

初二年级数学

(测试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列函数中, y 随 x 的增大而增大的函数是 ()

A. $y=2-x$

B. $y=-2x+1$

C. $y=x-2$

D. $y=-x-2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据一次函数的增减性逐项分析即可.

【详解】 A. $y=2-x$, $\because -1 < 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而减小, 故不符合题意;

B. $y=-2x+1$, $\because -2 < 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而减小, 故不符合题意;

C. $y=x-2$, $\because 1 > 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而增大, 故符合题意;

D. $y=-x-2$, $\because -1 < 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而减小, 故不符合题意;

故选 C.

【点睛】 本题考查了一次函数的图像与性质, 对于一次函数 $y=kx+b$ (k 为常数, $k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

2. 下列方程为无理方程的是 ()

A. $\sqrt{3}x-2=0$

B. $\sqrt{x}-3=0$

C. $x^2-\sqrt{2}x+1=0$

D. $\frac{1}{x+1}-\sqrt{2}=0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了无理方程的定义, 能熟记无理方程的定义是解此题的关键, 注意: 根号内含有未知数的方程叫无理方程.

根据无理方程的定义逐个判断即可.

【详解】 解: A. 根号内不含有未知数, 方程属于有理方程, 不属于无理方程, 故本选项不符合题意;

B. 根号内含有未知数, 方程属于无理方程, 故本选项符合题意;

C. 根号内不含有未知数, 方程属于有理方程, 不属于无理方程, 故本选项不符合题意;

D. 根号内不含有未知数, 方程属于有理方程, 不属于无理方程, 故本选项不符合题意;

故选: B.

3. 下列命题中, 真命题是 ()

A. 若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$

B. 若 $\vec{a} = \vec{0}$ 则 $|\vec{a}| = \vec{0}$

C. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $-\vec{a} = \vec{0}$

D. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{-a}| = \vec{0}$

【答案】C

【解析】

【分析】该题主要考查了零向量、向量的模，解题的关键是掌握以上知识点.
根据零向量、向量的模，判断即可；

【详解】A. 若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$, 故原说法是假命题，该选项不符合题意；

B. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{a}| = 0$, 故原说法是假命题，该选项不符合题意；

C. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $-\vec{a} = \vec{0}$, 故原说法是真命题，该选项符合题意；

D. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{-a}| = 0$, 故原说法是假命题，该选项不符合题意；

故选：C.

4. 下列事件中，属于必然事件的是（ ）

A. 抛掷一枚均匀硬币，落地后正面朝上

B. 任意选取两个非零实数，它们的积为正

C. 在平面内画一个三角形，它的内角和等于 180°

D. 明天太阳从西边出来

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三角形内角和性质，事件的分类，必然事件指在一定条件下必然发生的事件，根据各选项描述的事件性质进行判断.

【详解】解：A. 抛掷均匀硬币，落地后可能正面或反面朝上，属于随机事件，排除；

B. 两个非零实数的积可能正（同号）或负（异号），属于随机事件，排除；

C. 平面内任意三角形的内角和恒为 180° ，符合三角形内角和定理，属于必然事件；

D. 太阳从西边出来违背自然规律，属于不可能事件，排除；

故选 C.

5. 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，给下条件不能判定它为菱形的是（ ）

A. $AB=AD$

B. $AC \perp BD$

C. $\angle A = \angle D$

D. CA 平分 $\angle BCD$

【答案】C

【解析】

【分析】根据：①定义：一组邻边相等的平行四边形是菱形；②四边相等；③对角线互相垂直平分的四边形是菱形. 进行判断即可.

【详解】A、为一组邻边相等平行四边形是菱形，不符合题意；

B、为对角线互相垂直平分的平行四边形是菱形，不符合题意；

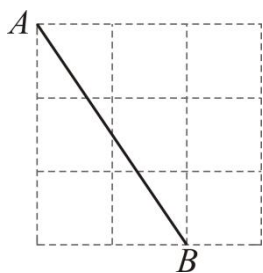
C、可判定为矩形，不能判定为菱形，符合题意；

D、为一条对角线平分一角，可得出一组邻边相等，也能判定为菱形，不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查菱形的判定方法有三种：①定义：一组邻边相等的平行四边形是菱形；②四边相等；③对角线互相垂直平分的四边形是菱形.

6. 如图，在 3×3 的正方形网格中，以线段 AB 为对角线作平行四边形，使另两个顶点也在格点上，则这样的平行四边形最多可以画()



A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定方法即可解决问题.

