

期末押题重难点检测卷（培优卷）

（满分 100 分，考试时间 120 分钟，共 25 题）

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上；
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 写在本试卷上无效；
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效；
4. 测试范围：八下全部内容；
5. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷（选择题）

一、选择题（6 小题，每小题 2 分，共 12 分）

1. (24-25 八年级下·上海嘉定·阶段练习) 对于非零实数 a, b ，规定 $a \oplus b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ，若 $(2x-1) \oplus 2 = 1$ ，则 x 的值为（ ）

- A. 3 B. 2 C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【分析】本题主要考查了解分式方程，定义新运算，

根据新定义可得 $\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2} = 1$ ，再解分式方程即可.

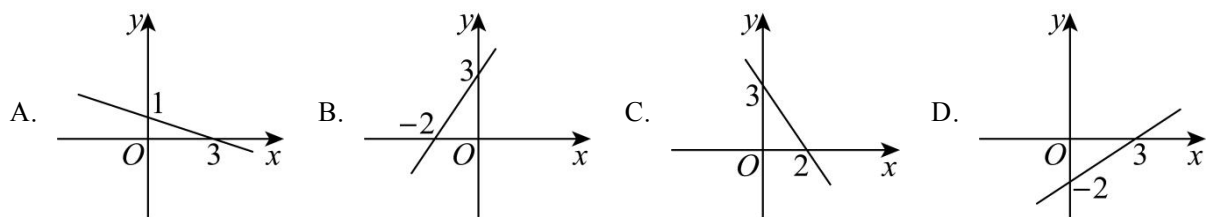
【详解】解：根据题意，得 $\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2} = 1$ ，

解得 $x = \frac{5}{6}$ ，

经检验， $x = \frac{5}{6}$ 是原方程的根.

故选：C.

2. (24-25 八年级下·上海宝山·期中) 已知不等式 $kx + b \geq 0$ 的解集是 $x \leq 3$ ，则一次函数 $y = kx + b$ 的图像可能是（ ）



【答案】A

【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式及一次函数的图象，熟知一次函数与一元一次不等式之间的关系是解题的关键。

利用数形结合的数学思想，得出函数 $y = kx + b$ 在 x 轴上方的部分所对应的自变量取值范围是 $x < 3$ ，据此可解决问题。

【详解】解：∵不等式 $kx + b \geq 0$ 的解集是 $x \leq 3$ ，

∴函数 $y = kx + b$ 的图象在 x 轴上方的部分所对应的自变量的取值范围是 $x < 3$ 。

A：图象在 x 轴上方的部分所对应的自变量的取值范围是 $x < 3$ ，故该选项符合题意；

B：图象在 x 轴上方的部分所对应的自变量的取值范围是 $x < 0$ ，故该选项不符合题意；

C：图象在 x 轴上方的部分所对应的自变量的取值范围是 $x < 2$ ，故该选项不符合题意；

D：图象在 x 轴上方的部分所对应的自变量的取值范围是 $x > 3$ ，故该选项不符合题意。

故选：A。

3. (24-25 八年级下·上海奉贤·阶段练习) 有四个图书架，每个图书架上整齐摆放着 10 本书，这些书除类别外其余都相同。若分别从每个图书架上随意抽取一本，抽到的书是文学类书籍这一事件为必然事件，应选的图书架是 ()

- | | |
|----|----------------------|
| A. | 0 本文学类书籍
10本传记类书籍 |
| B. | 2 本文学类书籍
8 本传记类书籍 |
| C. | 9 本文学类书籍
1 本传记类书籍 |
| D. | 10本文学类书籍
0 本传记类书籍 |

【答案】D

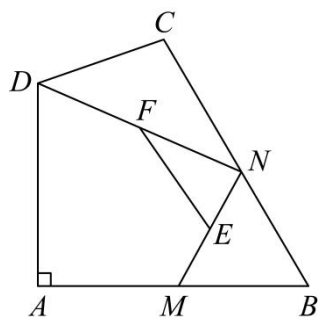
【分析】本题主要考查了必然事件的定义，根据必然事件指在一定条件下，一定发生的事件即可得出每个图书架上的 10 本书全为文学类书籍，进而可得出答案。

【详解】解：∵分别从每个图书架上随意抽取一本，抽到的书是文学类书籍这一事件为必然事件

∴每个图书架上的 10 本书全为文学类书籍，

故选：D

4. (24-25 八年级下·上海静安·期中) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $AD = 6$ ，点 M ， N 分别在边 AB ， BC 上， E ， F 分别为 MN ， DN 的中点，连接 EF ，则 EF 长度的最大值为 ()



A. 6

B. 8

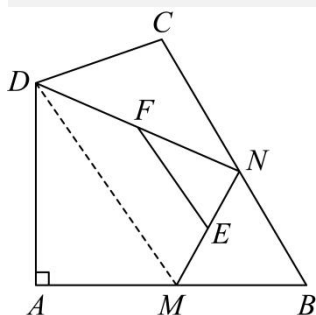
C. 10

D. 5

【答案】D

【分析】连接 DM ，证明 EF 是 $\triangle MND$ 的中位线，则 $EF = \frac{1}{2}DM$ ，根据题意得到当点 M 与点 B 重合时， DM 最大，根据勾股定理计算，得到答案． 本题考查的是三角形中位线定理、勾股定理，掌握三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题的关键．

【详解】解：连接 DM ，



$\because E$ ， F 分别为 MN ， DN 的中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle MND$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DM,$$

$\because$ 点 M ， N 分别在边 AB ， BC 上，

$\therefore$ 当点 M 与点 B 重合时， DM 最大，

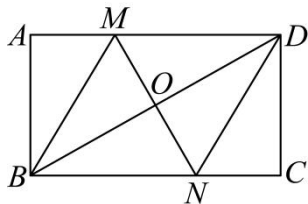
$\because \angle A = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $AD = 6$

$$\therefore \text{此时 } DM = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10,$$

$$\therefore EF \text{ 长度的最大值为 } \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

故选：D.

5. (24-25 八年级下·上海长宁·阶段练习) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 BD 的垂直平分线 MN 与 AD 相交于点 M , 与 BC 相交于点 N , 与 BD 相交于点 O , 连接 BM 、 DN . 若 $AB=4$, $AD=8$, 则四边形 $MDNB$ 的面积为 ()



A. 12

B. 16

C. 20

D. 24

【答案】C

【分析】 本题主要考查矩形的性质、线段的垂直平分线的性质、全等三角形的判定与性质、菱形的判定与性质、勾股定理等知识. 掌握菱形的判定与性质是解本题的关键.

