

2024 学年第二学期初二数学期末考试试卷

(满分 100 分, 完卷时间 90 分钟)

考生注意:

1. 本考试设试卷和答题纸两部分, 试卷包括试题与答题要求, 所有答题必须写在答题纸上, 做在试卷上一律不得分. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须写出证明或计算的主要步骤.
2. 答题前, 务必在答题纸上填写学校、班级和姓名.
3. 答题纸与试卷在试题编号上是一一对应的, 答题时应特别注意, 不能错位.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 无论 b 取何值, 一次函数 $y = -x + b$ 的图像一定经过 ()

- A. 第一、三象限 B. 第二、四象限 C. 第一、二象限 D. 第三、四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图象, 一次函数 $y = -x + b$ 中 $k = -1$ 为负数, 故图像从左向右下降, b 可正、负或零, 需确定无论 b 如何变化, 图像必定经过的象限.

【详解】解: 因为 $k = -1$, 说明图像向右下方倾斜, 必然穿过第二、四象限.

当 $b > 0$ 时, 图像与 y 轴交于正半轴, 经过第一、二、四象限;

当 $b = 0$ 时, 图像为 $y = -x$, 经过第二、四象限;

当 $b < 0$ 时, 图像与 y 轴交于负半轴, 经过第二、三、四象限;

共同象限: 无论 b 取何值, 图像始终经过第二、四象限.

故选 B.

2. 下列方程有实数根的是 ()

- A. $\sqrt{x^2 - 2} = -1$ B. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ C. $x^3 + 1 = 0$ D. $x^4 + 2 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了算术平方根、立方根、分式方程, 逐一分析各选项方程是否存在实数解即可得解, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解: A、 $\sqrt{x^2 - 2} = -1$, 平方根的结果非负, 而右边为 -1 , 显然无解, 故不符合题意;

B、 $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, 两边同乘 $(x-1)$ 得 $x = 1$, 但 $x = 1$ 使分母为 0, 舍去, 故无解, 故不符合题意;

C、 $x^3 + 1 = 0$, 变形为 $x^3 = -1$, 解得 $x = -1$, 是实数根, 故符合题意;

D、 $x^4 + 2 = 0$ ，变形为 $x^4 = -2$ ，实数的四次方非负，无解，故不符合题意；

故选：C.

3. 下列事件中，属于必然事件的是（ ）

A. 明天下雨

B. 篮球队员在罚球线投篮一次：未投中

C. 掷一枚硬币，正面朝上

D. 任意画一个四边形，其内角将是 360°

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了随机事件和必然事件的定义，可能发生也可能不发生的事件是随机事件，一定发生或一定不发生是事件是必然事件，根据定义解答.

【详解】解：A、明天下雨是随机事件，故不符合题意；

B、篮球队员在罚球线投篮一次，未投中是随机事件，故不符合题意；

C、掷一枚硬币，正面朝上是随机事件，故不符合题意；

D、任意画一个四边形，其内角将是 360° 是必然事件，故符合题意；

故选：D.

4. 下列说法中，正确的是（ ）

A. 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是相反向量，那么 $\vec{a} + \vec{b} = 0$

B. 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是平行向量，那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

C. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

D. 如果 $\vec{a} = \vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的定义与性质，熟练掌握平面向量的定义与性质是解本题的关键. 根据向量的定义与性质，逐一对选项判断即可.

【详解】解：A、相反向量的和为零向量，而不是数字0，故本选项不符合题意；

B、平行向量为方向相同或相反，模不一定相等，故本选项不符合题意；

C、两个向量的模相等，不能保证方向相同，故本选项不符合题意；

D、两个向量方向相同，所以是平行向量，故本选项符合题意；

答案：D.

5. 已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O ，下列条件中能判定四边形 $ABCD$ 是正方形的是（ ）

A. $OA = OC$

B. $OA = OB$

C. $OA \perp OB$

D. $AC = BD$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查正方形的判定定理，根据正方形的判定定理逐项分析即可得解，熟练掌握正方形的判定定理是解此题的关键.

【详解】 解：A、 $OA = OC$ ，矩形对角线互相平分，必然成立，无法判定正方形，故不符合题意；

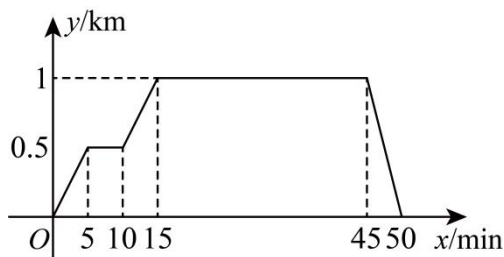
B、 $OA = OB$ ，矩形对角线相等且平分，故 $OA = OB = OC = OD$ ，此条件恒成立，无法判定正方形，故不符合题意；

C、 $OA \perp OB$ ，说明对角线 AC 与 BD 垂直，矩形对角线若垂直则为正方形，符合判定条件，故符合题意；

D、 $AC = BD$ ，矩形对角线本相等，此条件恒成立，无法判定正方形，故不符合题意；

故选：C.

6. 已知小丽家、便利店、体育馆在同一直线上，某天小丽从家步行到便利店买了一瓶水，再到体育馆锻炼，最后骑共享单车回家. 小丽离家距离 y 与时间 x 之间的关系如图所示. 下列结论错误的是 ().



