

2024 学年第二学期期末学业质量调研八年级数学

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个结论中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上. 】

1. 一次函数 $y = -2x - 4$ 在 y 轴上的截距是 ()

- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

【答案】D

【解析】

【分析】代入 $x=0$ 求出 y 值, 此题得解.

【详解】解: 当 $x=0$ 时, $y=-2 \times 0 - 4 = -4$,

$\therefore$ 一次函数 $y=-2x-4$ 在 y 轴上的截距是 -4 .

故选: D.

【点睛】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 牢记直线在 y 轴上的截距是直线与 y 轴交点的纵坐标是解题的关键.

2. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

- A. $\sqrt{x-2} + 3 = 0$ B. $x^4 + 16 = 0$ C. $\sqrt{2x+3} = -x$ D. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了无理方程, 二次根式有意义的条件, 一元二次方程的解和分式方程, 解题的关键是掌握以上知识点.

根据二次根式有意义的条件, 一元二次方程的解和分式方程逐项判断求解即可.

【详解】选项 A: $\sqrt{x-2} + 3 = 0$

$\because \sqrt{x-2} \geq 0$,

$\therefore \sqrt{x-2}+3 \geq 3$, 不可能等于 0, 无解, 不符合题意;

选项 B: $x^4+16=0$

$\therefore x^4 \geq 0$, 而 $16 > 0$,

$\therefore x^4+16 \geq 16 > 0$, 无解, 不符合题意;

选项 C: $\sqrt{2x+3}=-x$

$\therefore 2x+3 \geq 0, -x \geq 0$

$\therefore -1.5 \leq x \leq 0$,

$\therefore \sqrt{2x+3}=-x$

两边平方得: $2x+3=x^2$,

整理为 $x^2-2x-3=0$,

解得 $x=3$ 或 $x=-1$.

检验: $x=3$ 不满足 $x \leq 0$, 舍去; $x=-1$ 满足范围, 代入原方程成立, 故有实数根 $x=-1$, 符合题意;

选项 D: $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$

$\therefore \frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$

去分母得, $x=1$

检验: 将 $x=1$ 代入 $x-1=0$,

$\therefore x=1$ 是原方程的增根,

$\therefore$ 原方程无解, 故不符合题意;

故选: C.

3. 一次函数 $y=x+1$ 的图像不经过的象限是()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了一次函数图象, 熟练掌握一次函数图象及其性质是解题的关键.

根据 k 、 b 的符号判断即可.

【详解】 $\because k=1>0, b=1>0$,

$\therefore$ 一次函数中 y 随 x 的增大而增大, 且与 y 轴交于正半轴,

∴ 一次函数 $y = x + 1$ 的图像经过第一象限、第二象限、第三象限,

∴ 图象不经过第四象限,

故选: D.

4. 解方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} = 2$ 时, 设 $\frac{x-1}{x} = y$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是 ()

- A. $3y^2 - 2y - 1 = 0$ B. $y^2 - 2y - 3 = 0$ C. $y^2 + 2y - 3 = 0$ D. $y^2 - 3y - 2 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了解分式方程, 设 $\frac{x-1}{x} = y$, 将原方程中的分式项用 y 表示, 通过代数变形消去分母, 转化为整式方程.

【详解】设 $\frac{x-1}{x} = y$, 则 $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{y}$,

因此 $\frac{3x}{x-1} = 3 \cdot \frac{1}{y}$.

原方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} = 2$ 可化为: $y - \frac{3}{y} = 2$

两边同乘 y , 消去分母: $y^2 - 3 = 2y$

移项整理得: $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故选: B.

5. 下列事件是随机事件的是 ()

- A. 任取一个实数, 它的平方小于零
B. 投掷一枚骰子, 朝上一面的点数不超过 6
C. 掷一枚均匀的硬币两次, 两次都是正面朝上
D. 将 10 个球放入 3 个袋子中, 至少有一个袋子里的球超过 3 个

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了随机事件的定义, 根据随机事件的定义, 可能发生也可能不发生的事件为随机事件. 逐一分析各选项是否为必然事件或不可能事件, 即可确定答案.

【详解】解: 选项 A: 实数的平方非负, 故任取一个实数, 其平方不可能小于零, 为不可能事件.

选项 B: 骰子点数最大为 6, 因此点数不超过 6 是必然事件.

选项 C: 掷硬币两次的结果有 (正, 正)、(正, 反)、(反, 正)、(反, 反) 四种可能, 两次均正面朝上是其中一种可能情况, 结果不确定, 故为随机事件.

选项 D: 若每个袋子最多放 3 个球, 3 个袋子最多容纳 9 个球, 但题目有 10 个球, 因此至少有一个袋子超过 3 个是必然事件.

综上, 只有选项 C 是随机事件.

故选: C.