由矩形的性质得 $AD \parallel CB$, 则 $\angle ODM = \angle OBN$, 由 MN 垂直平分 BD 得 $OD = OB$, 而 $\angle DOM = \angle BON$, 即可证明 $\triangle ODM \cong \triangle OBN$, 得 $DM = BN$, 因为 $DM = BM$, $DN = BN$, 所以 $DM = BM = DN = BN$, 可证明四边形 $BMDN$ 是菱形; 由勾股定理得 $AB^2 + AM^2 = BM^2$, 而 $AM = 8 - DM$, $DM = BM$, 所以

$4^2 + (8 - DM)^2 = DM^2$, 求得 $DM = 5$, 从而可得答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel CB$,

$\therefore \angle ODM = \angle OBN$,

$\because MN$ 垂直平分 BD ,

$\therefore OD = OB$, $DM = BM$, $DN = BN$,

在 $\triangle ODM$ 和 $\triangle OBN$ 中,

$$\begin{cases} \angle ODM = \angle OBN \\ OD = OB \\ \angle DOM = \angle BON \end{cases},$$

$\therefore \triangle ODM \cong \triangle OBN$ (ASA),

$\therefore DM = BN$,

$\because DM = BM$, $DN = BN$,

$\therefore DM = BM = DN = BN$,

$\therefore$ 四边形 $BMDN$ 是菱形.

$$\because \angle D = 90^\circ, \quad AB = 4, \quad AD = 8$$

$$\therefore AB^2 + AM^2 = BM^2, \quad AM = 8 - DM,$$

$$\therefore DM = BM,$$

$$\therefore 4^2 + (8 - DM)^2 = DM^2,$$

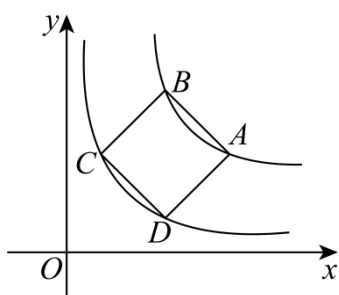
解得 $DM = 5$,

$$\therefore S_{\text{菱形}BMDN} = 4DM = 20.$$

$\therefore$ 四边形 $MDNB$ 的面积为 20.

故选: C

6. (24-25 八年级下·上海青浦·阶段练习) 如图, 正方形 $ABCD$ 的顶点分别在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 3, x > 0)$ 和 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上. 若点 D 的横坐标为 3, 则 k 的值是 ()



A. 6

B. 12

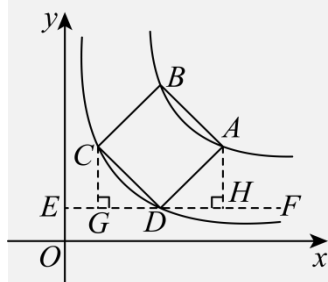
C. 15

D. 18

【答案】C

【分析】 本题考查反比例函数与几何的综合应用, 过点 D 作 $EF \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 E , 过点 C 作 $CG \perp EF$, 过点 A 作 $AH \perp EF$, 证明 $\triangle CGD \cong \triangle DHA$, 设 $C\left(m, \frac{3}{m}\right)$, 求出 A 点坐标, 根据正方形的性质结合平移思想, 求出 B 点坐标, 根据 A, B 均在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 3, x > 0)$ 图象上, 列出方程进行求解即可.

【详解】 解: 过点 D 作 $EF \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 E , 过点 C 作 $CG \perp EF$, 过点 A 作 $AH \perp EF$,



则: $\angle CGD = \angle AHD = 90^\circ$,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$,

$\therefore AD = CD, \angle CDA = 90^\circ, AB \parallel CD, AB = CD,$
 $\therefore \angle CDG = \angle DAH = 90^\circ - \angle ADH,$
 $\therefore \triangle CGD \cong \triangle DHA,$
 $\therefore CG = DH, DG = AH,$
 $\therefore C, D$ 在 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上, 且点 D 的横坐标为 3,
 $\therefore D(3, 1),$ 设 $C\left(m, \frac{3}{m}\right),$
 则: $CG = DH = \frac{3}{m} - 1, DG = AH = 3 - m, OE = 1, DE = 3,$
 $\therefore EH = ED + DH = 2 + \frac{3}{m}, y_A = DG + OE = 1 + 3 - m = 4 - m,$
 $\therefore A\left(2 + \frac{3}{m}, 4 - m\right),$
 $\therefore$ 将点 D 向左平移 $(3 - m)$ 个单位, 再向上平移 $\left(\frac{3}{m} - 1\right)$ 个单位, 得到点 $C,$
 $\therefore$ 将点 A 向左平移 $(3 - m)$ 个单位, 再向上平移 $\left(\frac{3}{m} - 1\right)$ 个单位, 得到点 $B,$
 $\therefore B\left(2 + \frac{3}{m} - 3 + m, 4 - m + \frac{3}{m} - 1\right),$ 即: $B\left(\frac{3}{m} + m - 1, 3 - m + \frac{3}{m}\right),$
 $\therefore A, B$ 均在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 3, x > 0)$ 图象上,
 $\therefore \left(2 + \frac{3}{m}\right)(4 - m) = \left(\frac{3}{m} + m - 1\right)\left(3 - m + \frac{3}{m}\right),$
 解得: $m = -1$ (舍去) 或 $m = 3$ (舍去) 或 $m = 1,$
 经检验 $m = 1$ 是原方程的解,
 $\therefore A(5, 3),$
 $\therefore k = 3 \times 5 = 15.$
 故选 C.

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题 (12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分)

7. (24-25 八年级下·上海杨浦·期中) 方程 $\sqrt{x-2} = 2$ 的根是_____.

【答案】 $x = 6$

【分析】 本题考查了解无理方程, 掌握解方程的步骤是解题的关键.

先两边平方, 化为整式方程, 再求解, 注意解无理方程与分式方程一样需要检验.

【详解】解： $\sqrt{x-2}=2$

$$x-2=4,$$

解得： $x=6$,

经检验： $x=6$ 是原方程的根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x=6$,

故答案为： $x=6$.

