

2024 学年第二学期八年级数学学科第二次阶段性检测试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 150 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分).

1. 一次函数 $y = -2x - 1$ 的图象不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数的解析式, 利用一次函数图象与系数的关系可得出一次函数 $y = -2x - 1$ 的图象经过第二、三、四象限, 此题得解.

【详解】解: $\because k = -2 < 0, b = -1 < 0,$

$\therefore$ 一次函数 $y = -2x - 1$ 的图象经过第二、三、四象限,

$\therefore$ 一次函数 $y = -2x - 1$ 的图象不经过第一象限.

故选: A.

【点睛】本题考查了一次函数图象与系数的关系, 牢记 “ $k < 0, b < 0 \Leftrightarrow y = kx + b$ 的图象在二、三、四象限” 是解题的关键.

2. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

- A. $x^4 + 16 = 0$ B. $x^2 + 2x + 3 = 0$ C. $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$ D. $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】利用在实数范围内, 一个数的偶数次幂不能为负数对 A 进行判断; 利用判别式的意义对 B 进行判断; 利用分子为 0 且分母不为 0 对 C 进行判断; 利用非负数的性质对 D 进行判断.

【详解】解: A、因为 $x^4 = -16 < 0$, 所以原方程没有实数解, 所以 A 选项错误;

B、因为 $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$, 所以原方程没有实数解, 所以 B 选项错误;

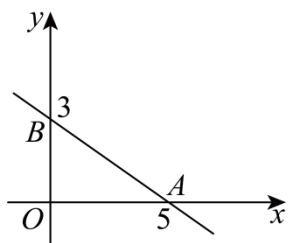
C、 $x^2 - 4 = 0$ 且 $x - 2 \neq 0$, 解得 $x = -2$, 所以 C 选项正确;

D、由于 $x = 0$ 且 $x - 1 = 0$, 所以原方程无解, 所以 D 选项错误.

故选 C.

【点睛】此题考查判别式的意义, 分式有意义的条件, 二次根式, 解题关键在于掌握运算法则

3. 如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过 A、B 两点，那么不等式 $kx+b>0$ 的解集是 ()



A. $x>3$

B. $x<3$

C. $x>5$

D. $x<5$

【答案】D

【解析】

【分析】由图象可知：A (5, 0)，且当 $x<5$ 时， $y>0$ ，即可得到不等式 $kx+b>0$ 的解集是 $x<5$ ，即可得出选项.

【详解】解：∵一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过 A、B 两点，

由图象可知：A (5, 0)，

根据图象当 $x<5$ 时， $y>0$ ，

即：不等式 $kx+b>0$ 的解集是 $x<5$.

故选 D.

【点睛】此题考查一次函数与一元一次不等式，解题关键在于结合函数图象

4. 已知点 C 在线段 AB 上，且满足 $AC^2 = BC \cdot AB$ ，那么下列式子成立的是 ()

A. $\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

B. $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{BC}{AC} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查黄金分割、解一元二次方程，把 AB 当作已知数求出 AC，求出 BC，再分别求出各个比值，根据结果判断即可.

【详解】解：令 $AC=x$ ， $AB=a(a>0)$ ，则 $BC=a-x$ ，

$$AC^2 = BC \cdot AB \text{ 可变形为 } x^2 = (a-x) \cdot a,$$

$$\text{整理，得 } x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times (-a^2) = 5a^2 > 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2},$$

∵ 边长为正数,

$$\therefore x = \frac{-a + \sqrt{5}a}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}, \quad a-x = a - \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2} = \frac{(3-\sqrt{5})a}{2},$$

$$\text{即 } AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB, \quad BC = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ 故 A 选项错误;}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 故 B 选项正确;}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB}{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \text{ 故 C 选项错误;}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 故 D 选项错误;}$$

故选 B.

5. 下列事件中, 是确定事件的个数是 ()

- (1) 一组对边平行, 一组对边相等的四边形是平行四边形;
- (2) 对角线相等的平行四边形是矩形;
- (3) 有一条对角线平分一组对角的平行四边形是菱形;
- (4) 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定和确定事件的概念的知识, 掌握以上知识是解答本题的关键;

本题根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的知识逐一判断每句话的是否是确定事件, 然后即可求解;

【详解】解: (1) 不是确定事件, 不符合题意, 一组对边平行且相等才是平行四边形, 仅一组对边平行且

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CDG$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle CDG \\ \angle AGE = \angle CGD, \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG (\text{AAS}),$$

故 A 正确, 不符合题意;