A. 小丽家到便利店距离 500 米

B. 小丽在便利店停留了 5 分钟

C. 小丽步行的速度是 0.1km/min

D. 小丽骑自行车的速度是步行速度的 1.5 倍

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查利用函数的图象解决实际问题，正确理解函数图象横纵坐标表示的意义，准确识图是解题的关键. 根据图象逐项分析即可.

【详解】 解：由图象可得，

A. 小丽家到便利店距离 500 米，正确；

B. $10 - 5 = 5(\text{min})$

$\therefore$ 小丽在便利店停留了 5 分钟，正确；

C. $0.5 \div 5 = 0.1(\text{km/min})$

$\therefore$ 小丽步行的速度是 0.1km/min ，正确；

D. 小丽骑自行车的速度为 $1 \div (50 - 45) = 0.2(\text{km/min})$

$\therefore 0.2 \div 0.1 = 2$

∴小丽骑自行车的速度是步行速度的2倍，故选项错误.

故选：D.

二、填空题 (本大题共12题, 每题2分, 满分24分)

7. 方程 $\frac{x^2-4}{x-2}=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=-2$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，熟练掌握分式方程的解法是解本题的关键. 利用了转化的思想，解分式方程注意要检验. 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】 解： $\frac{x^2-4}{x-2}=0$

去分母得， $(x+2)(x-2)=0$

解得： $x_1=-2, x_2=2$,

当 $x=2$ 时， $x-2=0$ ，则 $x=2$ 是原方程的增根

当 $x=-2$ 时， $x-2 \neq 0$ ，则 $x=-2$ 是原方程的解，

∴原方程的解为： $x=-2$ ，

故答案为： $x=-2$.

8. 二项方程 $x^4-81=0$ 的实数解是_____.

【答案】 $x=\pm 3$

【解析】

【分析】 本题考查高次方程的解法，关键在于降次，利用开平方降次是关键. 先求 x^2 的解，再求实数解即可.

【详解】 解： $\because x^4-81=0$,

$\therefore x^4=81$,

$\therefore (x^2)^2=81$,

$\therefore x^2=9$ (负值舍去),

$\therefore x=\pm 3$,

故答案为: $x = \pm 3$.

9. 一次函数 $y = -5x + 1$ 的截距是_____.

【答案】 1 或 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质. 先令 $x = 0$, 求出 y 的值; 再令 $y = 0$, 求出 x 的值即可得出结论.

【详解】 解: $\because$ 令 $x = 0$, 则 $y = 1$;

令 $y = 0$, 则 $x = \frac{1}{5}$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x + 1$ 的截距是 1 或 $\frac{1}{5}$.

故答案为: 1 或 $\frac{1}{5}$.

10. 用换元法解分式方程 $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 2$ 时, 如果设 $\frac{x^2-1}{x} = y$, 并将原方程化为关于 y 的整式方程, 那么这个整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y + 3 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解分式方程. 设 $\frac{x^2-1}{x} = y$, 则 $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{y}$, 进而将原方程变为 $\frac{3}{y} + y = 2$, 再去分母即可.

【详解】 解: 设 $\frac{x^2-1}{x} = y$, 则 $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{y}$,

原方程可变为: $\frac{3}{y} + y = 2$,

两边都乘以 y 得, $y^2 - 2y + 3 = 0$,

故答案为: $y^2 - 2y + 3 = 0$.

11. 如果正多边形的一个外角是 72° , 那么这个正多边形的边数为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的外角和定理. 根据外角和为 360° , 除以每个外角的度数即可得出多边形的边

数.

【详解】解: $\because 360 \div 72 = 5$,

$\therefore$ 这个多边形的边数为 5.

故答案为: 5.

12. 如果一次函数 $y = kx + b (k < 0)$ 的图像与 x 轴交于点 $(-4, 0)$, 那么 $kx + b > 0$ 时, x 的取值范围是 _____.

【答案】 $x < -4$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数的图像性质. 先得到一次函数的增减性, 再由 $y = kx + b$ 的图像可确定 x 的取值范围.

【详解】 解: $\because (k < 0)$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$\because$ 一次函数 $y = kx + b (k < 0)$ 的图像与 x 轴交于点 $(-4, 0)$, 那么 $kx + b > 0$ 时,

$\therefore x$ 的取值范围是 $x < -4$,

故答案为: $x < -4$.

13. 一项工程, 甲队独做提前 2 天完成, 乙队独做要延期 5 天, 现在两队合作 3 天后, 余下的由乙队独做, 正好如期完工, 设工程期限为 x 天, 可列方程_____.

【答案】 $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+5} = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用, 根据“两队合作 3 天后, 余下的由乙队独做, 正好如期完工”列方程即可.

【详解】 解: 根据题意, 得 $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+5} = 1$,

故答案为: $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+5} = 1$.

14. 从平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形中任选一个图形, 顺次连接其各边中点, 得到的四边形是菱形的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

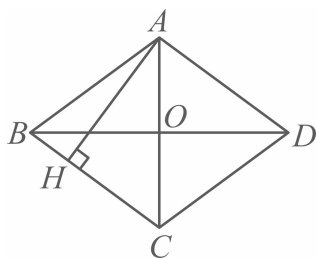
【分析】 本题考查了中点四边形的性质和概率的计算. 先判断出中点四边形是菱形的个数, 再利用概率公式计算即可求解.