6. 下列命题, 其中是假命题的是 ()

- A. 对角线相等的菱形是正方形
- B. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形
- C. 有一个角是直角且对角线互相平分的四边形是矩形
- D. 一组对角相等且一组对边相等的四边形是平行四边形

【答案】D

【解析】

【详解】此题考查了命题的真假, 正方形、菱形、矩形和平行四边形的判定定理, 根据正方形、菱形、矩形和平行四边形的判定定理逐一分析各选项的正确性, 找出假命题.

【分析】解:A. 对角线相等的菱形是正方形. 菱形对角线互相垂直, 若对角线相等, 则满足正方形的条件 (既是菱形又是矩形), 故 A 为真命题.

B. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形. 根据菱形判定定理, 对角线垂直平分的四边形四边相等, 故 B 为真命题.

C. 有一个角是直角且对角线互相平分的四边形是矩形. 对角线互相平分的四边形是平行四边形, 若有一个直角, 则此平行四边形为矩形, 故 C 为真命题.

D. 一组对角相等且一组对边相等的四边形不一定是平行四边形. 例如, 存在满足这两个条件但另一组对边不平行的四边形 (如构造反例), 故 D 为假命题.

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置.】

7. 方程 $x^3 + 27 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x=-3$

【解析】

【分析】先移项, 再开立方即可.

【详解】解: $x^3 + 27 = 0$,

$$x^3 = -27,$$

$$x = \sqrt[3]{-27} = -3,$$

故答案为: $x = -3$.

【点睛】 本题考查了求一个数的立方根, 熟记立方根的定义是解题的关键.

8. 方程 $\sqrt{2x-1} = 3$ 的解是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查的是无理方程解法, 先两边平方得: $2x-1=9$, 再进一步解答即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{2x-1} = 3,$

两边平方得: $2x-1=9,$

$$\therefore 2x=10,$$

解得: $x=5,$

经检验: $x=5$ 是原方程的解;

故答案为: 5

9. 当 a _____ 时, 关于 x 的方程 $(a-2)x=1$ 无解.

【答案】 $=2$

【解析】

【分析】 此题考查了一元一次方程的解, 方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值.

由方程无解的条件确定出 a 的值即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $(a-2)x=1$ 无解,

$$\therefore a-2=0,$$

解得: $a=2,$

故答案为: $=2$.

10. 如果直线 $y = -2x + 1$ 经过平移后得到直线 l , 直线 l 经过点 $(2, -1)$, 则直线 l 的表达式是_____.

【答案】 $y = -2x + 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数关系式, 一次函数图象平移的性质,

根据题意设直线 l 的关系式为 $y = -2x + b$ ，再将点 $(2, -1)$ 代入关系式，可得答案.

【详解】解：直线 $y = -2x + 1$ 经过平移后得到直线 l ，设直线 l 的关系式为 $y = -2x + b$ ，

$\because$ 直线 l 经过点 $(2, -1)$ ，

$$\therefore -1 = -2 \times 2 + b,$$

解得 $b = 3$ ，

所以直线 l 的关系式为 $y = -2x + 3$.

故答案为： $y = -2x + 3$.

11. 已知一次函数 $y = (m + 2)x + m$ 与 y 轴交于正半轴，则函数值 y 随 x 的增大而_____.

【答案】增大

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象的性质，

根据直线与 y 轴的正半轴相交可得 $m > 0$ ，即可得出 $m + 2 > 0$ ，再根据一次函数图象的性质得出答案.

【详解】解：当 $x = 0$ 时， $y = m$ ，

即直线 $y = (m + 2)x + m$ 与 y 轴的交点为 $(0, m)$.

$\because$ 一次函数 $y = (m + 2)x + m$ 与 y 轴交于正半轴，

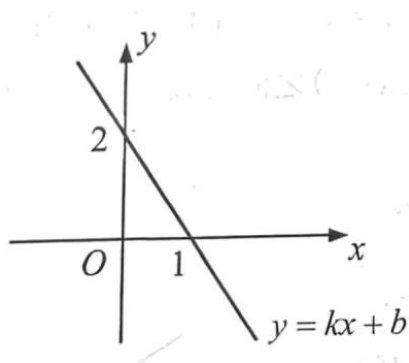
$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore m + 2 > 0,$$

$\therefore$ 一次函数 $y = (m + 2)x + m$ 的函数值 y 随着 x 的增大而增大.

故答案为：增大.

12. 如图，直线 $y = kx + b$ 过点 $(1, 0)$ 与 $(0, 2)$ ，那么关于 x 的不等式 $kx + b \leq 0$ 的解集是_____.



【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与坐标轴交点求不等式的解集，理解图象的性质是关键.

根据一次函数与坐标轴的交点，结合图形即可求解.

【详解】 解：直线 $y = kx + b$ 过点 $(1, 0)$ 与 $(0, 2)$,

$\therefore$ 当 $x \geq 1$ 时, $kx + b \leq 0$,

故答案为: $x \geq 1$.