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG (\text{AAS}),$$

$$\therefore AG = CG, EG = DG,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE,$$

$$\because \angle AGC = \angle EGD,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA = \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore ED \parallel AC,$$

故 B 正确, 不符合题意;

$$\text{设 } AB = CD = t, GD = x, \text{ 则 } AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x,$$

$$\because \text{Rt}\triangle CDG \text{ 中, } CD^2 + DG^2 = CG^2,$$

$$\therefore t^2 + x^2 = (\sqrt{2}t - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore GD = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4}t = \frac{3\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\backslash AG = 3GD,$$

故 C 正确, 不符合题意;

$$\because \text{矩形纸片 } ABCD \text{ 沿对角线 } AC \text{ 折叠, 点 } B \text{ 的对应点为 } E,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC},$$

$$\because AG = 3GD,$$

$$\backslash CG = 3GE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle AEG}$$

故 D 不正确，符合题意，

故选：D

二、填空题：（本大题共 12 题，每空 4 分，满分 48 分）.

7. 如果 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ ，那么 $\frac{x+y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值，将已知去分母转化为 $x = \frac{3}{4}y$ ，再代入 $\frac{x+y}{y}$ 进行约分即可．掌握相应的运算法则是解题的关键．

【详解】 解： $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore x = \frac{3}{4}y,$$

$$\therefore \frac{x+y}{y} = \frac{\frac{3}{4}y+y}{y} = \frac{\frac{7}{4}y}{y} = \frac{7}{4}.$$

故答案为： $\frac{7}{4}$.

8. 方程 $x^5 - 1 = 0$ 的实数根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = 1$ ## 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了高次方程．根据高次方程的解法计算即可．

【详解】 解： $x^5 - 1 = 0$,

$$\therefore x^5 = 1,$$

$$\therefore x = 1.$$

故答案为： $x = 1$

9. 如果关于 x 的方程 $(m+2)x = 1$ 无解，那么 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $m = -2$ ## $-2 = m$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次方程的解，解题时要能熟练掌握并理解．

依据题意，由一次方程无解，从而 $m+2=0$ ，故可得解.

【详解】解：由题意， $\therefore (m+2)x=1$ 无解，

$$\therefore m+2=0,$$

$$\therefore m=-2,$$

故答案为： $m=-2$.

10. 已知线段 $a=3$ 厘米， $c=12$ 厘米，如果线段 b 是线段 a 和 c 的比例中项，那么 $b=$ _____ 厘米.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了比例线段，根据比例中项的定义得到 $a:b=b:c$ ，然后利用比例性质计算即可，解题的关键是理解四条线段 a 、 b 、 c 、 d ，如果其中两条线段的比（即它们的长度比）与另两条线段的比相等， $a:b=c:d$ ，我们就说这四条线段是成比例线段，简称比例线段，当 $a:b=b:c$ 时，线段 b 是线段 a 和 c 的比例中项.

【详解】 $\therefore$ 线段 b 是线段 a 和 c 的比例中项，

$$\therefore a:b=b:c, \quad \text{即 } b^2=ac=3\times 12,$$

$$\therefore b=6(\text{cm}),$$

故答案为： 6 .

11. 方程 $\frac{x^2+3x}{x+3}=0$ 的根是_____.

【答案】 $x=0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，根据解分式方程的步骤解答即可求解，掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

【详解】解：方程两边乘以 $x+3$ 得， $x^2+3x=0$ ，

解得 $x=0$ 或 $x=-3$ ，

检验：当 $x=0$ 时， $x+3=3\neq 0$ ，符合题意；

当 $x=-3$ 时， $x+3=0$ ，不合题意；

$\therefore$ 原分式方程的解为 $x=0$ ，

故答案为： $x=0$.

12. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} =$ _____

【答案】 $\vec{0}$

【解析】

【分析】本题考查了向量的加减，根据向量的加减运算法则计算即可得出答案.

【详解】解: $\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AC} = \vec{0}$.

故答案为: $\vec{0}$.

13. 袋中有 3 个红球、2 个黄球, 每一个球除颜色外都相同, 从袋中任意摸出两个球是红球的概率是_____.

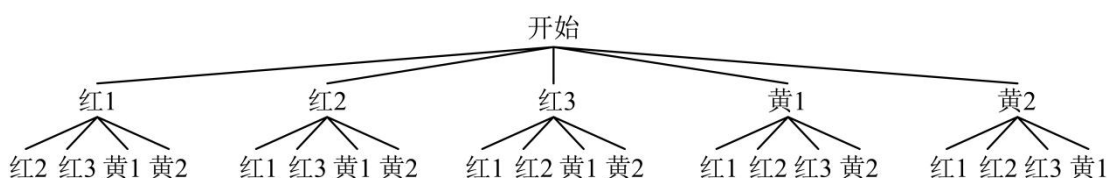
【答案】 $\frac{3}{10}$

【解析】

【分析】本题主要考查了树状图或列表法求解概率, 正确画出树状图或列出表格是解题的关键.