【详解】 解: 平行四边形、菱形的对角线不一定相等, 其中点四边形不一定是菱形,
矩形、正方形、等腰梯形的对角线相等, 其中点四边形是菱形,

$\therefore$ 得到的四边形是菱形的概率是 $\frac{3}{5}$,

故答案为: $\frac{3}{5}$.

15. 如图, 菱形 $ABCD$, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 测得 $AB = 10\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 那么 AH 的长为 _____ cm .



【答案】 $\frac{48}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质、勾股定理, 由菱形的性质可得 $BC = AB = 10\text{cm}$, $AO = \frac{1}{2}AC = 6\text{cm}$, $BD = 2BO$, 由勾股定理可得 $BO = 8\text{cm}$, 即可得出 $BD = 2BO = 16\text{cm}$, 再由菱形面积公式计算即可得解, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore BC = AB = 10\text{cm}, \quad AO = \frac{1}{2}AC = 6\text{cm}, \quad BD = 2BO, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 8\text{cm},$$

$$\therefore BD = 2BO = 16\text{cm},$$

$$\therefore AH \perp BC,$$

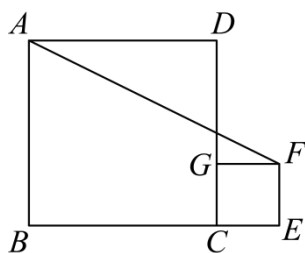
$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot AH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 10 \cdot AH,$$

$$\therefore AH = \frac{48}{5}\text{cm},$$

故答案为: $\frac{48}{5}$.

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中, B 、 C 、 E 三点共线, 点 G 在 CD 上, $BC = 3$, $CE = 1$, 那么 AF 的长是_____.

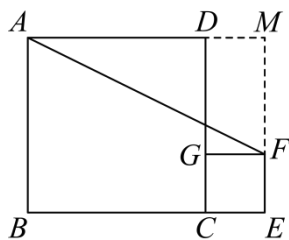


【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质, 矩形的判定与性质, 勾股定理, 延长 AD 、 EF 相交于 M , 根据正方形的性质可得出 $\angle B = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle E = 90^\circ$, $AB = BC = 3$, $EF = CE = 1$, 证明四边形 $ABEM$ 是矩形, 得出 $AM = BE = 4$, $EM = AB = 3$, $\angle M = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle AMF$ 中, 根据勾股定理求出 AF 即可.

【详解】 解: 延长 AD 、 EF 相交于 M ,



$\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中, $BC = 3$, $CE = 1$,

$\therefore BE = 4$, $\angle B = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle E = 90^\circ$, $AB = BC = 3$, $EF = CE = 1$,

$\therefore$ 四边形 $ABEM$ 是矩形,

$\therefore AM = BE = 4$, $EM = AB = 3$, $\angle M = 90^\circ$,

$\therefore FM = EM - EF = 2$,

$\therefore AF = \sqrt{AM^2 + MF^2} = 2\sqrt{5}$,

故答案为: $2\sqrt{5}$.

17. 如果一个函数图像上存在横、纵坐标相等的点, 那么称这个点为这个函数图像的“不动点”. 已知点 A 是函数 $y = 2x + 3$ 图像上的“不动点”, 点 $B(-1, -1)$, 点 $C(-1, 0)$, 如果四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 那么点 D 的坐标是_____.

【答案】 $(-3, 2)$ 或 $(-4, -3)$

【解析】

【分析】 本题考查了新定义，等腰三角形的性质，一次函数，矩形的判定与性质等知识，根据“不动点”定义求出点 A 的坐标，然后分 $AD \parallel BC$ 和 $AB \parallel CD$ 两种情况讨论即可.

【详解】 解: $\because$ 点 A 是函数 $y = 2x + 3$ 图像上的“不动点”，

$$\therefore x = 2x + 3,$$

$$\text{解得 } x = -3,$$

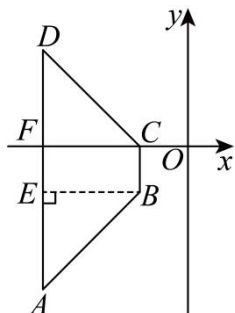
$$\therefore A(-3, -3),$$

$$\therefore B(-1, -1), C(-1, 0),$$

$$\therefore BC = 1, BC \perp x \text{ 轴},$$

当 $AD \parallel BC$ 时,

如图, 过 B 作 $BE \perp AD$ 于 E , AD 交 x 轴于 F ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore AB = DC,$$

$$\therefore AD \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle CFD = \angle BEA = 90^\circ, AE = -1 - (-3) = 2,$$

$$\text{又 } \angle BCF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是矩形,

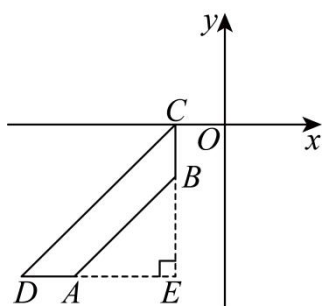
$$\therefore BE = CF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DCF (\text{HL}),$$

$$\therefore AE = DF = 2,$$

$$\therefore D(-3, 2),$$

当 $AB \parallel CD$ 时, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 延长 EA 交 CD 于 D



$$\therefore B(-1, -1), C(-1, 0),$$

$$\therefore BC = 1,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore AD = BC = 1,$$

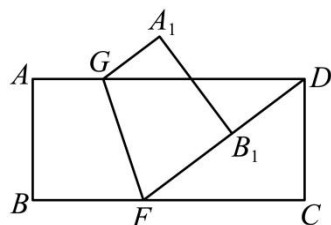
$$\therefore A(-3, -3),$$

$$\therefore D(-4, -3),$$

综上, D 的坐标为 $(-3, 2)$ 或 $(-4, -3)$,

故答案为: $(-3, 2)$ 或 $(-4, -3)$.