【详解】在直线 AB 的左下方有 5 个格点，都可以成为平行四边形的顶点，所以这样的平行四边形最多可以画 5 个，

故选 D.

【点睛】本题考查平行四边形的判定，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分)

7. 已知点 $A(4, m)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上，那么 $m =$ _____.

【答案】9

【解析】

【分析】本题考查了求一次函数图像上点的坐标特征，熟练掌握一次函数图像上点的坐标特征是解题的关

键. 根据题意点 $A(4, m)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上, 可知 $m = 2 \times 4 + 1$ 即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 点 $A(4, m)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上,

$$\therefore m = 2 \times 4 + 1 = 9,$$

故答案为: 9.

8. 已知直线 $y = kx - 1$ 与 x 轴交于点 $(3, 0)$, 当 $y > -1$ 时, x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图像和性质.

先求出函数解析式, 再判断即可.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = kx - 1$ 与 x 轴交于点 $(3, 0)$,

$$\therefore 3k - 1 = 0,$$

$$\text{即 } k = \frac{1}{3},$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$\text{当 } y = -1 \text{ 时, } \frac{1}{3}x - 1 = -1$$

$$\text{解得 } x = 0,$$

$$\therefore k = \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore \text{当 } y > -1 \text{ 时, } x > 0,$$

故答案为: $x > 0$.

9. 方程 $\sqrt{11x + 12} = -x$ 的解是_____.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程, 把方程两边同时平方得到 $x^2 - 11x - 12 = 0$, 解方程可得 $x = -1$ 或

$x = 12$, 再根据二次根式的非负性和二次根式有意义的条件得到 $\begin{cases} \sqrt{11x + 12} = -x \geq 0 \\ 11x + 12 \geq 0 \end{cases}$, 解不等式组即可得到答案.

【详解】解: $\because \sqrt{11x + 12} = -x$,

$$\therefore 11x + 12 = x^2,$$

$$\therefore x^2 - 11x - 12 = 0,$$

解得 $x = -1$ 或 $x = 12$,

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{11x+12} = -x \geq 0 \\ 11x+12 \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore -\frac{12}{11} \leq x \leq 0,$$

$$\therefore x = -1,$$

故答案为: $x = -1$.

10. 关于 x 的方程 $5ax = 6(a \neq 0)$ 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{6}{5a}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一次方程. 两边同时除以 $5a$ 即可.

【详解】 解: $\because 5ax = 6(a \neq 0),$

$$\therefore x = \frac{6}{5a},$$

故答案为: $x = \frac{6}{5a}$.

11. 如果 $x = 2$ 是关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{k}{x^2-4} + 1$ 的增根, 那么实数 k 的值为_____

【答案】 4

【解析】

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程, 把 $x=2$ 代入计算即可求出 k 的值.

【详解】 去分母得: $x+2=k+x^2-4,$

把 $x=2$ 代入得: $k=4,$

故答案为 4.

【点睛】 此题考查了分式方程的增根, 增根确定后可按如下步骤进行: ①化分式方程为整式方程; ②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

12. 不透明的布袋里有 2 个黄球, 4 个红球, 5 个白球, 它们除颜色外其他都相同, 那么从布袋中随机摸出一个球恰好为红球的概率是 _____.

【答案】 $\frac{4}{11}$

【解析】

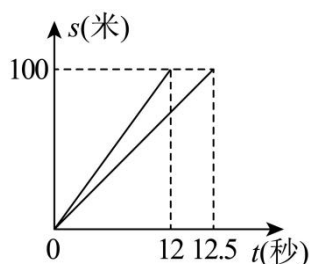
【分析】 本题考查概率公式. 根据题意和题目中的数据, 可以计算出从布袋中随机摸出一个球恰好为红球的概率.

【详解】 解: $\because$ 不透明的布袋里有 2 个黄球, 4 个红球, 5 个白球,

$\therefore$ 从布袋中随机摸出一个球恰好为红球的概率是 $\frac{4}{11}$,

故答案为: $\frac{4}{11}$.

13. 甲、乙两人在一次赛跑中, 路程 s (米) 与时间 t (秒) 的关系如图所示. 当第一个人到达终点时, 第二个人距离终点还剩_____米.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查函数图象的应用, 解题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答问题.