13. 在一个不透明的袋子中装有 (除颜色外) 完全相同的 9 个白球和 3 个黑球, 从中随机摸出一个球, 摸到黑球的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了简单事件的概率的求法, 利用等可能事件的概率计算公式求解, 熟练掌握概率计算公式是解决此题的关键.

【详解】 $\because$ 在一个不透明的袋子中装有 (除颜色外) 完全相同的 9 个白球和 3 个黑球,

$\therefore$ 从中随机摸出一个, 摸到黑球的概率是 $\frac{3}{9+3} = \frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

14. 如果一个四边形的两条对角线的长都是 4cm, 那么顺次联结这个四边形的各边中点所得的四边形的周长等于_____ cm.

【答案】 8

【解析】

【分析】 此题主要是三角形中位线定理的运用. 根据三角形的中位线定理即可求得所得四边形的各边长度都是原四边形的对角线的一半, 从而求解.

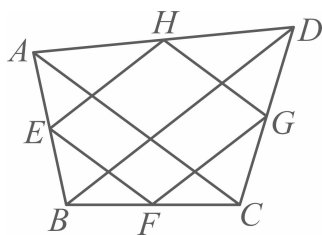
【详解】 解: 如图所示, E 、 F 、 G 、 H 分别是 $ABCD$ 四边的中点, $AC = BD = 4$,

$\therefore EF, FG, GH, EH$ 分别是 ABC, BCD, ADC, ABD 的中位线,

$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = 2, FG = \frac{1}{2}BD = 2, GH = \frac{1}{2}AC = 2, EH = \frac{1}{2}BD = 2$,

$\therefore$ 顺次连接这个四边形各边的中点所得四边形的周长等于 $2 \times 4 = 8\text{cm}$.

故答案为: 8.



15. 如果一个多边形的各个外角都是 40° ，那么这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 1260

【解析】

【分析】 本题主要考查了正多边形内角与外角综合，根据正多边形外角和为 360° 度，一个内角的度数与一个外角的度数之和为 180° 度求出正多边形的边数和一个内角的度数即可得到答案.

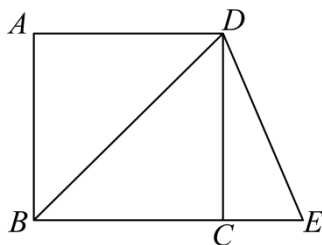
【详解】 解： $\because$ 一个多边形的各个外角都是 40° ，

$\therefore$ 这个多边形的边数为 $\frac{360^\circ}{40^\circ} = 9$ ，每个内角的度数为 $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ ，

$\therefore$ 这个多边形的内角和是 $140^\circ \times 9 = 1260^\circ$ ，

故答案为： 1260.

16. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 延长线上的一点，如果 $BE = BD$ ，那么 $\angle CDE =$ _____度.



【答案】 22.5

【解析】

【分析】 本题考查利用正方形的性质求角度，涉及对角线平分对角、等腰三角形的性质，熟记这些基本的几何图形判定及性质是解决问题的关键.

根据正方形的性质得 $\angle CBD = \angle CDB = 45^\circ$ ，由 $BE = BD$ ，得 $\angle BDE = \angle E = 67.5^\circ$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle CBD = \angle CDB = 45^\circ$ ，

$\because BE = BD$ ，

$\therefore \angle BDE = \angle E = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle CBD) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ$ ，

$\therefore \angle CDE = \angle BDE - \angle CDB = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ$ ，

故答案为：22.5.

17. 定义：如果直线 $y_1 = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$) 与直线 $y_2 = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$) 满足如下条件： $k_1 \times k_2 = -1$ 且

$b_1 + b_2 = 0$ ，那么我们就说这两条直线具有“和谐关系”，例如：直线 $y_1 = 2x + 3$ 与直线 $y_2 = -\frac{1}{2}x - 3$ ，

它们具有“和谐关系”。如果直线 $y_1 = k_1x + 2$ ($k_1 > 0$) 与直线 $y_2 = k_2x - 2$ 具有“和谐关系”，且这两条直

线与 y 轴围成的三角形面积为 $\frac{16}{5}$ ，则 $k_1 =$ _____

【答案】2 或 $\frac{1}{2}$

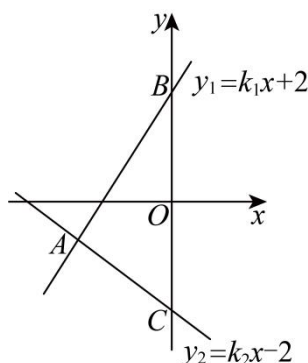
【解析】

【分析】首先画出图象，然后根据题意求出 $k_1 \times k_2 = -1$ ，然后表示出 $BC = 2 - (-2) = 4$ ，点 A 的横坐标为

$x = -\frac{4}{k_1 - k_2}$ ，然后根据题意得到 $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{k_1 - k_2} = \frac{16}{5}$ ，表示出 $k_1 \left(k_1 - \frac{5}{2} \right) = -1$ ，然后代入 $k_1 \times k_2 = -1$ 求