8. (24-25 八年级下·上海浦东新·期中) 方程组 $\begin{cases} (x-1)(y+m)=0 \\ y=x^2 \end{cases}$ 的解只有一组，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 0$

【分析】 根据条件表示方程组的解，再求 m 的范围.

【详解】解： $\begin{cases} (x-1)(y+m)=0 \textcircled{1} \\ y=x^2 \textcircled{2} \end{cases}$,

由 $\textcircled{1}$ ，得 $x-1=0$ 或 $y+m=0$,

$$\therefore x=1, \quad y=-m.$$

当 $x=1$ 时，代入 $\textcircled{2}$ 得： $y=1$,

$\therefore$ 原方程组的一组解为： $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$,

当 $y=-m$ 时，代入 $\textcircled{2}$ 得： $-m=x^2$,

$\therefore$ 原方程只有一组解，

$\therefore -m=x^2$ 无解，

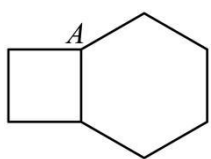
$$\therefore -m < 0.$$

$$\therefore m > 0.$$

故答案为： $m > 0$.

【点睛】 本题考查二元二次方程组的解，根据第一个方程，求得 $x=1$ ， $y=-m$ 是解题的关键.

9. (2025·上海杨浦·模拟预测) 如图，要用三块正多边形的木板铺地，使拼在一起并相交于点 A 的各边完全吻合，其中已经拼好的两块木板的边数分别是 4 和 6，则第三块木板的边数应是_____.



【答案】 12

【分析】此题考查了正多边形的内角与多边形内角和定理、平面镶嵌，先求出第三块正多边形木板的内角，再根据多边形内角和列方程解方程即可.

【详解】解：∵正方形的内角为 90° ，正六边形的内角为 $\frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$ ，

∴第三块正多边形木板的内角为 $360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ$ ，

设第三块正多边形木板的边数为 n ，

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 150^\circ n$$

解得 $n = 12$ ，

即第三块木板的边数应是12，

故答案为：12

10. (上海市世外集团 2024-2025 学年下学期九年级数学 5 月份月考卷) 将正比例函数 $y = kx$ 的图象向上平移 2 个单位，平移后的函数图象经过点 $P(1,1)$ ，那么平移后所得函数的函数值 y 随自变量 x 的增大而_____。(填“增大”或“减小”)

【答案】减小

【分析】本题考查了函数图象的平移和正比例函数的增减性，涉及到解一元一次方程，正确掌握代入法和正比例函数的增减性是解题的关键.

根据题意得平移后新的函数解析式为 $y = kx + 2$ ，求出 $k = -1$ ，得到平移后新的函数解析式为 $y = -x + 2$ ，由 $k = -1 < 0$ 得到平移后所得函数的函数值 y 随自变量 x 的增大而减小.

【详解】解：根据题意得平移后新的函数解析式为 $y = kx + 2$ ，

∵平移后的函数图象经过点 $P(1,1)$ ，

$$\therefore k + 2 = 1,$$

$$\therefore k = -1,$$

∴平移后新的函数解析式为 $y = -x + 2$ ，

$$\therefore k = -1 < 0,$$

∴平移后所得函数的函数值 y 随自变量 x 的增大而减小.

11. (2025·上海金山·模拟预测) 一个不透明的口袋中装有 5 个小球 (这些小球除所标数字外，其他完全相同)，小球上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5. 现从中随机摸取一个，不放回，再摸取一个，先后摸到的小球上的数字分别作为一个两位数的十位数字和个位数字，则组成的两位数恰好是 3 的倍数的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【分析】本题主要考查了运用列表法求概率，根据题意正确列表成为解答本题的关键．用列表法确定所有可能数和可能被 3 整除的可能数，然后用概率公式求解即可．

【详解】解：根据题意列表如下：

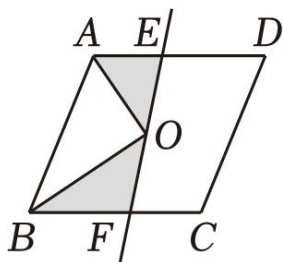
	1	2	3	4	5
1		12	13	14	15
2	21		23	24	25
3	31	32		34	35
4	41	42	43		45
5	51	52	53	54	

随机一次性摸出两个球有 20 种可能，组成的两位数恰好是 3 的倍数的有 8 种，

∴组成的两位数恰好是 3 的倍数的概率为 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

故答案为： $\frac{2}{5}$.

12. (24-25 八年级下·上海松江·期中) 如图，点 O 是菱形 $ABCD$ 的对称中心，连接 OA 、 OB ， $OA=4$ ， $OB=6$ ， EF 为过点 O 的一条直线，点 E 、 F 分别在 AD 、 BC 上，则图中阴影部分的面积为_____.

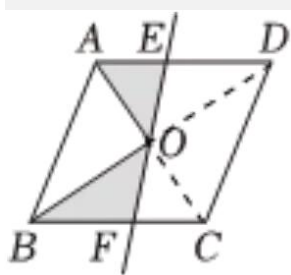


【答案】 12

【分析】本题考查了菱形的性质，中心对称，熟练掌握以上知识点是解答本题的关键．

先算出菱形的面积，再算出四边形 $ABFE$ 的面积，因为 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{四边形}ABFE} - S_{\triangle ABO}$ ，求得三角形 ABO 的面积，可得阴影部分的面积．

【详解】解：连接 OC 、 OD ，



$\because$ 点 O 是菱形 $ABCD$ 的对称中心,

$\therefore AC \perp BD$, O 是 AC 与 BD 的交点,

$\therefore CO = AO = 4$, $DO = BO = 6$,

$\therefore AC = 8$, $BD = 12$,

$\because EF$ 为过点 O 的一条直线,

$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = S_{\text{四边形}CDEF} = \frac{1}{2} S_{\text{菱形}ABCD}$,

$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = 48$,

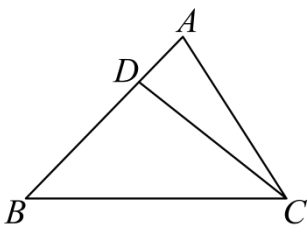
$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = \frac{1}{2} \times 48 = 24$,

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{四边形}ABFE} - S_{\triangle ABO}$, $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times AO \times BO = 12$,

$\therefore S_{\text{阴影}} = 24 - 12 = 12$,

故答案为: 12.