从函数图象可以求出第二个人的速度, 可以得到第一个人到达终点用时 12s, 此时第二个人跑了的路程即可求解, 继而即可求解第二个人距离终点还剩多少米.

【详解】 解: 由图象可得第二个人的速度为 $100 \div 12.5 = 8\text{m/s}$,

第一个人到达终点用时 12s, 此时第二个人跑了 $12 \times 8 = 96\text{m}$,

$\therefore$ 第二个人距离终点还剩 $100 - 96 = 4\text{m}$,

故答案为: 4.

14. 如果一个多边形的内角和为 720° , 那么它的边数是_____.

【答案】 六

【解析】

【分析】 本题考查多边形内角和, 设它的边数为 n , 根据多边形的内角和公式列方程求解即可.

【详解】 解: 设它的边数为 n , 根据题意, 得 $(n-2) \times 180^\circ = 720^\circ$,

解得 $n = 6$,

所以这是一个六边形.

故答案为: 六.

15. 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 120^\circ$, 则 $\angle B =$ _____ 度.

【答案】 120

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质可知, 平行四边形的对角相等, 邻角互补, 再根据已知即可求解.

【详解】 解: $\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A = \angle C$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$,

又 $\because \angle A + \angle C = 120^\circ$,

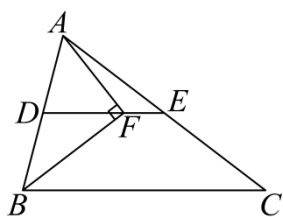
$\therefore \angle A = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$,

$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$.

故答案为: 120.

【点睛】 在应用平行四边形的性质解题时, 要根据具体问题, 有选择的使用, 避免混淆性质, 以致错用性质.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, 点 F 是线段 DE 上的一点且 $EF = 2$, 连接 AF 、 BF , 若 $\angle AFB = 90^\circ$, 则线段 BC 的长是_____.



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的中位线定理的应用, 利用三角形中位线定理得到 $DE = \frac{1}{2}BC$. 由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得到 $DF = \frac{1}{2}AB$. 所以由图中线段间的和差关系来求线段 BC 的长度即可. 解题的关键是了解三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半, 题目比较好, 难度适中.

【详解】 解: $\because$ 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$,

$\because \angle AFB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点, $AB = 8$,

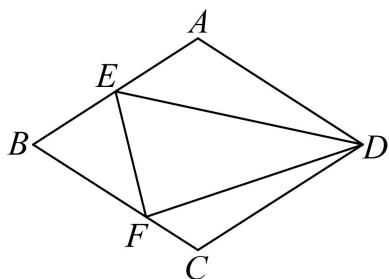
$\therefore DF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$,

$\therefore DE = DF + EF = 4 + 2 = 6$.

$\therefore BC = 12$,

故答案为：12.

17. 如图，菱形 $ABCD$ 的面积为 36，点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上， $AE = BE$ ，如果 $\triangle BEF$ 的面积为 6，那么 $\triangle DEF$ 的面积为_____.

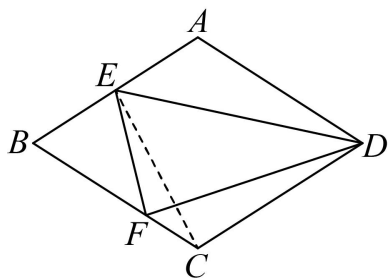


【答案】15

【解析】

【分析】本题考查菱形的性质，三角形的面积，连接 EC ，根据中点得到 $S_{\triangle BEC} = S_{\triangle AED} = \frac{1}{4}S_{\text{菱形}ABCD} = 9$ ，进而得到 $CF:BC = 1:3$ ，求出 $S_{\triangle FCD}$ ，根据 $S_{\triangle DEF} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle BEC} - S_{\triangle AED} - S_{\triangle FCD}$ 计算解题.

【详解】解：连接 EC ，



$\because AE = BE$,

$$\therefore S_{\triangle BEC} = S_{\triangle AED} = \frac{1}{4}S_{\text{菱形}ABCD} = 9,$$

又 $\because \triangle BEF$ 的面积为 6,

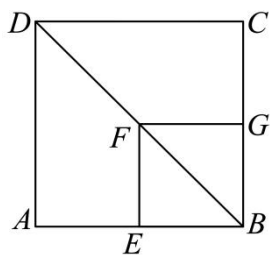
$$\therefore BF:BC = 2:3, \text{ 即 } CF:BC = 1:3,$$

$$\therefore S_{\triangle FCD} = \frac{1}{6}S_{\text{菱形}ABCD} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle AED} - S_{\triangle FCD} = 36 - 6 - 9 - 6 = 15,$$

故答案为：15.