解即可。

【详解】如图所示，



$\because$ 直线 $y_1 = k_1x + 2$ ($k_1 > 0$) 与直线 $y_2 = k_2x - 2$ 具有“和谐关系”

$\therefore k_1 \times k_2 = -1$,

$\because y_1 = k_1x + 2$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y_1 = 2$

$\therefore B(0, 2)$

$\because y_2 = k_2x - 2$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y_2 = -2$

$\therefore C(0, -2)$

$CE = BC = 4$, $PB = PE$, $\angle E = \angle B = 90^\circ$, 证明 $\triangle AFP \cong \triangle EFG$ (ASA) 得到 $EG = AP$, $PF = GF$,
 则可证明 $AG = PE$, 设 $AP = EG = x$, 则 $AG = PE = PB = 3 - x$,
 $CG = CE - EG = 4 - x$, $DG = AD - AG = x + 1$, 由勾股定理得 $(4 - x)^2 = 3^2 + (x + 1)^2$, 解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore \angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ$, $CD = AB = 3$, $AD = BC = 4$;
 由折叠的性质可得 $CE = BC = 4$, $PB = PE$, $\angle E = \angle B = 90^\circ$,
 $\therefore \angle E = \angle A$,
 又 $\because \angle AFP = \angle EFG$, $AF = EF$,
 $\therefore \triangle AFP \cong \triangle EFG$ (ASA),
 $\therefore EG = AP$, $PF = GF$,
 $\therefore AF + GF = PF + EF$, 即 $AG = PE$,
 设 $AP = EG = x$, 则 $AG = PE = PB = 3 - x$,
 $\therefore CG = CE - EG = 4 - x$, $DG = AD - AG = x + 1$,
 在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, 由勾股定理得 $CG^2 = CD^2 + DG^2$,
 $\therefore (4 - x)^2 = 3^2 + (x + 1)^2$,
 解得 $x = \frac{3}{5}$,
 $\therefore AP = \frac{3}{5}$,
 故答案为: $\frac{3}{5}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【请将下列各题的解答过程写在答题纸的相应位置.】

19. 解方程: $\frac{x-10}{x^2-4} + 1 = \frac{3}{x+2}$.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程, 先把原方程去分母化为整式方程, 再解方程并检验即可得到答案.

【详解】 解: $\frac{x-10}{x^2-4} + 1 = \frac{3}{x+2}$

去分母得: $x - 10 + x^2 - 4 = 3(x - 2)$,

去括号得: $x - 10 + x^2 - 4 = 3x - 6$,

整理得 $x^2 - 2x - 8 = 0$,

解得 $x = 4$ 或 $x = -2$,

检验, 当 $x = 4$ 时, $(x + 2)(x - 2) \neq 0$; 当 $x = -2$ 时, $(x + 2)(x - 2) = 0$,

$\therefore x = 4$ 是原方程的解, $x = -2$ 不是原方程的解.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \text{ ①} \\ x + y = 1 \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 先将第①个方程变形为 $x + 2y = 3$, $x + 2y = -3$, 从而得到两个二元一次方程组, 再分别求解即可.

【详解】 解: 由方程①得 $(x + 2y)^2 = 9$ 则: $x + 2y = 3$ 或 $x + 2y = -3$

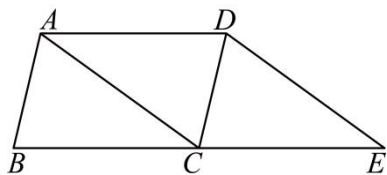
原方程组可化为
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x + 2y = -3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

解这两个二元一次方程组, 得
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -4 \end{cases}.$$

所以, 原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -4 \end{cases}.$$

【点睛】 本题主要考查的是高次方程、因式分解的应用、解二元一次方程组等知识点, 通过分解、把高次方程降次, 得到二元一次方程组是解答本题的关键.

21. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $ACED$ 都是平行四边形.



(1) 图中与 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量是 _____; $|\overrightarrow{AD}| = 2$, 则 $|\overrightarrow{BE}| =$ _____;

(2) 填空: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ _____; $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED} =$ _____;

(3) 求作: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ED}$ (不写作法, 保留作图痕迹, 写出结论).

【答案】(1) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE}$; 4

(2) $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{DC}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的知识, 属于基础题, 注意平面向量定义及三角形和平行四边形法则的熟练掌握.

(1) 根据平行四边形的性质和平面向量的性质求解即可;

(2) 利用平行四边形法则和三角形法则求解即可;

(3) 以点 A 为圆心, CD 为半径画弧, 以点 D 为圆心, AC 为半径画弧, 两弧交于点 F , 连接 CF 即为所求.