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 9$, $AD = 22$, 点 F 在 BC 边上, 折叠矩形使 FB 落在射线 FD 上, 折痕为 GF , 点 A , B 分别落在点 A_1 , B_1 处, 若 $AG = 7$, 那么 BF 的长为_____.



【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 翻折变换的性质, 勾股定理, 等腰三角形的判定, 平行线的性质等知识. 首先求出 $GD = 15$, 由矩形的性质得出 $AD \parallel BC$, $BC = AD = 22$, 由平行线的性质得出 $\angle DGF = \angle BFG$, 由翻折不变性可知, $\angle BFG = \angle DFG$, 证出 $\angle DFG = \angle DGF$, 由等腰三角形的判定定理证出 $DF = DG = 15$, 再由勾股定理求出 CF , 可得 BF , 由此即可解决问题.

【详解】 解: $\because AG = 7, AD = 22$,

$$\therefore GD = 15,$$

$\therefore$ 将纸片折叠, 使 FB 落在射线 FD 上,

$$\therefore \angle BFG = \angle GFD, \quad BF = B_1F$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DGF = \angle BFG,$$

$$\therefore \angle DFG = \angle DGF,$$

$$\therefore GD = DF = 15,$$

$$\therefore CF = \sqrt{DF^2 - CD^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12,$$

$$\therefore BF = BC - CF = 22 - 12 = 10,$$

故答案为：10.

三、简答题（本大题共 4 题，第 19、20 题每题 6 分，第 21、22 题每题 8 分，满分 28 分）

19. 解方程： $2\sqrt{x+5} + 10 = x$.

【答案】 $x = 20$

【解析】

【分析】 根据二次根式和乘方的性质，得一元二次方程、一元一次不等式，通过求解即可得到答案.

【详解】 $\because 2\sqrt{x+5} + 10 = x$

$$\therefore 2\sqrt{x+5} = x - 10$$

$$\therefore 4(x+5) = (x-10)^2, \text{ 且 } x+5 \geq 0, \quad x-10 \geq 0$$

$$\therefore (x-4)(x-20) = 0, \quad x \geq -5, \quad x \geq 10$$

$$\therefore x_1 = 4, \quad x_2 = 20, \quad x \geq -5, \quad x \geq 10$$

$$\therefore x = 20 \text{ 为方程的解.}$$

【点睛】 本题考查了二次根式、乘方、一元二次方程、一元一次不等式的知识；解题的关键是熟练掌握二次根式、乘方、一元二次方程、一元一次不等式的性质，从而完成求解.

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0. \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

【解析】

【分析】 先对 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 分解因式转化为两个一元一次方程，然后联立①，组成两个二元一次方程组，解之即可.

【详解】将方程 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 的左边因式分解，得 $x - 2y = 0$ 或 $x - y = 0$.

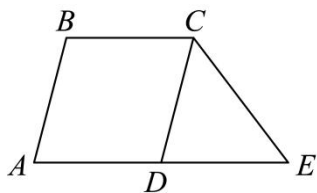
原方程组可以化为 $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 0. \end{cases}$

解这两个方程组得 $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

【点睛】本题考查了高次方程组，将高次方程化为一次方程是解题的关键.

21. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 在边 AD 的延长线上， $DE = AD$ ，设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



- (1) 写出图中所有与 $\overrightarrow{AB}$ 互为相反向量的向量：_____；
- (2) 试用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示： $\overrightarrow{AC} =$ _____； $\overrightarrow{EC} =$ _____；
- (3) 在图中求作： $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}$. (保留作图痕迹，不要求写作法，写出结论).

【答案】(1) $\overrightarrow{BA}$ ， $\overrightarrow{CD}$ ；

(2) $\vec{b} - \vec{a}$ ， $-\vec{a} - \vec{b}$ ；

(3) 见解析.

【解析】

【分析】本题考查了作图，平行四边形的性质，平面向量等知识，解题的关键是熟练掌握平行四边形的性质，学会利用三角形法则解决问题.

- (1) 根据相反向量的定义解答即可；
- (2) 利用三角形法则求解；
- (3) 通过尺规作图，作 $\angle GAF = \angle CED$ 交 CB 延长于点 F ，连接 EF ，利用三角形法则求解即可.