18. 如图，已知正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 顶点 B 重合，点 E 、 F 、 G 分别在边 AB 、 DB 、 CB 上， $AE = BE = 2$ ，将正方形 $BEFG$ 绕着点 B 旋转，点 E 、 G 分别落到点 E' 、 G' ，如果点 D 、 E' 、 G' 在同一直线上时，那么线段 DG' 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{30} + \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{30} - \sqrt{2}$

【解析】

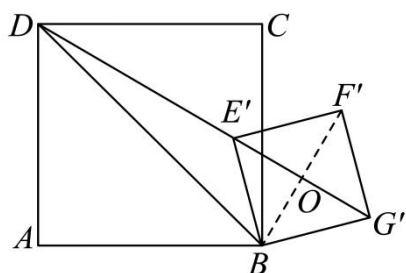
【分析】 本题考查了正方形的性质，旋转的性质，勾股定理等知识. 分点 E' 在 D 、 G' 之间和点 G' 在 D 、 E' 之间两种情况，画出图形求解即可.

【详解】 $\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 顶点 B 重合， $AE = BE = 2$ ，

$\therefore AB = AD = 2 + 2 = 4$ ， $BE = BF = 2$ ， $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ， $BF = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

如图，当点 E' 在 D 、 G' 之间时，连接 BF' ，则 $\angle BOD = 90^\circ$ ，



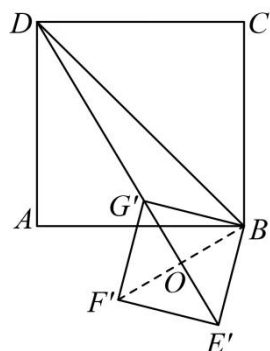
由旋转的性质得四边形 $BG'F'E'$ 是正方形， $BF' = BF = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore BO = OE' = OG' = \frac{1}{2}BF' = \sqrt{2}$

$\therefore OD = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \sqrt{30}$

$\therefore DG' = OD + OG' = \sqrt{30} + \sqrt{2}$.

如图，当点 G' 在 D 、 E' 之间时，连接 BF' ，则 $\angle BOD = 90^\circ$ ，



同理可求, $DG' = OD - OG' = \sqrt{30} - \sqrt{2}$.

综上所述, 线段 DG' 的长为 $\sqrt{30} + \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{30} - \sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{30} + \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{30} - \sqrt{2}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 46 分)

19. 解方程: $\frac{1}{y-2} - \frac{4}{y^2-4} = 1$.

【答案】 $y = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程. 先将分式方程化为整式方程, 再求解整式方程, 最后检验即可.

【详解】 解: $y + 2 - 4 = y^2 - 4$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_1 = 2, y_2 = -1$$

经检验, $y_1 = 2$ 是方程的增根,

所以, 原方程的根为 $y = -1$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查的是解二元二次方程组. 先将第①个方程变形为 $x - y = 2$ 或 $x - y = -2$, 从而得到两个二元一次方程组, 再分别求解即可.

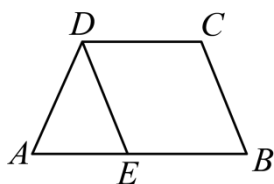
【详解】 解: 由方程①得 $(x - y)^2 = 4$ 则: $x - y = 2$ 或 $x - y = -2$,

原方程组可化为
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

解这两个二元一次方程组，得 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$ ，

所以，原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$ 。

21. 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ，点 E 在 AB 上， $ED \parallel BC$ 。



(1) 填空： $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(2) 填空： $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EA} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 在图中直接作出 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AB}$ 。（不写作法，写结论）

【答案】(1) $\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{AD}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查向量计算，熟练掌握平行四边形法则是解题的关键。