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $ACED$ 都是平行四边形

$\therefore AD = BC = CE$, $AD \parallel BC$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$,

$\therefore$ 图中与 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE}$;

$\therefore |\overrightarrow{AD}| = 2$

$\therefore |\overrightarrow{BE}| = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = 2 + 2 = 4$;

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;

$\because$ 四边形 $ACED$ 都是平行四边形

$\therefore AC \parallel DE$, $AC = DE$

$\therefore \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CA}$

$\therefore -\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

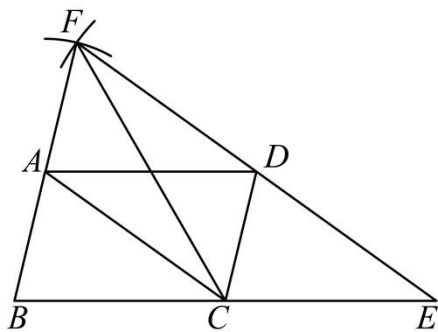
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB \parallel CD$, $AB = CD$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC};$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC};$$

【小问3详解】

如图所示,



由作图得, $AF = CD$, $AC = FD$

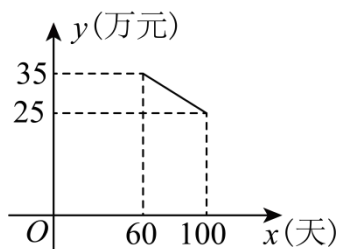
$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形

$\therefore AC \parallel DF$, $AC = DF$, $AF \parallel CD$

由以上得, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CA}$

$$\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CF}.$$

22. 某乡镇准备开展河道修建整治工程, 预计修建的河道总长为 9 千米. 根据工程预算, 当修建天数 x 满足 $60 \leq x \leq 100$ 时, 平均每天的修建费 y (万元) 与修建天数 x (天) 之间的关系如图所示.



(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 由于相关部门加强了建设力量, 预计现在每天修建量可以提升 20%, 那么可以提前 15 天完成任务, 求现在平均每天的修建费.

【答案】(1) y 关于 x 的函数关系式为 $y = -\frac{1}{4}x + 50$

(2) 现计划平均每天的修建费为 31.25 万元.

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的应用, 分式方程的应用;

(1) 设 y 关于 x 的函数关系式为 $y = kx + b$ ，再把 $(60, 35)$ ， $(100, 25)$ 代入计算即可；

(2) 设现计划修建的时间为 m 天，则原计划修建的时间为 $(m + 15)$ 天. 根据题意，得

$$\frac{9000}{m} = (1 + 20\%) \times \frac{9000}{m + 15}, \text{ 再进一步解答即可.}$$

【小问 1 详解】

解：设 y 关于 x 的函数关系式为 $y = kx + b$ ，

$$\text{根据题意，得} \begin{cases} 35 = 60k + b \\ 25 = 100k + b \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = -\frac{1}{4}, \\ b = 50 \end{cases},$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数关系式为 } y = -\frac{1}{4}x + 50;$$

【小问 2 详解】

解：设现计划修建的时间为 m 天，则原计划修建的时间为 $(m + 15)$ 天.

$$\text{根据题意，得 } \frac{9000}{m} = (1 + 20\%) \times \frac{9000}{m + 15},$$

$$\text{解得： } m = 75,$$

经检验， $m = 75$ 是原方程的解，且符合实际意义，

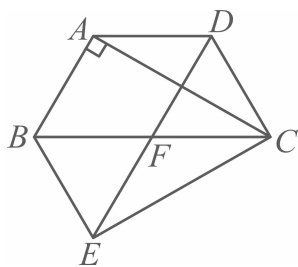
$$\therefore m = 75,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4} \times 75 + 50 = 31.25,$$

答：现计划平均每天的修建费为 31.25 万元.

23. 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ， AC 是梯形 $ABCD$ 的一条对角线， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

将 ABC 沿着 BC 翻折后得到 $\triangle EBC$ ，联结 ED 交 BC 于点 F .



(1) 求证： $BC = ED$ ；

(2) 如果 $ED \parallel AB$ ，求证：四边形 $ABED$ 是等腰梯形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的判定与性质，等腰梯形的判定与性质，熟练掌握相关知识进行证明是解答本题的关键.