【小问 1 详解】

解：图中所有与 $\overrightarrow{AB}$ 互为相反向量的向量为 $\overrightarrow{BA}$ ， $\overrightarrow{CD}$ ，

故答案为： $\overrightarrow{BA}$ ， $\overrightarrow{CD}$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore DE = AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

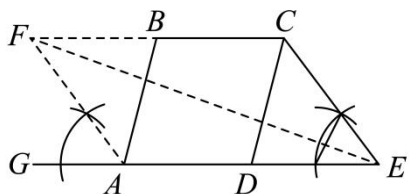
$$\therefore \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b},$$

故答案为： $-\vec{a} + \vec{b}$ ， $-\vec{a} - \vec{b}$ ；

【小问 3 详解】

解：如图，通过尺规作图，作 $\angle GAF = \angle CED$ 交 CB 延长于点 F ，连接 EF ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $BC \parallel AD$ ，即 $AE \parallel FC$ ，

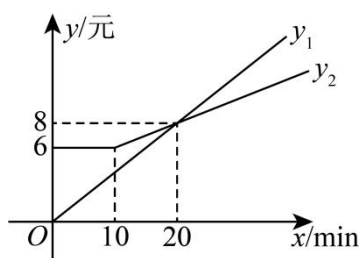
∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AF},$$

$$\therefore \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EF},$$

∴ $\overrightarrow{EF}$ 即为所求.

22. 小明家附近有 A、B 两种品牌的共享电动车，其收费方式分别满足函数 y_1 和 y_2 ，收费 y （元）与骑行时间 x （分钟）的关系如图所示. 已知小明家到工厂的距离为 9km，两种品牌共享电动车的平均行驶速度均为 300m/min.



(1) 当 $x \geq 10$ 时, 求 B 品牌收费方式 y_2 与骑行时间 x 的函数解析式.

(2) 小明从家骑行去工厂, 选择哪种品牌的共享电动车更省钱?

(3) 当骑行时间 x 为多少时, 两种品牌的收费相差 2 元?

【答案】 (1) $y_2 = 0.2x + 4$

(2) B 品牌 (3) 10 或 30

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用, 解题的关键是:

(1) 根据待定系数法求解即可;

(2) 根据待定系数法求出 y_1 的函数解析式, 然后把 $x = \frac{9 \times 1000}{300} = 30$ 代入 y_1 、 y_2 , 求出 y_1 、 y_2 , 最后比较即可求解;

(3) 分 $0 < x \leq 10$, $10 < x \leq 20$, $x > 20$ 三种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

解: 设解析式为 $y_2 = kx + b$,

把 $(10, 6)$, $(20, 8)$ 代入, 得 $\begin{cases} 10k + b = 6 \\ 20k + b = 8 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = 0.2 \\ b = 4 \end{cases}$,

$\therefore y_2 = 0.2x + 4$,

【小问 2 详解】

解: 设 $y_1 = mx$,

把 $(20, 8)$ 代入, 得 $20m = 8$,

解得 $m = 0.4$,

$\therefore y_1 = 0.4x$,

把 $x = \frac{9 \times 1000}{300} = 30$ 代入 y_1, y_2 , 得 $y_1 = 0.4 \times 30 = 12$, $y_2 = 0.2 \times 30 + 4 = 10$,

$\therefore 10 < 12$,

$\therefore$ 小明选择 B 品牌的共享单车更省钱;

【小问 3 详解】

解: 当 $0 < x \leq 10$ 时,

根据题意, 得 $6 - 0.4x = 2$,

解得 $x = 10$,

当 $10 < x \leq 20$ 时,

根据题意, 得 $0.2x + 4 - 0.4x = 2$,

解得 $x = 10$ (舍去),

当 $x > 20$ 时,

根据题意, 得 $0.4x - (0.2x + 4) = 2$,

解得 $x = 30$,

综上, 当骑行时间 x 为 10 或 30 时, 两种品牌的收费相差 2 元

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 23、24 题每题 8 分, 第 25、26 题每题 10 分, 满分 36 分)

23. 学校购买一批奖品. 已知 A 种奖品的单价比 B 种奖品单价便宜 9 元, 用 128 元购买 A 种奖品的数量和用 272 元购买 B 种奖品的数量总共是 32 个.

(1) 求 A 、 B 两种奖品的单价各是多少元?

(2) 该校计划购买 A 、 B 两种奖品共 80 个, 且 A 种奖品的数量不大于 B 种奖品数量的 3 倍, 请你设计出最省钱的购买方案, 并求出最低购买费用.

【答案】(1) A 奖品的单价 8 元, 则 B 奖品的单价是 17 元

(2) 购买 A 奖品 80 个, 购买 B 奖品 20 个, 费用最小, 最小费用为 820 元.

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用, 不等式的应用, 一次函数的应用, 解题的关键:

(1) 设 A 奖品的单价 x 元, 则 B 奖品的单价是 $(x+9)$ 元, 根据“用 128 元购买 A 种奖品的数量和用 272 元购买 B 种奖品的数量总共是 32 个”列方程求解即可;

(2) 设购买 A 奖品 a 个, 则购买 B 奖品 $(80-a)$ 个, 根据“ A 种奖品的数量不大于 B 种奖品数量的 3 倍”列不等式求出 a 的取值范围, 设总费用为 w 元, 则可求出 $w = -9a + 1360$, 然后根据一次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 A 奖品的单价 x 元，则 B 奖品的单价是 $(x+9)$ 元，

