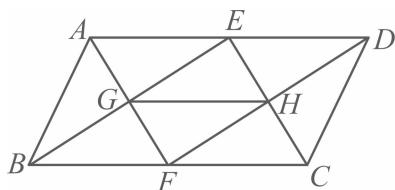


图1

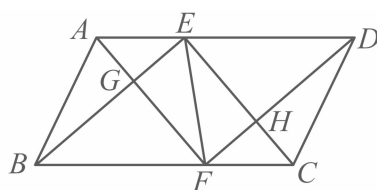


图2

(1) 如图 1, 连接 GH , 如果 $GH \parallel AD$, 求证: ① $AE = ED$; ② $AD = 2AB$;

(2) 如图 2, 若 $AE = CF = a, BF = DE = b$, 且 $a < b$, 又 $EF = AB$, 用含 a, b 的代数式表示 AB 的长. 请

直接写出结果: $AB =$ _____.

【答案】(1) ①见解析②见解析

$$(2) \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2}}{2}$$

【解析】

【分析】(1) ①连接 EF ，证明四边形 $AGHE$ 及 $EGHD$ 都是平行四边形，得出 $AE = GH, ED = GH$ ，即可得出 $AE = ED$ ；

②先证明四边形 $ABFE$ 为平行四边形，根据四边形 $EGFH$ 是矩形，得出 $AF \perp BE$ ，证明四边形 $ABFE$ 是菱形，得出 $AB = AE = \frac{1}{2}AD$ ，即可得出结论；

(2) 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ， $EN \perp BC$ 于点 N ，证明 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ENF$ (HL)，得出 $\angle ABM = \angle ENF$ ，证明 $\triangle ABF \cong \triangle ENF$ (SAS)，得出 $\angle AFB = \angle ENF$ ， $AF = EN$ ，证明 $\triangle AEG$ 与 $\triangle BGF$ 为等腰直角三角形，得出 $AG = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ， $BG = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ ，最后根据勾股定理求出结果即可。

【小问 1 详解】

证明：①连接 EF ，如图所示：

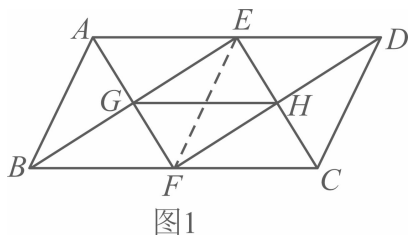


图1

$\because$ 四边形 $EGFH$ 是矩形，

$\therefore FD \parallel BE, AF \parallel EC$ ，

即 $GE \parallel HD, AG \parallel EH$ ，

又 $\because GH \parallel AD$ ，

$\therefore GH \parallel AE, GH \parallel ED$ ，

$\therefore$ 四边形 $AGHE$ 及 $EGHD$ 都是平行四边形，

$\therefore AE = GH, ED = GH$ ，

$\therefore AE = ED$ ；

②由①得， E 为 AD 中点，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC, AD = BC$ ，

$\because GH \parallel AD$ ，

$$\therefore GH \parallel BC,$$

同理可得 F 为 BC 中点,

$$\therefore AE = BF,$$

$$\because AE \parallel BF,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为平行四边形,

$\because$ 四边形 $EGFH$ 是矩形,

$$\therefore \angle EGF = 90^\circ, \text{ 即 } AF \perp BE,$$

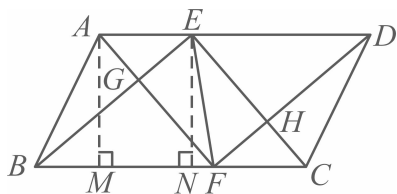
$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是菱形,

$$\therefore AB = AE = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore AD = 2AB.$$

【小问 2 详解】

解: 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , $EN \perp BC$ 于点 N , 如图所示:



则 $AM \parallel EN$,

$$\because \square ABCD \text{ 中 } AE \parallel MN,$$

$\therefore$ 四边形 $AMNE$ 为平行四边形,

$$\therefore AM = EN,$$

$$\because AB = EF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle EFN (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle ABM = \angle EFN,$$

$$\because BF = FB,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle EFB (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AFB = \angle EBF, \quad AF = BE,$$

$$\therefore GB = GF,$$

$$\therefore BE - BG = AF - GF,$$

即 $AG = EG$,

$$\because \text{矩形 } EGFH \text{ 中 } \angle EGF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle BGF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AEG$ 与 $\triangle BGF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AE = a, BF = b,$$

$$\therefore AG = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad BG = \frac{\sqrt{2}}{2}b,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的判定和性质，矩形的性质，三角形全等的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，勾股定理，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握相关的判定和性质.