(1) 证明 $\angle DCE = \angle BAC = 90^\circ$ ，利用 SAS 证明 $\triangle EDC \cong \triangle CBA$ 可得 $BC = ED$ ；

(2) 由 $\triangle EDC \cong \triangle CBA$ 知 $\angle ABC = \angle EDC$ ，由折叠得 $\angle ABC = \angle EBC$ ，又 $\angle ABC = \angle BCD$ ，得 $\angle EDC = \angle BCD$ ，由三角形内角和定理得 $\angle BEF = \angle FDC$ ，由 $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel DE$ 得 $\angle ABF = \angle DFC = \angle ADF$ ，故可得 $\angle ADE = \angle BED$ ，从而可证明四边形 $ABED$ 是等腰梯形.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，

$$\therefore \angle ABC = \angle DCB,$$

由折叠得， $\angle ECB = \angle ACB, AC = EC$ ，

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle BCE = 90^\circ, \text{ 即 } \angle ECD = 90^\circ,$$

在 $\triangle ECD$ 和 $\triangle CAB$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle BAC = \angle DCE, \\ AC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BC = ED;$$

【小问 2 详解】

证明：由折叠得 $\angle ABC = \angle EBC$ ，

$$\therefore \triangle EDC \cong \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EDC,$$

又 $\angle ABC = \angle BCD$ ，

$$\therefore \angle EDC = \angle ABC = \angle BCD,$$

又 $\angle DFC = \angle BFE$ ，

$$\therefore \angle BEF = \angle FDC,$$

$$\therefore AB \parallel DE, AB \neq DE$$

$\therefore \angle DFC = \angle ABC$, 四边形 $ABED$ 是梯形

$\therefore AD \parallel BC$,

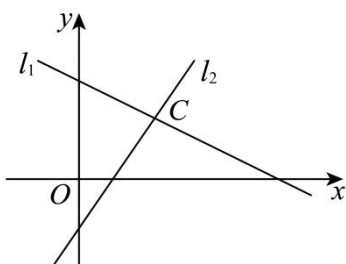
$\therefore \angle DFC = \angle ADF$,

$\therefore \angle ABC = \angle ADE$,

$\therefore \angle ADE = \angle BED$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是等腰梯形.

24. 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 4$ 与直线 $l_2: y = kx - 2$ 相交于点 $C(3, t)$.



(1) 求 t 的值及直线 l_2 的表达式;

(2) 已知点 P 是直线 l_1 上的一个动点, 过点 P 作 x 轴的垂线, 与直线 l_2 交于点 Q , 设点 P 的横坐标为 m .

①当 $PQ = 3$ 时, 求 m 的值;

②以 PQ 为对角线作菱形 $PEQF$, 当点 E 在直线 l_2 上且菱形 $PEQF$ 的面积为 8 时, 求 m 的值.

【答案】 (1) $t = \frac{5}{2}, y = \frac{3}{2}x - 2$

(2) ① $m = \frac{3}{2}$ 或 $m = \frac{9}{2}$; ② $m = 3 \pm \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 (1) 将点 $C(3, t)$ 代入 l_1 求出 t , 得出 $C\left(3, \frac{5}{2}\right)$, 再将 $C\left(3, \frac{5}{2}\right)$ 代入 l_2 即可求解;

(2) ①根据题意可得 $P\left(m, -\frac{1}{2}m + 4\right)$, $Q\left(m, \frac{3}{2}m - 2\right)$, 表示出 $PQ = |-2m + 6|$, 再根据 $PQ = 3$, 列方程求解即可;

②根据题意可得 $PQ \perp x$ 轴, 根据菱形的性质得出 $PQ \perp EF, PG = QG, FG = EG$, 则 $EF \parallel x$ 轴, 根据

$P\left(m, -\frac{1}{2}m + 4\right)$, $Q\left(m, \frac{3}{2}m - 2\right)$, $PQ = |-2m + 6|$, 得出 $G\left(m, \frac{1}{2}m + 1\right)$, $E\left(\frac{1}{3}m + 2, \frac{1}{2}m + 1\right)$,

$$EG = \left| -\frac{2}{3}m + 2 \right|, \text{ 根据 } S_{\text{菱形}PEQF} = \frac{1}{2} \times |-2m+6| \times 2 \left| -\frac{2}{3}m + 2 \right| = 8, \text{ 解方程即可.}$$

【小问1 详解】

$$\text{解: 将点 } C(3, t) \text{ 代入 } l_1 \text{ 得: } t = -\frac{1}{2} \times 3 + 4 = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2},$$

$$\text{则 } C\left(3, \frac{5}{2}\right),$$

$$\text{将 } C\left(3, \frac{5}{2}\right) \text{ 代入 } l_2 \text{ 得: } \frac{5}{2} = k \times 3 - 2, \text{ 解得: } k = \frac{3}{2},$$

$$\text{因此, 直线 } l_2 \text{ 的表达式为: } y = \frac{3}{2}x - 2.$$

【小问2 详解】

$$\text{解: ①根据题意可得 } P\left(m, -\frac{1}{2}m + 4\right), Q\left(m, \frac{3}{2}m - 2\right),$$