13. (2025·上海静安·模拟预测) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $AB = 4AD$, 设 $AB = a$, $AC = b$, 那么向量 $\overrightarrow{DC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $-\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$

【分析】 利用三角形法则: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ 求解即可.

【详解】 $\because AB = 4AD$,

$\therefore AD = \frac{1}{4} AB$,

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$,

$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$,

$$\therefore \overrightarrow{DC} = -\frac{1}{4}a + b$$

故答案为: $-\frac{1}{4}a + b$.

【点睛】考查了平面向量，三角形法则等知识，解题关键是熟练掌握基本知识.

14. (24-25 八年级下·上海闵行·期中) 定义: 对于给定的两个函数, 当 $x \geq 0$ 时, 它们对应函数值相等; 当 $x < 0$ 时, 它们对应的函数值互为相反数, 我们称这样的两个函数互为相关函数. 例如: 正比例函数 $y = -x$, 它的相关函数为 $y = \begin{cases} -x(x \geq 0) \\ x(x < 0) \end{cases}$. 已知正比例函数 $y = 2x$, 若点 $N(n, 3)$ 在这个函数的相关函数的图象上, 则 n 的值为_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

【分析】 本题考查了正比例函数的图象, 以及图象上点的坐标特征, 正确理解新定义是解题的关键.

根据相关函数的定义求出正比例函数 $y = 2x$ 的相关函数为 $y = \begin{cases} 2x(x \geq 0) \\ -2x(x < 0) \end{cases}$, 再分类讨论: 当 $n \geq 0$ 、 $n < 0$ 时,

分别把点 $N(n, 3)$ 代入相应的函数求解即可.

【详解】 解: 由题意可得, 正比例函数 $y = 2x$ 的相关函数为 $y = \begin{cases} 2x(x \geq 0) \\ -2x(x < 0) \end{cases}$,

$\therefore$ 点 $N(n, 3)$ 在这个函数的相关函数的图象上,

当 $n \geq 0$ 时, 把点 $N(n, 3)$ 代入 $y = 2x$ 得, $2n = 3$,

$$\therefore n = \frac{3}{2},$$

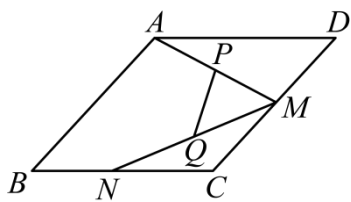
当 $n < 0$ 时, 把点 $N(n, 3)$ 代入 $y = -2x$ 得, $-2n = 3$,

$$\therefore n = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore n = \frac{3}{2} \text{ 或 } -\frac{3}{2}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$.

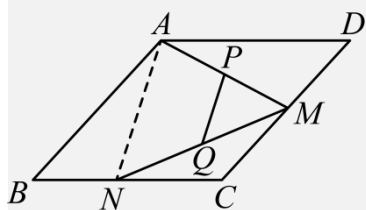
15. (2025·上海宝山·一模) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, M , N 分别是边 CD , BC 上的动点, 连接 AM , MN , P , Q 分别为 AM , MN 的中点, 连接 PQ . 若 $\angle B = 45^\circ$, $AB = 4$, 则 PQ 的最小值为_____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【分析】 本题考查的知识点是三角形的中位线定理、菱形的性质、勾股定理解直角三角形. 由三角形中位线定理可得 $AN = 2PQ$, 则当 AN 有最小值时, PQ 有最小值, 即当 $AN \perp BC$ 时, AN 有最小值, 由等腰直角三角形的性质可求 AN 的最小值, 即可求解.

【详解】 解: 如图, 连接 AN ,



$\because P, Q$ 分别为 AM, MN 的中点,

$\therefore AN = 2PQ$,

$\therefore$ 当 AN 有最小值时, PQ 有最小值,

$\therefore$ 当 $AN \perp BC$ 时, AN 有最小值,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore \angle B = 45^\circ, AB = 4$,

$\therefore$ 当 $AN \perp BC$ 时, $AN = BN$,

$\therefore AN$ 的最小值 $= \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 2\sqrt{2}$,

$\therefore PQ$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

16. (23-24 八年级下·上海虹口·期末) 科技创新加速中国高铁技术的发展. 某建筑集团承担一座高架桥的铺设任务, 在合同期内高效完成了任务, 这是记者与该集团工程师的一段对话:



你们是用 10 天完成了 4500 米长的高架桥铺设任务吗?



是的, 我们铺设 500 米后, 采用新的铺设技术, 这样每天铺设的长度是原来的 2 倍. 最后按期完成了任务.

若设该建筑集团原来每天铺设高架桥的长度为 x 米, 则可列方程为_____.

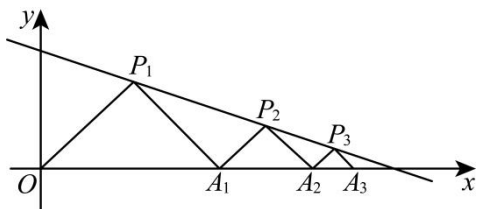
【答案】 $\frac{500}{x} + \frac{4500-500}{2x} = 10$

【分析】 本题考查了分式方程的应用, 找准等量关系, 正确列出分式方程是解答本题的关键.

设该建筑集团原来每天铺设高架桥的长度为 x 米, 则采用新的铺设技术后每天铺设高架桥 $2x$ 米, 利用工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率, 即可得关于 x 的分式方程.

【详解】 解: 设该建筑集团原来每天铺设高架桥的长度为 x 米, 则采用新的铺设技术后每天铺设高架桥 $2x$ 米, 根据题意得: $\frac{500}{x} + \frac{4500-500}{2x} = 10$,
故答案为: $\frac{500}{x} + \frac{4500-500}{2x} = 10$.

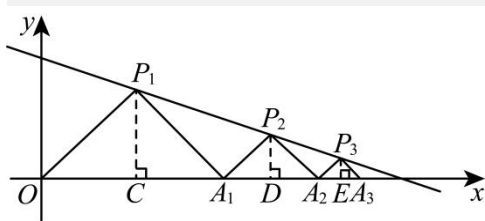
17. (2025·上海长宁·一模) 如图, 在平面直角坐标系 Oxy 中, $\triangle P_1OA_1$, $\triangle P_2A_1A_2$, $\triangle P_3A_2A_3$, ... 都是等腰直角三角形, 其直角顶点 $P_1(3,3)$, P_2 , P_3 , ... 均在直线 $y = -\frac{1}{3}x + 4$ 上. 设 $\triangle P_1OA_1$, $\triangle P_2A_1A_2$, $\triangle P_3A_2A_3$, ... 的面积分别为 S_1 , S_2 , S_3 , ..., 依据图形所反映的规律, $S_{2025} =$ _____.