(1) 连接 BD ，先证明四边形 $BCDE$ 是平行四边形，根据平行四边形法则计算即可；

(2) 根据平行四边形法则计算即可；

(3) 连接 BD ，则 $\overrightarrow{BD}$ 即为所求。

【小问 1 详解】

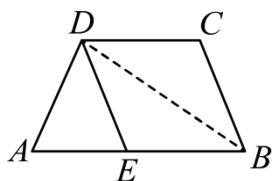
解： $\because$ 梯形 $ABCD$

$\therefore AB \parallel CD$

$\because ED \parallel BC$

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形，

连接 BD ，

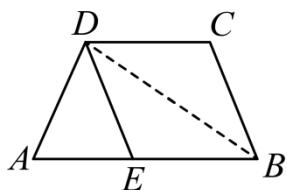


$$\therefore \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

【小问 2 详解】

解：如图，



$$\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$$

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形，

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ED}$$

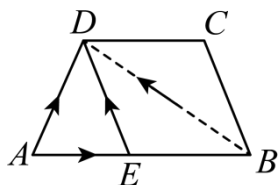
$$\therefore \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EA}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EA}$$

【小问 3 详解】

解：如图， $\overrightarrow{BD}$ 即为所求，



$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}.$$

22. 某年级计划组织部分同学进行义务植树 200 棵, 由于同学们积极参与, 实际参加植树的同学人数比原计划多了 30 人, 结果每人比原计划少植树 1 棵, 但总共植树比原计划多了 40 棵, 如果假设实际参加植树的同学人数为 x 人, 那么可列出方程_____.

【答案】 $\frac{200+40}{x} + 1 = \frac{200}{x-30}$

【解析】

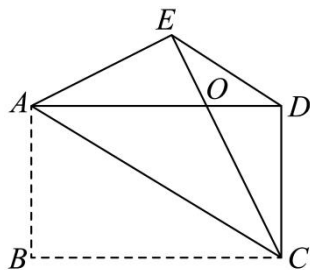
【分析】 本题考查了分式方程的应用. 设实际参加植树的同学人数为 x 人, 则原计划参加植树的同学人数为 $(x-30)$ 人, 根据“结果每人比原计划少植树 1 棵”列出分式方程即可.

【详解】 解: 假设实际参加植树的同学人数为 x 人, 则原计划参加植树的同学人数为 $(x-30)$ 人,

依题意得 $\frac{200+40}{x} + 1 = \frac{200}{x-30},$

故答案为: $\frac{200+40}{x} + 1 = \frac{200}{x-30}.$

23. 已知: 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AD > AB$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折, 点 B 落在点 E 处, CE 与 AD 相交于点 O , 连接 DE .



(1) 求证: $DE \parallel AC$.

(2) 连接 BE , BE 与 AD 的交点为 G , 过 G 作 $GH \parallel DE$ 交 EC 于 H , 连接 DH . 求证: 四边形 $DEGH$ 是矩形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 由矩形的性质可得 $AD \parallel BC$, $AD = BC$. 由平行线的性质可得 $\angle BCA = \angle DAC$, 由折叠的性质可得 $\triangle AEC \cong \triangle ABC$, 由全等三角形的性质可得 $\angle BCA = \angle ECA$, 从而得出 $\angle DAC = \angle ECA$, 再结合等腰三角形的性质以及三角形内角和定理求出 $\angle DAC = \angle ODE$, 即可得证;

(2) 由折叠的性质结合平行线的性质可得 $\angle GED = 90^\circ$, 由同角的余角相等可得 $\angle OEG = \angle OGE$, 从而证明出 $OG = OD$, 证明 $\triangle DEO \cong \triangle GHO$ 得出 $EO = HO$, 即可得证.

【小问 1 详解】

证明：∵ 矩形 $ABCD$ ，

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC.$$

$$\therefore \angle BCA = \angle DAC,$$

∵ ABC 沿直线 AC 翻折

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle ABC.$$

$$\therefore \angle BCA = \angle ECA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ECA,$$

$$\therefore OA = OC.$$

$$\because \triangle AEC \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore EC = BC,$$

$$\therefore AD = EC.$$

$$\therefore OD = OE.$$

$$\therefore \angle ODE = \angle OED.$$

$$\text{在 } \triangle OAC \text{ 中, } \angle DAC + \angle ECA + \angle AOC = 180^\circ.$$

$$\text{在 } \triangle ODE \text{ 中, } \angle ODE + \angle OED + \angle DOE = 180^\circ.$$

$$\text{又 } \angle AOC = \angle DOE,$$

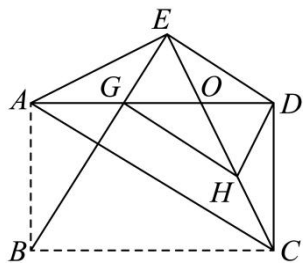
$$\therefore 2\angle DAC = 2\angle ODE,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ODE.$$