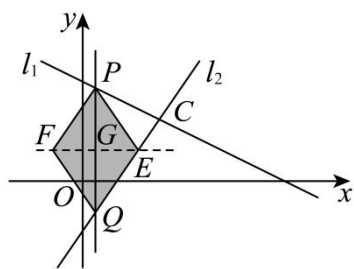
$$\text{则 } PQ = \left| \left(-\frac{1}{2}m + 4\right) - \left(\frac{3}{2}m - 2\right) \right| = \left| -\frac{1}{2}m + 4 - \frac{3}{2}m + 2 \right| = |-2m + 6|,$$

$$\text{若 } PQ = 3,$$

$$\text{则 } |-2m + 6| = 3, \text{ 即 } -2m + 6 = 3 \text{ 或 } -2m + 6 = -3,$$

$$\text{解得: } m = \frac{3}{2} \text{ 或 } m = \frac{9}{2}.$$

②如图, 根据题意可得 $PQ \perp x$ 轴,



$\therefore$ 以 PQ 为对角线作菱形 $PEQF$,

$$\therefore PQ \perp EF, PG = QG, FG = EG,$$

$$\therefore EF \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore P\left(m, -\frac{1}{2}m + 4\right), Q\left(m, \frac{3}{2}m - 2\right), PQ = |-2m + 6|,$$

$$\therefore G\left(m, \frac{1}{2}m+1\right), E\left(\frac{1}{3}m+2, \frac{1}{2}m+1\right),$$

$$\therefore EG = \left|\frac{1}{3}m+2-m\right| = \left|-\frac{2}{3}m+2\right|,$$

$$\therefore S_{\text{菱形}PEQF} = \frac{1}{2} \times |-2m+6| \times 2 \left|-\frac{2}{3}m+2\right| = 8,$$

$$\text{化简得: } \left|\frac{1}{3}m^2 - 2m + 3\right| = 2,$$

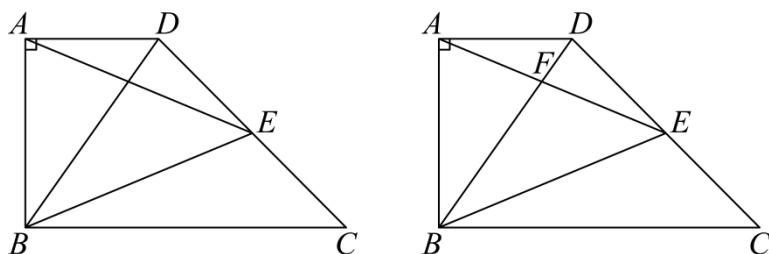
$$\text{解 } \frac{1}{3}m^2 - 2m + 3 = 2 \text{ 得: } m = 3 \pm \sqrt{6},$$

$$\text{解 } \frac{1}{3}m^2 - 2m + 3 = -2 \text{ 得: 方程无解,}$$

综上, $m = 3 \pm \sqrt{6}$.

【点睛】该题考查了一次函数的几何综合，一次函数解析式求解，菱形的性质，解一元二次方程等知识点，解题的关键是数形结合.

25. 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ ， $AD = 2$ ， $CD = 4$ ，点 E 是 CD 的中点，连接 AE 、 BE 。



备用图

- (1) 求证: $\angle AEB = 2\angle EBC$;
- (2) 设 $BC = x$, $S_{\triangle ABE} = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式 (不写定义域);
- (3) 设 AE 、 BD 交点为 F , 当 $\triangle BEF$ 为直角三角形时, 求 BC 的长.

【答案】(1) 证明过程见详解

$$(2) y = \frac{(x+2)\sqrt{-x^2+4x+12}}{4}$$

(3) 当 $\triangle BEF$ 为直角三角形时, BC 的长为 4

【解析】

【分析】(1) 如图所示，作 $EK \perp AB$ 于点 K ，则 $\angle EKA = \angle EKB = 90^\circ$ ， EK 垂直平分 AB ，

$\angle AEK = \angle BEK$, $\angle BEC = \angle BEK$, 则 $\angle AEB = 2\angle BEC$, 由此即可求解;

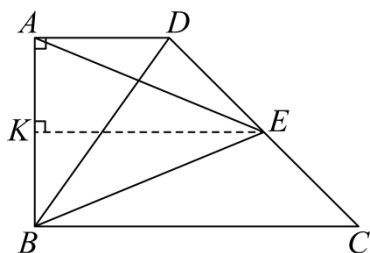
(2) 如图所示, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H , 作 $EK \perp AB$ 于点 K , 则 $\angle EKA = \angle EKB = 90^\circ$, 点 K 是 AB 中点, 即 EK 是梯形 $ABCD$ 的中位线, $AK = KB$, $EK = \frac{AD + BC}{2} = \frac{2 + x}{2}$, 在 $Rt\triangle CEH$ 中, 由勾股定理得到

$$EH = \sqrt{CE^2 - CH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{2}, \text{ 由此根据三角形面积的计算即可求解;}$$