26. 如图 1，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ，且 $AB = AD$ ， $\angle B = 2\angle ACB$.

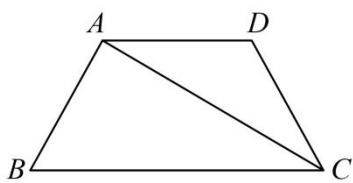


图1

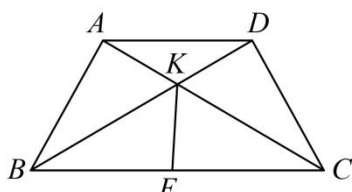


图2

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是等腰梯形；

(2) 如图 2，设 AC 、 BD 相交于点 K ，点 E 在 BC 上， $BE = AD$ ，联结 KE ，求证： $\angle CDK + \angle CEK = 180^\circ$ ；

(3) 如果 $AB = 1$ ， $AC = x$ ， $BC = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

$$(3) \quad y = x^2 - 1, \quad \text{定义域 } \sqrt{2} < x < 2$$

【解析】

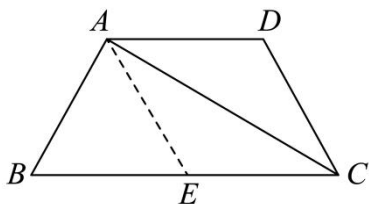
【分析】 (1) 在 CB 上取点 E ，使 $AE = AB$ ，利用角的转换，证明四边形 $AECD$ 是平行四边形，即可证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形；

(2) 利用等腰梯形的性质结合平行线的性质求得 $\angle DBC = \angle ACB = \angle ADB$ ，推出 $KB = KC$ ，再证明 $\triangle DKC \cong \triangle EKB$ ，据此证明即可；

(3) 在 BC 上取点 P ，使 $AP = AB = 1$ ，设 $BH = HP = t$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 和 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中，利用勾股定理列式得到 $AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2 = AH^2$ ，据此求解即可.

【小问 1 详解】

证明：在 CB 上取点 E ，使 $AE = AB$ ，



$$\because \angle B = 2\angle ACB,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle B = \angle ACB + \angle EAC = 2\angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle EAC, \quad EC = AE,$$

$$\text{又} \because AB = AD,$$

$$\therefore EC = AE = AB = AD,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形,

$$\therefore DC = AE = AB.$$

$$\because AD \parallel BC, AD < BC.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形;

【小问 2 详解】

证明: $\because AB = AD = CD,$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA = \angle ACB,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore \angle ABC = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle DCB,$$

$$\therefore KB = KC,$$

$$\text{又} \because BE = AD,$$

$$\therefore BE = CD,$$

$$\therefore \triangle DKC \cong \triangle EKB,$$

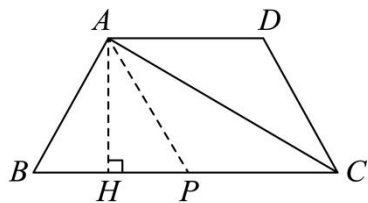
$$\therefore \angle CDK = \angle BEK,$$

$$\because \angle CEK + \angle BEK = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDK + \angle CEK = 180^\circ;$$

【小问3详解】

解：在 BC 上取点 P ，使 $AP = AB = 1$ ，



同理 $AD = PC$ ，

$$\because AB = AD,$$

$$\therefore AB = AP = PC = 1,$$

作 $AH \perp BC$ ，得 $BH = HP$ ，

设 $BH = HP = t$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 和 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中，

$$\text{由 } AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2 = AH^2,$$

$$\text{得 } 1 - t^2 = x^2 - (1 + t)^2, \quad t = \frac{1}{2}(x^2 - 2),$$

$$BC = 1 + 2t = x^2 - 1,$$

$$\therefore y = x^2 - 1, \text{ 定义域 } \sqrt{2} < x < 2.$$

【点睛】本题考查了等腰梯形的判定，勾股定理，平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，正确作出辅助线是解题的关键.