根据题意，得 $\frac{128}{x} + \frac{272}{x+9} = 32$ ，

去分母，并化简得 $2x^2 - 7x - 72 = 0$ ，

解得 $x_1 = 8$ ， $x_2 = -\frac{9}{2}$ ，

经检验， $x_1 = 8$ ， $x_2 = -\frac{9}{2}$ 都是原方程的解，但 $x_2 = -\frac{9}{2}$ 不符合实际意义，

$\therefore x = 8$ ， $x + 9 = 17$ ，

答：A 奖品的单价 8 元，则 B 奖品的单价是 17 元；

【小问 2 详解】

解：设购买 A 奖品 a 个，则购买 B 奖品 $(80-a)$ 个，

$\because$ A 种奖品的数量不大于 B 种奖品数量的 3 倍，

$\therefore a \leq 3(80-a)$ ，

解得 $a \leq 60$ ，

设总费用为 w 元，

根据题意，得 $w = 8a + 17(80-a) = -9a + 1360$ ，

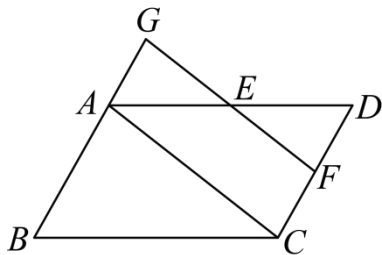
$\therefore -9 < 0$ ，

$\therefore w$ 随 a 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $a = 60$ 时， w 有最小值，最小值为 $-9 \times 60 + 1360 = 820$ ，此时 $80 - a = 20$ ，

即购买 A 奖品 80 个，购买 B 奖品 20 个，费用最小，最小费用为 820 元。

24. 如图，已知在 $\square ABCD$ 中，点 E、F 分别是边 AD、CD 的中点，过点 E、F 的直线交 BA 的延长线于点 G，联结 AC。



(1) 求证：四边形 ACFG 是平行四边形；

(2) 联结 CE，如果 $CE = AE$ ，求证：四边形 ACFG 是矩形。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质，矩形的判定，等腰三角形的性质的性质等知识，掌握相关知识点是解题的关键.

(1) 根据平行四边形的性质得出 $AB \parallel CD$ ，根据平行线的性质得出 $\angle G = \angle DFE$ ，根据 AAS 证明 $\triangle AEG \cong \triangle DEF$ ，得出 $AG = DF$ ，结合线段中点定义可得 $AG = CF$ ，然后根据“一组对边平行且相等是四边形是平行四边形”即可得证；

(2) 根据等边对等角可得出 $\angle EAC = \angle ECA$ ， $\angle D = \angle DCE$ ，结合三角形内角和定理可求出 $\angle ACD = 90^\circ$ ，最后根据矩形的判定即可得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because \square ABCD$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle G = \angle DFE$ ，

$\because E$ 是 AD 中点，

$\therefore AE = DE$ ，

又 $\because \angle AEG = \angle DEF$ ，

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle DEF$ ，

$\therefore AG = DF$ ，

$\because F$ 是 CD 的中点，

$\therefore CF = DF$ ，

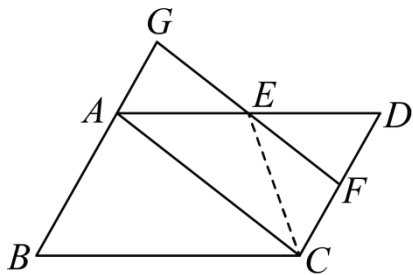
$\therefore AG = CF$ ，

又 $\because AG \parallel CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $ACFG$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

证明：如图，



$\because CE = AE$ ， $AE = DE$ ，

$$\therefore \angle EAC = \angle ECA, CE = DE,$$

$$\therefore \angle D = \angle DCE,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle ACD + \angle D = \angle EAC + \angle ECA + \angle DCE + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore 2(\angle ECA + \angle DCE) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ECA + \angle DCE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ACFG$ 是平行四边形,

$\therefore$ 平行四边形 $ACFG$ 是矩形.

25. 【阅读理解】不论 k 取何值, 正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图像始终经过点 $(0, 0)$, 我们说函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图像经过定点 $(0, 0)$. 类似的, 函数 $y = kx - 2k + 1 (k \neq 0)$ 的图像经过定点 $(2, 1)$. 探求定点的具体思路是: 设法找到 x 的某些取值, 使函数表达式 $y = kx - 2k + 1 (k \neq 0)$ 中含 k 的各项之和为 0, 即变形得: $y = k(x - 2) + 1$, 令 $x = 2$, 总有 $y = 1$, 从而得到点 $(2, 1)$.

【尝试运用】

(1) 函数 $y = (k - 1)x + 3k - 1 (k \neq 1)$ 的图像经过的定点坐标是_____;

(2) 如果点 $A(-3, 2)$, $B(-4, 0)$, O 是原点, 且直线 $y = (k - 1)x + 3k - 1$, 将 $\triangle OAB$ 分成面积相等的两部分, 求 k 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果点 M 在 y 轴上, 点 N 在直线 $y = (k - 1)x + 3k - 1$ 上, 以点 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形, 请直接写出点 N 的坐标.