$$\therefore AC \parallel DE.$$

【小问 2 详解】

证明：如图：



∵ $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折,

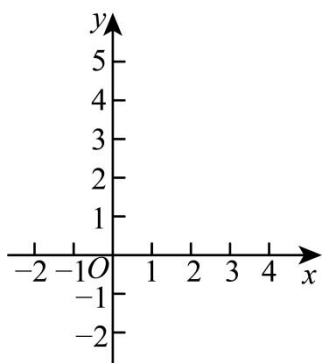
$$\therefore AC \perp BE.$$

$$\because DE \parallel AC,$$

$\therefore BE \perp DE$,
 $\therefore \angle GED = 90^\circ$,
 $\therefore \angle OEG + \angle OED = 90^\circ$, $\angle OGE + \angle ODE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ODE = \angle OED$,
 $\therefore \angle OEG = \angle OGE$.
 $\therefore OG = OE$.
 又 $\therefore OD = OE$.
 $\therefore OG = OD$.
 $\therefore GH \parallel DE$,
 $\therefore \angle DEH = \angle GHE$,
 又 $\angle DOE = \angle GOH$,
 $\therefore \triangle DEO \cong \triangle GHO$.
 $\therefore EO = HO$,
 $\therefore$ 四边形 $DEGH$ 是平行四边形.
 $\therefore$ 平行四边形 $DEGH$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了矩形的判定与性质、折叠的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx$ 经过第一象限内的点 $A(1,2)$ 和点 $C(OC > OA)$ ，以线段 AC 为对角线作矩形 $ABCD$ ， $AB \parallel x$ 轴，反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像经过点 B .



- (1) 求点 C 的坐标 (用含 m 的代数式表示);
- (2) 如果点 B 关于直线 AC 的对称点 E 恰好落在 y 轴上，求 m 的值.

【答案】 (1) $C\left(\frac{m}{2}, m\right)$

$$(2) \frac{16}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图像和性质，一次函数的图像和性质，等腰三角形的判定和性质.

(1) 根据题意得到 $y_B = 2$ ，则 $x_B = \frac{m}{2}$ ，再由垂直得到 $x_C = x_B = \frac{m}{2}$ ，根据直线 $y = kx$ 经过点 $A(1, 2)$ 求出 $y = 2x$ ，即可得到 $y_C = m$ ，即可得解；

(2) 由题意可知 AC 垂直平分 BE ，根据三线合一可得 $\angle ECO = \angle BCO$ ，根据平行线的性质得到 $\angle EOC = \angle BCO$ ，根据等角对等边得到 $EC = EO$ ，求出 $BC = m - 2$ ， $EC = EO = m - 2$ ，延长 CD 与 y 轴交于点 H ，则 $HC = \frac{m}{2}$ ， $HO = m$ ， $HE = 2$ ，根据勾股定理列式计算即可.

【小问 1 详解】

$\because AB \parallel x$ 轴，

$$\therefore y_B = y_A = 2.$$

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 图像经过点 B ,

$$\therefore 2 = \frac{m}{x},$$

$$\therefore x_B = \frac{m}{2}.$$

$\because$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore BC \perp AB,$$

$$\therefore BC \perp x \text{ 轴}.$$

$$\therefore x_C = x_B = \frac{m}{2}.$$

$\because$ 直线 $y = kx$ 经过点 $A(1, 2)$,

$$\therefore k = 2.$$

$$\therefore y = 2x.$$

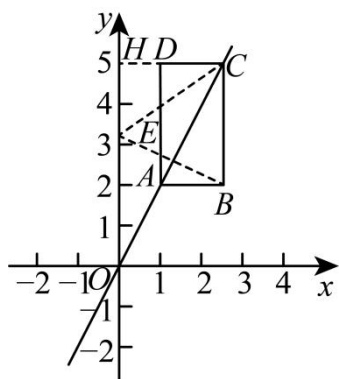
$\because$ 直线 $y = 2x$ 经过点 C ,

$$\therefore y_C = m.$$

$$\therefore C\left(\frac{m}{2}, m\right);$$

【小问 2 详解】

如图，连接 CE ， BE ，



$\because$ 点 B 关于直线 AC 的对称点 E 恰好落在 y 轴上，

$\therefore AC$ 垂直平分 BE .

$\therefore EC = BC$,

$\therefore \angle ECO = \angle BCO$.

$\because BC \perp x$ 轴.

$\therefore BC \parallel y$ 轴.