【答案】 $\frac{9}{4^{2024}}$

【分析】 本题考查规律型: 一次函数的几何应用、等腰直角三角形的性质, 解题的关键是从特殊到一般, 探究规律, 利用规律解决问题. 分别过点 P_1 、 P_2 、 P_3 作 x 轴的垂线段, 先根据等腰直角三角形的性质求得前三个等腰直角三角形的底边和底边上的高, 继而求得三角形的面积, 得出面积的规律即可得出答案.

【详解】 解: 如图, 分别过点 P_1 、 P_2 、 P_3 作 x 轴的垂线, 垂足分别为点 C 、 D 、 E ,



$\because P_1(3,3)$ ，且 $\triangle OP_1A_1$ 为等腰直角三角形，

$\therefore OC = CA_1 = P_1C = 3$ ，

设 $A_1D = a$ ，则 $P_2D = a$ ，

$\therefore OD = 6 + a$ ，

$\therefore$ 点 P_2 坐标为 $(6 + a, a)$ ，

将点 P_2 坐标代入 $y = -\frac{1}{3}x + 4$ ，得： $-\frac{1}{3}(6 + a) + 4 = a$ ，

解得： $a = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore A_1A_2 = 2a = 3$ ， $P_2D = \frac{3}{2}$ ，

同理求得 $P_3E = \frac{3}{4}$ ， $A_2A_3 = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ ，

$S_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ ，

$S_3 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ ，

.....

$\therefore S_n = \frac{9}{4^{n-1}}$ ，

因此 $S_{2025} = \frac{9}{4^{2024}}$ 。

故答案为： $\frac{9}{4^{2024}}$ 。

18. (24-25 八年级下·上海宝山·课后作业) 阅读下列文字，并回答问题.

一次函数 $y = k_1x + b$ 与 $y = k_2x$ 在同一平面直角坐标系中的图像如图①，观察两个图像可得，关于 x 的方程

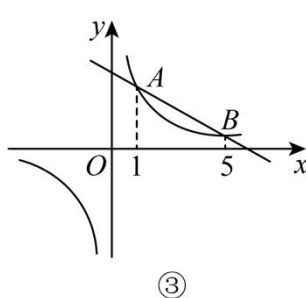
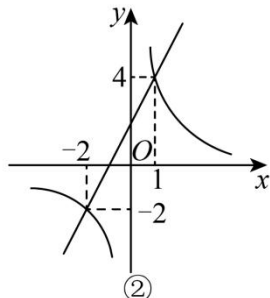
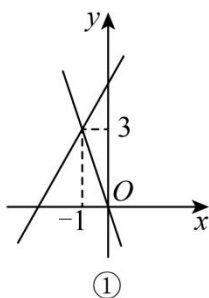
$k_2x = k_1x + b$ 的解是 $x = -1$ ，关于 x 的不等式 $k_2x > k_1x + b$ 的解集是 $x < -1$ 。同样，一次函数 $y = kx + b$ 与反比

例函数 $y = \frac{m}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图像如图②，则关于 x 的方程 $kx + b = \frac{m}{x}$ 的解是 $x_1 = -2, x_2 = 1$ ，关于

x 的不等式 $kx+b > \frac{m}{x}$ 的解集是 $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$.

如图③，一次函数 $y=k_1x+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像相交于 A 、 B 两点，它们的横坐标分别为 1 和 5，则

不等式 $k_1x < \frac{k_2}{x} - b$ 的解集是_____.



【答案】 $0 < x < 1$ 或 $x > 5$

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数的交点问题，数形结合的思想，把 $k_1x < \frac{k_2}{x} - b$ 转化成 $k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ ，再结合函数图像即可得出答案.

【详解】解： $k_1x < \frac{k_2}{x} - b$ 即 $k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ ，

$\because$ 一次函数 $y=k_1x+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像相交于 A 、 B 两点，它们的横坐标分别为 1 和 5，

$\therefore k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ 的解集为： $0 < x < 1$ 或 $x > 5$ ，

故答案为： $0 < x < 1$ 或 $x > 5$.

三、解答题 (7 小题，共 64 分)

19. (24-25 八年级下·上海闵行·阶段练习) 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 - 5xy - 6y^2 = 0, \\ xy - 2x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} y_1 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} y_2 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}, \begin{cases} y_3 = \frac{1}{6} \\ x_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} y_4 = 2 \\ x_4 = 12 \end{cases}$

【分析】 把方程①因式分解得出 x 与 y 的关系式，分别代入方程②即可解得.

【详解】
$$\begin{cases} x^2 - 5xy - 6y^2 = 0 \text{ ①} \\ xy - 2x - y + 2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得 $(x+y)(x-6y) = 0$

$x = -y$, $x = 6y$

把 $x=-y$ 代入②得

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

整理得 $(y+1)(y-2) = 0$

解得 $y_1 = -1, y_2 = 2$

得 $\begin{cases} y_1 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} y_2 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

把 $x=6y$ 代入②得

$$6y^2 - 13y + 2 = 0$$

$$\begin{cases} y_3 = \frac{1}{6} \\ x_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} y_4 = 2 \\ x_4 = 12 \end{cases}$$

【点睛】此题考查了求方程组的解，解题的关键是对方程用十字交叉法进行因式分解.

20. (2025 八年级下·上海嘉定·模拟预测) 某校服厂承接了 2.7 万套校服的生产任务，计划安排甲、乙两个组的共 50 名工人，合作生产 20 天完成. 已知甲、乙两个组工人的工作效率为甲组每人每天生产 25 套，乙组每人每天生产 30 套.

(1)甲、乙两个组各有多少名工人参与生产?

(2)为了提前完成生产任务，该服装厂设计了两种方案:

方案一，甲组租用先进生产设备，工人的工作效率可提高 20%，乙组维持不变;

方案二，乙组再临时招聘若干名工人 (工作效率与原工人相同)，甲组维持不变设计的这两种方案，完成该生产任务的时间相同，求乙组需临时招聘的工人数.