先画出树状图得到所有等可能性的结果数, 再找到符合题意的结果数, 最后依据概率计算公式求解即可.

【详解】解: 画树状图如下:



由树状图可知一共有 20 种等可能性的结果数, 其中任意摸出两个球是红球的结果数有 6 种,

$\therefore$ 任意摸出两个球是红球的概率是 $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

故答案为: $\frac{3}{10}$.

14. 如果一个多边形的内角和是外角和的 3 倍还多 180° , 那么这个多边形是_____边形.

【答案】九

【解析】

【分析】多边形的内角和比外角和的 3 倍多 180° , 而多边形的外角和是 360° , 则内角和是 1260° . n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 设这个多边形的边数是 n , 就得到方程, 从而求出边数.

【详解】解: 设这个多边形的边数为 n , 根据题意, 得

$$(n-2) \cdot 180 = 360 \times 3 + 180,$$

解得: $n=9$.

故答案为: 九.

【点睛】考查了多边形内角与外角, 此题要结合多边形的内角和公式寻求等量关系, 构建方程即可求解.

15. 已知一个对角线长分别为10cm和24cm的菱形, 则菱形的边长是_____cm.

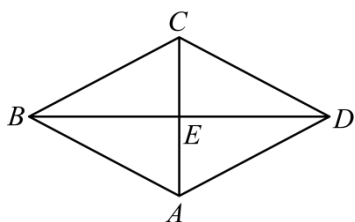
【答案】 13

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质, 勾股定理, 解题的关键是掌握菱形对角线互相垂直平分, 直角三角形两直角边的平方和等于斜边平方.

根据题意画出图形, 根据菱形的性质得出 $BE = \frac{1}{2}BD = 12\text{cm}$, $AE = \frac{1}{2}AC = 5\text{cm}$, $AC \perp BD$, 再根据勾股定理, 即可解答.

【详解】 解: 如图: 菱形 $ABCD$, $BD = 24\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$, AC, BD 相交于点 E ,



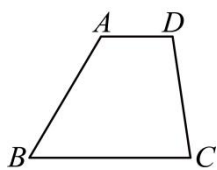
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BD = 12\text{cm}, AE = \frac{1}{2}AC = 5\text{cm}, AC \perp BD,$$

根据勾股定理可得: $AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = 13(\text{cm})$,

故答案为: 13.

16. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 8\text{cm}$, $CD = 7\text{cm}$, $AD = 5\text{cm}$, $\angle B = 60^\circ$, 那么 BC 的长为_____cm.

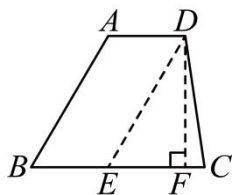


【答案】 9

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F , 得 $\angle DEC = \angle B = 60^\circ$, $\angle EDF = 90^\circ - \angle DEC = 30^\circ$, 证明四边形 $ABED$ 是平行四边形, 得 $DE = AB = 8$, $BE = AD = 5$, 继而得到 $EF = \frac{1}{2}DE = 4$, 再利用勾股定理得 $DF = \sqrt{DE^2 - EF^2} = 4\sqrt{3}$, $\therefore FC = \sqrt{CD^2 - DF^2} = 1$, 最后由 $BC = BE + EF + FC$ 可得答案.

【详解】 解: 如图, 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ,



$$\therefore \angle DEC = \angle B = 60^\circ, \quad \angle DFE = 90^\circ = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle EDF = 90^\circ - \angle DEC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC, \quad AB = 8, \quad CD = 7, \quad AD = 5,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形,

$$\therefore DE = AB = 8, \quad BE = AD = 5,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DE^2 - EF^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore FC = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 1,$$

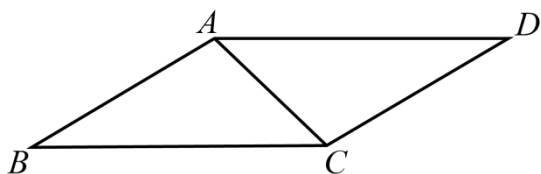
$$\therefore BC = BE + EF + FC = 5 + 4 + 1 = 9(\text{cm}),$$

即 BC 的长为 9cm .

故答案为: 9.