【答案】(1) $(-3, 2)$

(2) -1

(3) $(-1, -2)$ 或 $(1, 6)$ 或 $(-7, 10)$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的应用, 平行四边形的性质, 三角形的中线等知识, 解题的关键是:

(1) 仿造[阅读理解]的方法求解即可;

(2) 根据三角形中线的性质和中点坐标公式求出 OB 的中点坐标, 然后代入 $y = (k - 1)x + 3k - 1$ 求解即可;

(3) 分三种情况讨论: 以 AN 、 BM 为对角线时; 以 AM 、 BN 为对角线时; 以 AB 、 MN 为对角线时, 然后根据平行四边形的性质以中点坐标公式求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because y = (k-1)x + 3k - 1 = k(x+3) - x - 1$,

$\therefore$ 当 $x+3=0$, 即 $x=-3$ 时, $y=3-1=2$,

$\therefore y = (k-1)x + 3k - 1$ 经过定点 $(-3, 2)$,

故答案为: $(-3, 2)$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知: $y = (k-1)x + 3k - 1$ 经过 $A(-3, 2)$,

$\therefore$ 直线 $y = (k-1)x + 3k - 1$ 将 $\triangle OAB$ 分成面积相等的两部分,

$\therefore$ 直线 $y = (k-1)x + 3k - 1$ 经过 OB 的中点,

又 $B(-4, 0)$,

$\therefore OB$ 的中点坐标为 $(-2, 0)$,

代入 $y = (k-1)x + 3k - 1$, 得 $0 = -2(k-1) + 3k - 1$,

解得 $k = -1$;

【小问 3 详解】

解: 由 (2) 知: $y = -2x - 4$

设 $M(0, m)$, $N(n, -2n-4)$,

以 AN 、 BM 为对角线时,

$\therefore$ 以点 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形,

$$\therefore \begin{cases} \frac{-3+n}{2} = \frac{-4+0}{2} \\ \frac{2+(-2n-4)}{2} = \frac{0+m}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \end{cases},$$

$$\therefore -2n-4 = -2$$

$$\therefore N(-1, -2);$$

以 AM 、 BN 为对角线时,

$\therefore$ 以点 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形,

$$\therefore \begin{cases} \frac{-3+0}{2} = \frac{-4+n}{2} \\ \frac{2+m}{2} = \frac{0+(-2n-4)}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} n=1 \\ m=-8 \end{cases},$$

$$\therefore -2n-4=-6$$

$$\therefore N(1,6);$$

以 AB 、 MN 为对角线时,

$\therefore$ 以点 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形,

$$\therefore \begin{cases} \frac{-3+(-4)}{2} = \frac{0+n}{2} \\ \frac{2+0}{2} = \frac{m+(-2n-4)}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} n=-7 \\ m=-8 \end{cases},$$

$$\therefore -2n-4=10$$

$$\therefore N(-7,10);$$

综上, N 的坐标为 $(-1,-2)$ 或 $(1,6)$ 或 $(-7,10)$.

26. 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, 点 P 为射线 DA 上一动点, 联结 BP , 过点 P 作 $PE \perp PB$, 交射线 CD 于点 E , 且 $PB = PE$.

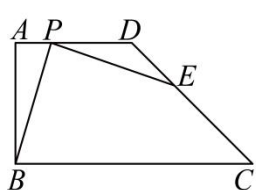


图1

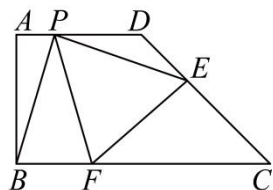


图2

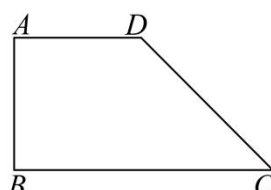


图3

- (1) ①如图 1, 如果 $DE = 2$, 求 AP 的长;
 ②如图 2, 点 F 为 BC 边上一点, 且 $PB = PF$, 求 $\frac{DP}{CF}$ 的值;
 (2) 如果 $AP = 2$, $\triangle PDE$ 是等腰三角形, 求 DP 的长.

【答案】 (1) ① $\sqrt{2}$; ② $\frac{1}{2}$

(2) $2\sqrt{2}$ 或 4

【解析】

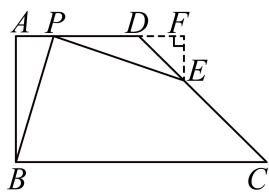
【分析】(1) ①过 E 作 $EF \perp AD$ 于 F , 根据 AAS 可证 $\triangle PFE \cong \triangle BAP$, 得出 $EF = PA$, 判定 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形, 得出 $DF = EF$, 根据勾股定理可求出 EF , 即可求解;

②过 P 作 $PM \perp BC$ 于 M , 过 D 作 $DN \perp BC$ 于 N , 则可证四边形 $APMB$, $PMND$ 都是矩形, $AP = BM$, $AB = PM = DN$, $PD = MN$, 设 $AP = x$, $PD = AB - x$, 故 $BM = x$, $MN = AB - x$, 判定 $\triangle CDN$ 是等腰直角三角形, 得出 $CN = DN = AB$, 根据三线合一的性质得出 $MF = BM = x$, 根据线段和差关系可求出 $CF = 2AB - 2x$, 然后代入计算即可;

(2) 分 P 在线段 AD 和线段 DA 的延长线上讨论, 然后根据等腰直角三角形的判定与性质, 勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: 过 E 作 $EF \perp AD$ 于 F ,