【答案】(1)甲组有 30 名工人参与生产，乙组有 20 名工人参与生产

(2)乙组需临时招聘 5 名工人

【详解】解: (1) 设甲组有 x 名工人参与生产，乙组有 y 名工人参与生产.

根据题意，得 $\begin{cases} x + y = 50, \\ 20(25x + 30y) = 27000, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 30, \\ y = 20. \end{cases}$

$y=20.$

故甲组有 30 名工人参与生产，乙组有 20 名工人参与生产.

(2) 采用方案一，完成该生产任务的时间为 $\frac{27000}{30 \times 25 \times (1 + 20\%) + 20 \times 30} = 18$ (天).

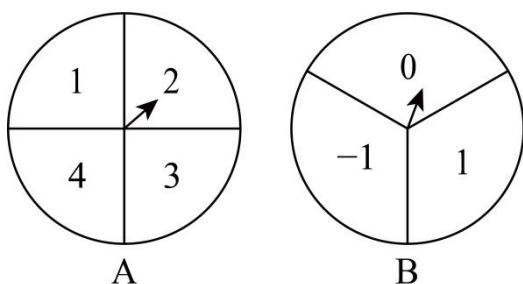
设方案二中乙组需临时招聘 m 名工人.

根据题意，得 $[30 \times 25 + 30 \times (20 + m)] \times 18 = 27000$,

解得 $m = 5$.

故乙组需临时招聘 5 名工人.

21. (2025·上海奉贤·模拟预测) 小华一家打算周末外出游玩，小华想去参观兵马俑，弟弟想去爬华山，由于时间紧张，只能选择其中一个景点旅游，于是爸爸设计了如下转盘游戏来决定由谁选择景点，规则如下：把转盘 A、B 分别分成 4 等份、3 等份，并在每一份内标上数字，如图所示，小华转动转盘 A，弟弟转动转盘 B，当转盘停止后，指针各指向一个数字（如果指针恰好指在分割线上，那么重转一次，直到指针指向一个数字为止），计算这两个数字的乘积，若两数的乘积为正数，则由小华选择景点，若两数的乘积为负数，则由弟弟选择景点，其他情况视为平局.



(1) 弟弟转动转盘 B，当转盘停止后，指针所指的数字是 0 的概率为 _____；

(2) 你认为这个游戏对双方公平吗？请用列表或画树状图的方法说明理由.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) 公平，见解析

【分析】 本题考查了概率公式求概率，画树状图或列表法求概率，解题的关键是掌握相关知识.

(1) 利用概率公式求解即可；

(2) 列表得出所有等可能的结果数，乘积为正数的结果数和乘积为负数的结果数，再利用概率公式求出小华和弟弟选择景点的概率，即可求解.

【详解】(1) 解：弟弟转动转盘 B，针所指的数字有 -1，0，1 三种情况，指针所指的数字是 0 的概率为 $\frac{1}{3}$ ，故答案为： $\frac{1}{3}$ ；

(2) 公平，理由如下：

列表如下：

哥哥 弟弟	1	2	3	4
-1	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0
1	1	2	3	4

由表知，共有12种等可能结果，其中两数的乘积为正数的有4种结果，两数的乘积为负数的有4种结果，

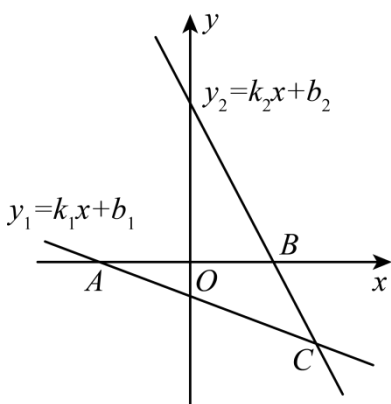
$\therefore$ 小华选择景点的概率 $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

弟弟选择景点的概率 $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ 游戏对双方公平.

22. (24-25 八年级下·上海松江·期中) 一次函数 $y_1 = k_1x + b_1$ 和一次函数 $y_2 = k_2x + b_2$ 在同一坐标系中的图像如图所示，已知 A, B 两点的坐标分别为 $(-2, 0)$, $(2, 0)$ ，观察图像回答下列问题:



(1) 关于 x 的一元一次方程 $k_1x + b_1 = 0$ 的解是_____;

(2) 若 C 点的坐标为 $(3, -2)$ ，则关于 x 的不等式 $k_1x + b_1 > k_2x + b_2$ 的解集是_____;

(3) 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} k_1x + b_1 > 0 \\ k_2x + b_2 > 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 (1) $x = -2$

(2) $x > 3$

(3) $x < -2$

【分析】 本题主要考查一次函数与一元一次不等式、一次函数与一元一次方程等知识点，掌握数形结合思

想是解题的关键.

(1) 利用直线与 x 轴的交点即为 $y=0$ 时, 对应的 x 的值为方程的解, 据此即可解答;

(2) 利用两直线与 x 轴的交点坐标, 结合图象即可即可解答;

(3) 利用图象求解即可.

【详解】(1) 解: $\because$ 一次函数 $y_1 = k_1x + b_1$ 与 x 轴的交点为 $A(-2, 0)$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $k_1x + b_1 = 0$ 的解是 $x = -2$,

故答案为: $x = -2$

(2) 解: $\because$ 一次函数 $y_1 = k_1x + b_1$ 和一次函数 $y_2 = k_2x + b_2$ 的交点 $C(3, -2)$,

$\therefore$ 根据图象可得关于 x 的不等式 $k_1x + b_1 > k_2x + b_2$ 解集为 $x > 3$.

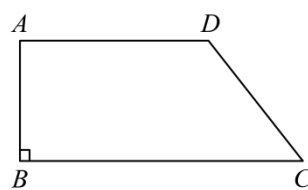
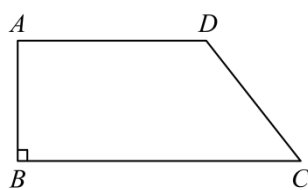
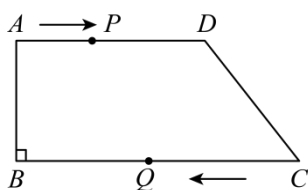
故答案为: $x > 3$

(3) 解: $\because$ 一次函数 $y_1 = k_1x + b_1$ 和一次函数 $y_2 = k_2x + b_2$ 在同一坐标系中的图象如图所示, 已知 A 、 B 两点的坐标分别为 $(-2, 0)$, $(2, 0)$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} k_1x + b_1 > 0 \\ k_2x + b_2 > 0 \end{cases}$ 的解集是 $x < -2$.