【点睛】本题考查平行四边形的判定和性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 勾股定理等知识点, 通过作辅助线构造平行四边形、直角三角形是解题的关键.

17. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $BC = 4, \angle B = 30^\circ, \angle ACB = 45^\circ$, 将 ABC 沿着 AC 翻折, 点 B 的对应点为点 E , 连接 DE , 那么线段 $DE =$ _____.



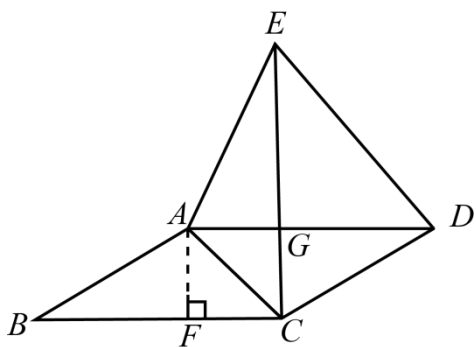
【答案】 $6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】根据翻折, 推出 $\angle BCE = 90^\circ$, 过点 A 作 $AF \perp BC$, 则四边形 $AFCG$ 为矩形, 利用含 30° 的直角三角形的性质, 等腰直角三角形的性质, 得到 $BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{3}x$, $CF = AF = x$, 利用

$BC = AF + BF = x + \sqrt{3}x = 4$, 求出 CF 的长, 进而求出 DG, EG 的长, 利用勾股定理进行求解即可.

【详解】解: 如图,



∵ 翻折,

$$\therefore \angle ACB = \angle ACE = 45^\circ, \angle AEC = \angle ABC = 30^\circ, BC = CE,$$

$$\therefore \angle BCE = 90^\circ,$$

∵ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC = 4,$$

$$\therefore \angle AGC = \angle AGE = \angle EGD = 90^\circ,$$

过点 A 作 $AF \perp BC$, 则四边形 $AFCG$ 为矩形,

$$\therefore AG = CF, CG = AF,$$

设 $AF = x$,

在 $\text{Rt}\triangle AFB$ 中, $\angle B = 30^\circ$,

$$\therefore AB = 2AF = 2x, BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{3}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中, $\angle ACF = 45^\circ$,

$$\therefore CF = AF = x,$$

$$\therefore BC = AF + BF = x + \sqrt{3}x = 4,$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore AF = CF = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore CG = 2\sqrt{3} - 2, AG = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore DG = EG = 4 - (2\sqrt{3} - 2) = 6 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = \sqrt{DG^2 + EG^2} = \sqrt{2}DG = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6};$$

故答案为: $6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质, 折叠的性质, 矩形的判定和性质, 含 30° 度角的直角三角形, 等腰直

角三角形的性质，根据题意，正确的作图，得到特殊三角形，是解题的关键.

18. 我们把一条对角线是另一条对角线 2 倍的四边形叫“奇异四边形”，现有两个全等的直角三角形，一条直角边长是 1，如果它们可以拼成对角线互相垂直的“奇异四边形”，那么直角三角形另一条直角边长是_____.

【答案】 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了新定义：“奇异四边形”，勾股定理，全等三角形的性质，等腰三角形的判定及性质等；分类讨论：(1) 当 $CD=1$ 时，设 $DO=m$ ，可得 $0<m<1$ ， $BD>1$ ，由全等三角形的性质得

$\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$ ， $BA=BD$ ， $CA=CD$ ，由等腰三角形的判定及性质得 $AC=2m$ ，由 $S_{\triangle BCD}$ 的等

积转换得 $2m^2 = \frac{1}{2}BD$ ，由勾股定理得 $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2}$ ，求出 m^2 值，即可求解；(2) 当 $BD=1$ 时，

设 $DO=x$ ，且 $0<x<1$ ， $CD<1$ ，同理可求；

理解新定义，能进行分类讨论是解题的关键.

【详解】 解：(1) 当 $CD=1$ 时，

如图 1 所示：

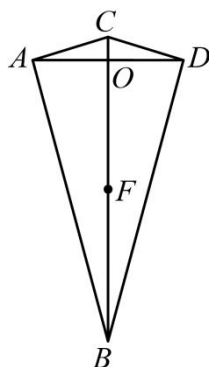


图1

设 $DO=m$ ，

$\therefore 0<m<1$ ， $BD>1$ ，

$\because \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DBC$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$ ，