$\therefore \angle EOC = \angle BCO$,

$\therefore \angle ECO = \angle EOC$,

$\therefore EC = EO$.

$\because B\left(\frac{m}{2}, 2\right)$ 、 $C\left(\frac{m}{2}, m\right)$,

$\therefore BC = m - 2$,

$\therefore EC = EO = m - 2$.

延长 CD 与 y 轴交于点 H ，则 $HC = \frac{m}{2}$ ， $HO = m$ ，

$\therefore HE = 2$.

在 $\text{Rt}\triangle CHE$ 中， $EC^2 = HE^2 + HC^2$ ，

$\therefore (m-2)^2 = 2^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$

$\therefore m_1 = 0$ (舍)， $m_2 = \frac{16}{3}$.

$\therefore m$ 的值是 $\frac{16}{3}$.

25. 新定义：至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫作邻补四边形.

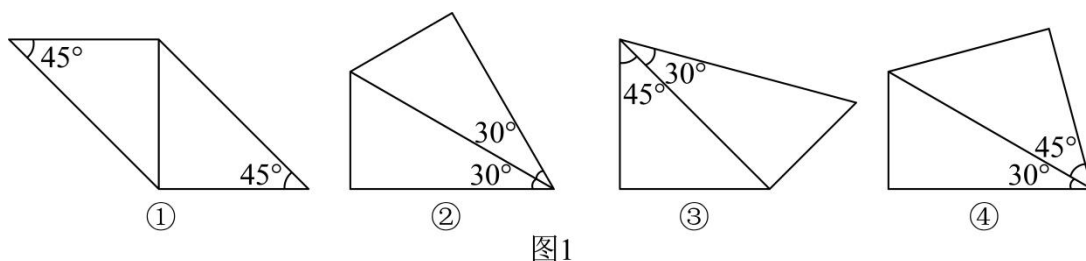


图1

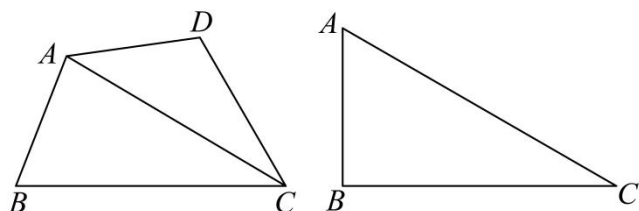


图2

图3

- (1) 如图 1，用分别含有 30° 和 45° 的直角三角形纸板拼出的 4 个四边形，其中邻补四边形的是_____；
- (2) 如图 2，已知四边形 $ABCD$ 是邻补四边形， $AB = AD$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $BC = 5$ ， $CD = 3$ ，求边 AC 的长；
- (3) 如图 3，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AC = 4$ ，点 M 、 N 分别在 BC 、 AC 上，连接 MN 、 BN ，如果四边形 $ABMN$ 是邻补四边形，请直接写出 BN 的长。

【答案】(1) ②④ (2) $AC = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

(3) BN 的长为 2 或 $\sqrt{6}$ 或 $3\sqrt{2} - \sqrt{6}$

【解析】

【分析】(1) 根据邻补四边形的定义判断即可；

(2) 延长 CB 至点 E ，使 $BE = DC$ ，连接 AE ，根据邻补四边形定义、补角的性质可得出 $\angle ABE = \angle D$ ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ (SAS)，得出 $\angle E = \angle ACD$ ， $AE = AC$ ，根据等边对等角得出 $\angle E = \angle ACB$ ，再过 A 作 $AF \perp EC$ 于 F ，根据三线合一性质可求出 $CF = 7$ ，由①可得 $\angle ACD = \angle ACB = 30^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中，利用直角三角形的性质结合勾股定理求解即可；

(3) 根据四边形 $ABMN$ 是邻补四边形， $\angle ABC = 90^\circ$ ，得出 $\angle ANM = 90^\circ$ ，分为①如图 1：当 $AB = AN$ 时，②如图 2：当 $AB = BM$ 时，③如图 3：当 $AN = MN$ 时，分别求解即可。