故答案为: $x < -2$

23. (24-25 八年级下·上海崇明·期中) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 8\text{cm}$, $AD = 12\text{cm}$, $BC = 18\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 以 1cm/s 的速度向点 D 运动; 点 Q 从点 C 同时出发, 以 2cm/s 的速度向点 B 运动. 规定其中一个动点到达端点时, 另一个动点也随之停止运动. 设点 P , Q 运动的时间为 $t\text{s}$.



备用图

备用图

(1) 从运动开始, 当 t 取何值时, $PQ \parallel CD$?

(2) 从运动开始, 当 t 取何值时, $PQ = CD$?

(3) 在整个运动过程中是否存在 t 值, 使得四边形 $PQCD$ 是菱形? 若存在, 请求出 t 值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $t = 4$

(2) 4 或 8

(3)不存在, 理由见解析

【分析】(1) 证明四边形 $PQCD$ 是平行四边形, 可得 $DP = CQ$, 建立方程求解即可;

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 运用勾股定理求出 CD 长, 然后过点 Q 作 $QG \perp AD$ 于 G , 则四边形 $ABQG$ 是矩形, 再利用勾股定理建立方程求解即可;

(3) 由四边形 $PQCD$ 是菱形, 可得 $CQ = CD$, 可得 $2t = 10$, 此时 $DP \neq CD$, 可得四边形不可能是菱形.

【详解】(1) 当 $PQ \parallel CD$ 时,

$$\because PD \parallel CQ,$$

$\therefore$ 四边形 $PQCD$ 是平行四边形,

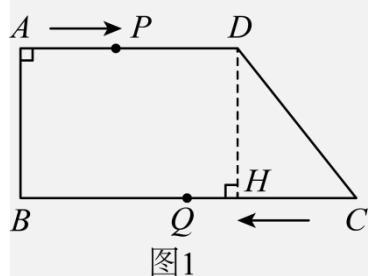
$$\therefore DP = CQ,$$

$$\therefore 12 - t = 2t,$$

$$\therefore t = 4;$$

(2) 如图,

如图1, 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ,



$$\therefore \angle CHD = 90^\circ$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CHD$$

$$\therefore DH \parallel AB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是平行四边形,

$$\therefore DH = AB = 8\text{cm}, BH = AD = 12\text{cm},$$

$$\therefore CH = BC - BH = 6(\text{cm}),$$

根据勾股定理得, $CD = \sqrt{DH^2 + CH^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10(\text{cm}),$

过点 Q 作 $QG \perp AD$ 于 G , 则四边形 $ABQG$ 是矩形,

$$\therefore QG = AB = 8\text{cm}, AG = BQ,$$

$$\therefore BQ = BC - CQ = (18 - 2t) \text{ cm},$$

$$\therefore PG = |AG - AP| = |18 - 2t - t| = |18 - 3t| \text{ cm}$$

$$\therefore PQ = CD = 10 \text{ cm},$$

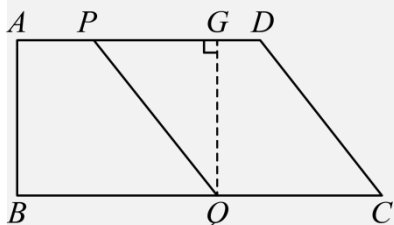


图2

根据勾股定理得, $8^2 + (18 - 3t)^2 = 10^2$,

解得: $t = 4$ 或 $t = 8$,

故 t 为 4 或 8;

(3) 不存在, 理由:

$\therefore$ 四边形 $PQCD$ 是菱形,

$$\therefore CQ = CD,$$

$$\therefore 2t = 10,$$

解得 $t = 5$,

此时, $DP = AD - AP = 12 - 5 = 7 (\text{cm})$,

而 $DP \neq CD$,

$\therefore$ 四边形 $PQCD$ 不可能是菱形.

【点睛】此题是四边形综合题, 主要考查了矩形的判定和性质, 勾股定理, 菱形的判定, 平行四边形的判定和性质等知识, 构造出直角三角形是解本题的关键.

24. (2025·上海闵行·一模) 课本再现

三角形中位线定理 三角形的中位线平行于三角形的第三边, 并且等于第三边的一半.

定理证明:

(1) 为了证明该定理, 小明同学画出了图形 (图 1), 并写出了“已知”和“求证”, 请你完成证明过程.

已知: D , E 分别是 ABC 的边 AB , AC 的中点.

求证: $DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

知识应用

(2) ①如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点. 以这些点 (A, B, C, D, E, F) 为顶点, 在图中能画出_个平行四边形.

②如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点. 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

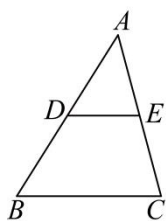


图1

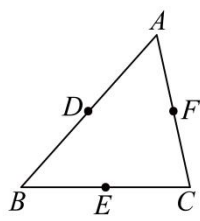


图2

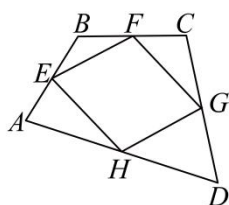


图3

【答案】 (1) 见解析; (2) ①3; ②见解析

【分析】 本题考查了三角形中位线性质的证明和应用, 平行四边形的判定, 全等三角形的判定与性质, 平行线的判定与性质等知识, 掌握三角形中位线的性质是解题的关键.

本题考查了平行四边形的判定与性质, 三角形中位线的判定与性质.

(1) 延长 DE 到点 F , 使 $EF = DE$, 连接 FC, DC, AF . 证明 $\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形, 可得 $CF \parallel DA$, 且 $CF = DA$, 再证明四边形 $DBCF$ 是平行四边形, 然后利用平行四边形的性质可得结论;

(2) ①连接 DE, DF, EF , 由三角形中位线的性质得 $DE \parallel AC, DF \parallel BC, EF \parallel AC$, 然后根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形可得结论;

②连接 AC , 利用三角形中位线的性质分别得到 $EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC, HG \parallel AC, HG = \frac{1}{2}AC$, 即可得到 $EF \parallel HG, EF = HG$, 进而由平行四边形的判定定理即可求证.