则 $\angle F = \angle A = 90^\circ$,

$\therefore PE \perp PB$,

$\therefore \angle FPE = \angle ABP = 90^\circ - \angle APB$,

又 $PE = BP$,

$\therefore \triangle PFE \cong \triangle BAP$,

$\therefore EF = PA$,

$\because AD \parallel BC$, $\angle C = 45^\circ$,

$\therefore \angle EDF = \angle C = 45^\circ$,

$\therefore \angle DEF = 45^\circ = \angle EDF$,

$\therefore DF = EF$,

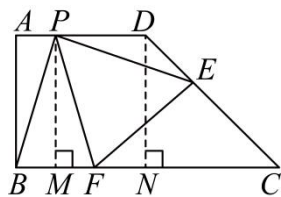
又 $DE = 2$,

$\therefore FE^2 + DF^2 = 2EF^2 = DE^2 = 4$,

$\therefore EF = \sqrt{2}$,

$\therefore AP = \sqrt{2}$;

②解：过 P 作 $PM \perp BC$ 于 M ，过 D 作 $DN \perp BC$ 于 N ，



$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore PM \perp AD,$$

$\therefore$ 四边形 $APMB$ ， $PMND$ 都是矩形，

$$\therefore AP = BM, AB = PM = DN, PD = MN,$$

$$\text{设 } AP = x, PD = AB - x,$$

$$\therefore BM = x, MN = AB - x,$$

$$\therefore \angle C = 45^\circ, \angle DNC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NDC = 45^\circ = \angle C,$$

$$\therefore CN = DN = AB,$$

$$\therefore PB = PF,$$

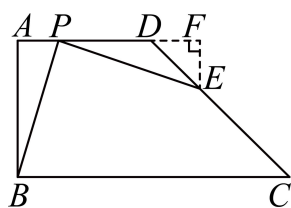
$$\therefore MF = BM = x,$$

$$\therefore CF = BM + MN + CN - BF = x + AB - x + AB - x - x = 2AB - 2x,$$

$$\therefore \frac{DP}{CF} = \frac{AB - x}{2AB - 2x} = \frac{1}{2};$$

【小问2 详解】

解：当 P 在线段 AD 上时，如图，过 E 作 $EF \perp AD$ 于 F ，



由 (1) 可知： $EF = DF = AP = 2$ ， $\angle ADC = 180^\circ - \angle FDE = 135^\circ$ ，

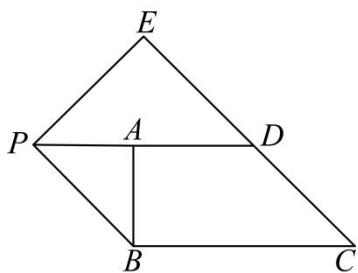
$$\therefore DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = 2\sqrt{2},$$

$\therefore \triangle PDE$ 是等腰三角形， $\angle PDE = 135^\circ$ ，

$$\therefore DP = DE = 2\sqrt{2};$$

当 P 在线段 DA 的延长线上时，

①当 $PE = DE$ 时，如图，



$$\therefore \angle EPD = \angle EDP,$$

$$\because AD \parallel BC, \quad \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EPD = \angle EDP = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore PE \perp PB,$$

$$\therefore \angle APB = 45^\circ,$$

$$\text{又 } \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = 45^\circ = \angle APB,$$

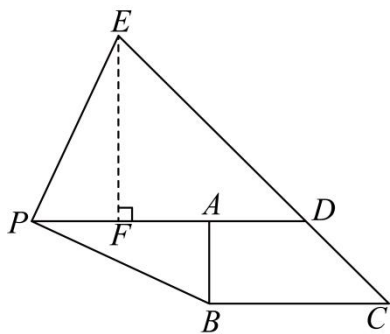
$$\therefore AP = AB = 2,$$

$$\therefore EP = BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{又 } \angle E = 90^\circ, \quad PE = DE,$$

$$\therefore DP = \sqrt{PE^2 + DE^2} = 4;$$

②当 $DP = DE$ 时, 如图, 过 E 作 $EF \perp DP$ 于 F ,



$$\text{则 } \angle EFP = \angle BAP = 90^\circ,$$

$$\because PE \perp PB,$$

$$\therefore \angle FPE = \angle ABP = 90^\circ - \angle APB,$$

$$\text{又 } PE = BP,$$

$$\therefore \triangle PFE \cong \triangle BAP,$$

$$\therefore EF = PA = 2,$$

$$\because EF \perp DP, \angle EDP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FED = \angle EDP = 45^\circ,$$

$$\therefore EF = DF = 2,$$

$$\therefore DE = \sqrt{EF^2 + DF^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DP = 2\sqrt{2};$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } PE = PD \text{ 时, 则 } \angle PED = \angle PDE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EPD = 90^\circ,$$

$$\therefore PD \perp PE,$$

$$\text{又 } PE \perp PB,$$

$$\therefore PD \text{ 与 } PB \text{ 在同一直线上, 不符合题意, 舍去,}$$

综上, DP 的长为 $2\sqrt{2}$ 或 4.

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的判定与性质, 勾股定理, 梯形, 全等三角形的判定与性质等知识, 明确题意, 添加合适辅助线, 合理分类讨论是解题的关键.