【小问 1 详解】

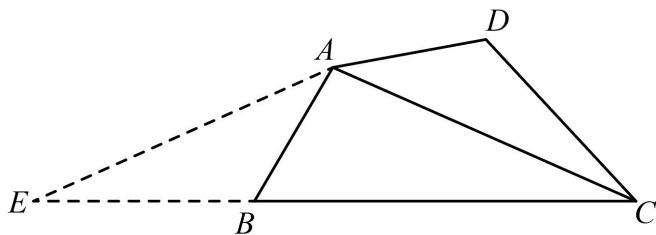
解：观察图知，图①和图③中不存在对角互补，

图 2 和图 4 中存在对角互补且邻边相等，故图②和图④中四边形是邻补四边形，

故答案为：②④；

【小问2 详解】

解：延长 CB 至点 E ，使 $BE = DC$ ，连接 AE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是邻补四边形，

$$\therefore \angle ABC + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle D,$$

$$\therefore AB = AD,$$

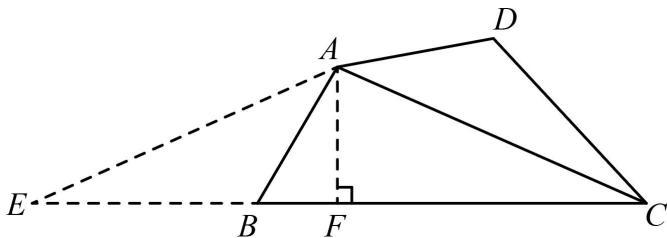
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADC (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle E = \angle ACD, \quad AE = AC,$$

$$\therefore \angle E = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB;$$

过 A 作 $AF \perp EC$ 于 F ，



$$\therefore AE = AC,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(BC + BE) = \frac{1}{2}(BC + DC) = \frac{5+3}{2} = 4,$$

$$\therefore \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中， $AC = 2AF$ ，

$$\text{由勾股定理得，} AC^2 = AF^2 + CF^2, \text{ 即 } AC^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + 4^2,$$

解得 $AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$;

【小问3 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABMN$ 是邻补四边形, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ANM = 90^\circ$,

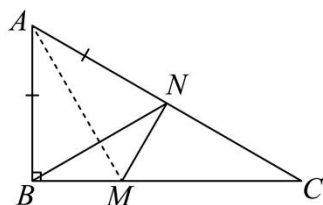


图1

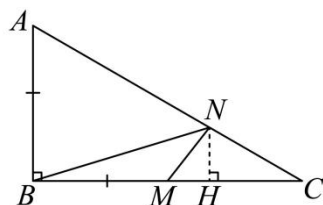


图2

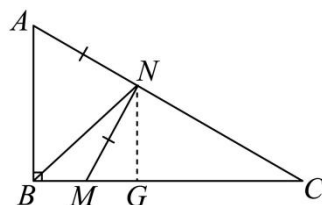


图3

①如图 1: 当 $AB = AN$ 时, 连接 AM ,

则 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ANM$ (HL),

$\therefore BM = MN$,

$\because \angle C = 30^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABN$ 为等边三角形,

$\therefore BN = AB = \frac{1}{2}AC = 2$;

②如图 2: 当 $AB = BM$ 时,

$\therefore BM = AB = \frac{1}{2}AC = 2, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}, CM = 2\sqrt{3} - 2, MN = \frac{1}{2}CM = \sqrt{3} - 1,$

$\therefore CN = \sqrt{CM^2 - MN^2} = 3 - \sqrt{3},$

过点 N 作 $NH \perp CM$,

$\therefore \angle MNH = \angle C = 30^\circ,$

$\therefore NH = \frac{1}{2}CN = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, MH = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$

$\therefore BH = BM + MH = 2 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2},$

$\therefore BN = \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{6};$

③如图 3: 当 $AN = MN$ 时, 设 $AN = MN = x$,

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore CM = 2x, \quad CN = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore AC = (\sqrt{3} + 1)x = 4,$$

$$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3} + 1} = 2(\sqrt{3} - 1),$$

$$\because \angle MNG = \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore NG = \frac{1}{2}CN = \frac{\sqrt{3}}{2}x = 3 - \sqrt{3}, \quad MG = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}x = \sqrt{3} - 1, \quad CG = \sqrt{3}NG = 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore BG = 2\sqrt{3} - (3\sqrt{3} - 3) = 3 - \sqrt{3},$$

$$\therefore BN = \sqrt{2}NG = 3\sqrt{2} - \sqrt{6},$$

综上：BN 的长为 2 或 $\sqrt{6}$ 或 $3\sqrt{2} - \sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质，直角三角形的性质，勾股定理等知识，明确题意，理解新定义，添加合适辅助线，分类讨论是解题的关键.