【详解】 解: (1) 证明: 如图 1, 延长 DE 到点 F , 使 $EF = DE$, 连接 FC, DC, AF .

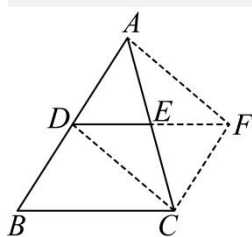


图1

$\therefore AE = EC, DE = EF,$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,

$\therefore CF \parallel DA$, 且 $CF = DA$,

$\therefore CF \parallel BD$, 且 $CF = BD$,

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形,

$\therefore DF \parallel BC$ ，且 $DF = BC$ 。

又 $\because DE = \frac{1}{2}DF$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

(2) ①如图，连接 DE, DF, EF ，

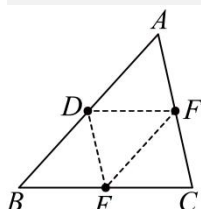


图2

$\because D, E, F$ 分别是 AB, BC, CA 的中点，

$\therefore DE, DF, EF$ 是 ABC 的中位线，

$\therefore DE \parallel AC, DF \parallel BC, EF \parallel AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ ，四边形 $BDFE$ ，四边形 $CEDF$ ，都是平行四边形。

故答案为：3；

②证明：如图 2，连接 AC 。

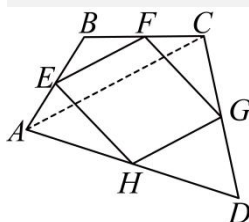


图2

$\because E, F, G, H$ 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点，

$\therefore EF$ 是 ABC 的中位线， HG 是 $\triangle ACD$ 的中位线，

$\therefore EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC, HG \parallel AC, HG = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore EF \parallel HG, EF = HG$ ，

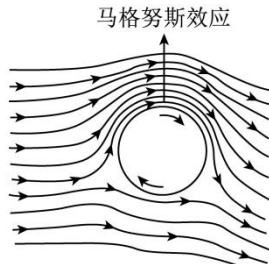
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

25. (2025·上海虹口·模拟预测) 综合与实践

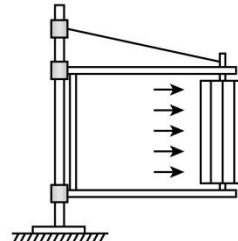
【问题情境】小明在海边看到一艘装有四根大圆筒的轮船（如 1 图所示），通过查阅资料了解到这是马格努斯转子船，当圆筒高速旋转时，可以助推货轮前进，其原理是旋转的物体在流体（如空气或水）中运动时，会受到一个垂直于运动方向的力，这种物理现象被称为马格努斯效应（如 2 图所示）。生活中的足球“香蕉球”、乒乓球弧圈球，都是马格努斯效应的常见例子。



1图 马格努斯转子船



2图 马格努斯效应示意图



3图 马格努斯效应实验装置

【设计方案】小明与同学组成科技小组，设计实验验证马格努斯效应。实验装置如3图所示，圆柱体模拟转子船的圆筒（圆柱体半径和高度都可以调节）。已知装置产生的推力满足公式： $F = k \cdot \omega \cdot v$ ，其中 k 为比例系数（与圆柱体侧面积 A 有关，实验条件下关系近似为 $k = 0.5A$ ）， ω 为电机控制圆柱体旋转的角速度（单位： rad/s ）， v 为电风扇模拟的风速（单位： m/s ），产生的推力 F 可用测力计测量（单位： N ）。现有实验数据如下：

实验组	风速 v (m/s)	旋转角速度 ω (rad/s)	推力 F (N)
1	5	4	24

【问题解决】

- (1)保持风速不变，若要推力达到 $48N$ ，求此时旋转角速度；
- (2)保持风速不变，已知圆柱体的最高旋转角速度 ω 为 $10rad/s$ 。
 - ①现有装置能否产生 $100N$ 的推力？请说明理由；
 - ②已知初始时圆柱体半径 $r = 0.5m$ ，请设计一个改变圆柱体半径的方案（高度不变），使得装置在最高旋转角速度下能产生 $100N$ 推力。（结果保留2位小数，计算过程中 π 取3）

【答案】(1) $\omega = 8rad/s$

(2)①现有装置不能产生 $100N$ 推力，详见解析；②当圆柱体半径变为 $0.83m$ 时，可以使得装置在最高旋转角速度下能产生 $100N$ 推力

【分析】本题主要考查实际问题与反比例函数和解一元一次方程，

- (1) 根据 $F = k \cdot \omega \cdot v$ 和表中数据求得 k ，结合已知的推力即可求得旋转角速度；
- (2) ①根据 $F = k \cdot \omega \cdot v$ 保持风速不变，可求得现有装置能产生的最大推力为 60 ，
- ②根据 $k = 0.5A$ 求得圆柱体的高，在最高旋转角速度下，当 $F = 100N$ 时求得 k' ，进一步求得 $k' = 0.5 \times 2\pi r'h$ 解得 r' 即可。

【详解】(1) 解： $\because F = k \cdot \omega \cdot v$ ，

$$\therefore k = \frac{F}{\omega \cdot v} = \frac{24}{4 \times 5} = 1.2 ,$$

当 $F = 48\text{N}$ 时, $48 = 1.2 \times 5 \cdot \omega$,

解得旋转角速度 $\omega = 8\text{rad/s}$;

(2) 解: ①保持风速不变, 现有装置能产生的最大推力为

$$F = k \cdot \omega \cdot v = 1.2 \times 10 \times 5 = 60 < 100 ,$$

$\therefore$ 现有装置不能产生 100N 推力;

$$\textcircled{2} \because k = 0.5A = 0.5 \times 2\pi r \cdot h = 3 \times r \times h ,$$

$$\therefore 1.2 = 3 \times 0.5 \times h ,$$

解得圆柱体的高 $h = 0.8\text{m}$,

$$\text{在最高旋转角速度下, 当 } F = 100\text{N} \text{ 时, } k' = \frac{100}{10 \times 5} = 2 .$$

$$\text{又 } k' = 0.5 \times 2\pi r' \cdot h ,$$

$$\therefore 2 = 2.4r' ,$$

解得 $r' \approx 0.83\text{m}$

$\therefore$ 当圆柱体半径变为 0.83m 时, 可以使得装置在最高旋转角速度下能产生 100N 推力.