(3) 根据题意, 分类讨论: 当 $\angle BFE = 90^\circ$ 时, 即 $BD \perp AE$; 如图所示, 当 $\angle BEF = 90^\circ$, 即 $BE \perp AE$; 当 $\angle EBF = 90^\circ$ 时; 由此即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 如图所示, 作 $EK \perp AB$ 于点 K , 则 $\angle EKA = \angle EKB = 90^\circ$,



$\because AD \parallel BC$, $\angle DAB = 90^\circ$, 点 E 是 CD 的中点,

$\therefore AD \parallel EK \parallel BC$, EK 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$\therefore AK = BK$,

$\therefore EK$ 垂直平分 AB ,

$\therefore \angle AEK = \angle BEK$,

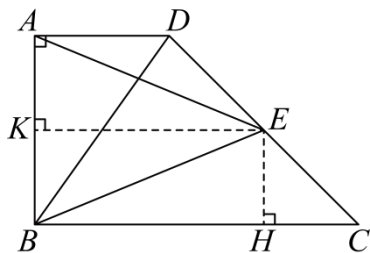
$\because EK \parallel BC$,

$\therefore \angle BEC = \angle BEK$,

$\therefore \angle AEB = 2\angle BEC$;

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H , 作 $EK \perp AB$ 于点 K , 则 $\angle EKA = \angle EKB = 90^\circ$,



$\because AD \parallel BC$, $\angle DAB = 90^\circ$, 点 E 是 CD 中点,

$\therefore \angle DAB + \angle EKA = 180^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AD \parallel EK \parallel BC$,

$\therefore$ 点 K 是 AB 中点, 即 EK 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$$\therefore AK = KB, EK = \frac{AD + BC}{2} = \frac{2 + x}{2},$$

$\because \angle EKB = \angle ABC = \angle BKE = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EKBH$ 是矩形,

$$\therefore BK = BH, EK = BH = \frac{2 + x}{2},$$

$$\therefore CH = BC - BH = x - \frac{2 + x}{2} = \frac{x - 2}{2},$$

$$\text{在 } Rt\triangle CEH \text{ 中, } EH = \sqrt{CE^2 - CH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{2},$$

$$\therefore AB = 2BK = 2EH = 2 \times \frac{\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{2} = \sqrt{-x^2 + 4x + 12},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EK = \frac{1}{2} \times \frac{2 + x}{2} \times \sqrt{-x^2 + 4x + 12} = \frac{(x + 2)\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4},$$

$$\therefore y = \frac{(x + 2)\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}{4};$$

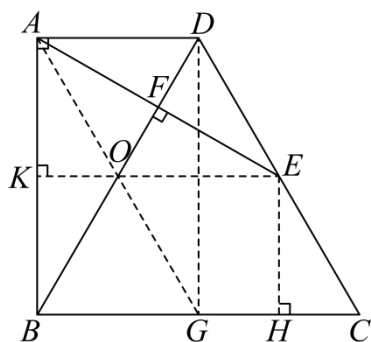
【小问 3 详解】

解: 如图所示, 连接 AG 与 BD 交于点 O ,

$\because$ 四边形 $ABGD$ 是矩形,

$\therefore$ 点 O 是 BD 中点,

$\therefore$ 点 E, O, K 三点共线,



当 $\angle BFE = 90^\circ$ 时, 即 $BD \perp AE$,

$$\therefore AD = DE = 2,$$

$$\therefore AF = EF,$$

$$\therefore AD \parallel EO,$$

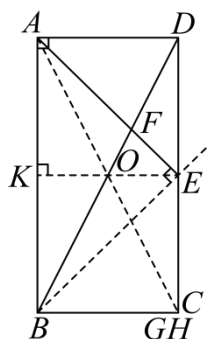
$$\therefore \angle DAF = \angle OEF, \text{ 且 } \angle AFD = \angle EFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle EOF (ASA),$$

$$\therefore AD = OE = 2,$$

$$\therefore BC = 2OE = 4;$$

如图所示, 当 $\angle BEF = 90^\circ$, 即 $BE \perp AE$, 由 (1) 得到 $AE = BE$, 则 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形,



$$\therefore \angle AEK = \angle BEK = 45^\circ = \angle KAE = \angle KBE,$$

$$\therefore \angle HBE = \angle HEB = 45^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $BHEK$ 是正方形,

$\therefore BC = AD = 2$, 此时与题目中的梯形 $ABCD$ 矛盾, 不符合题意;

当 $\angle EBF = 90^\circ$ 时,

$$\therefore \angle EBF < \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 这种情况不存在;

综上所述, 当 $\triangle BEF$ 为直角三角形时, BC 的长为 4.

【点睛】 本题主要考查梯形的中位线, 函数关系, 等腰三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的性质, 中位线的判的性质, 矩形的判和性质等知识的综合, 掌握以上知识, 数形结合分析是关键.