$BA=BD$ ， $CA=CD$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形，

$\because BC \perp AD$ ，

$\therefore AO=DO=m$ ，

$$\therefore AC = 2m,$$

$$\text{又} \because BC = 2AD,$$

$$\therefore BC = 4m,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DO$$

$$= 2m^2,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CD$$

$$= \frac{1}{2} BD,$$

$$\therefore 2m^2 = \frac{1}{2} BD,$$

$$\text{解得: } BD = 4m^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle DBC$ 中,

$$BD = \sqrt{BC^2 - DC^2}$$

$$= \sqrt{16m^2 - 1},$$

$$\therefore 4m^2 = \sqrt{16m^2 - 1},$$

$$\text{解得: } m^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \text{ 或 } m^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore 4m^2 = 2+\sqrt{3} \text{ 或 } 4m^2 = 2-\sqrt{3} \text{ (舍去),}$$

$$\because BD > 1,$$

$$\therefore BD = 2+\sqrt{3};$$

(2) 当 $BD = 1$ 时, 设 $DO = x$, 且 $0 < x < 1$,

$CD < 1$, 如图 1 所示:

同理可求得:

$$x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \text{ 或 } x^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore 4x^2 = 2-\sqrt{3} \text{ 或 } 4x^2 = 2+\sqrt{3} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore CD < 1,$$

$$\therefore CD = 2-\sqrt{3};$$

综合所述, 另一条直角边的长为 $2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$,

故答案: $2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 解方程: $\sqrt{2x^2 - 1} + x - 2 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = -5$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质, 解一元二次方程, 将原方程转化为 $\sqrt{2x^2 - 1} = 2 - x$, 再两边平方, 得出 $x^2 + 4x - 5 = 0$, 求出解后再进行检验即可得出解.

【详解】 解: $\because \sqrt{2x^2 - 1} + x - 2 = 0$,

$$\therefore \sqrt{2x^2 - 1} = 2 - x,$$

$$\therefore \left(\sqrt{2x^2 - 1}\right)^2 = (2 - x)^2, \text{ 即 } 2x^2 - 1 = 4 - 4x + x^2,$$

$$\therefore x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$\therefore (x^2 - 1) + (4x - 4) = 0, \text{ 即 } (x + 1)(x - 1) + 4(x - 1) = 0,$$

$$\therefore (x - 1)(x + 5) = 0,$$

$$\therefore x - 1 = 0 \text{ 或 } x + 5 = 0,$$

解得: $x_1 = 1, x_2 = -5$,

检验: 当 $x = 1$ 时. 左边 $= \sqrt{2 \times 1^2 - 1} + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 =$ 右边,

$\therefore x = 1$ 是原方程的解;

当 $x = -5$ 时. 左边 $= \sqrt{2 \times (-5)^2 - 1} + (-5) - 2 = 7 + (-5) - 2 = 0 =$ 右边,

$\therefore x = -5$ 是原方程的解;

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1 = 1, x_2 = -5$.

【点睛】 本题考查解无理方程, 二次根式的性质, 解一元二次方程, 掌握解无理方程的一般方法是解题的关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-3 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查解二元二次方程组，将原方程转化为 $\begin{cases} (x+2y)(x-2y)=0 \\ x-y=\pm 3 \end{cases}$ ，继而得到四个二元一次方程组，求解即可。将高次方程组转化为低次方程组是解题的关键。

【详解】 解： $\therefore \begin{cases} (x+2y)(x-2y)=0 \\ (x-y)^2=9 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} (x+2y)(x-2y)=0 \\ x-y=\pm 3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=0 \\ x-y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=0 \\ x-y=-3 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-3 \end{cases}$ 。

21. 如图，已知线段 AC 。

$A \text{-----} C$

(1) 请用无刻度直尺和圆规作出菱形 $ABCD$ ，使得 $BD=2AC$ （不写作法和结论，保留作图痕迹）；

(2) 在 (1) 的条件下，如果 $AC=2$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积为_____，高为_____。

【答案】 (1) 见解析 (2) 4; $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】

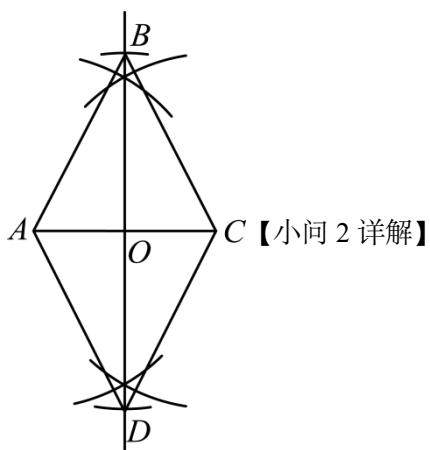
【分析】 本题考查作垂直平分线，菱形的性质，掌握菱形的对角线互相垂直平分是解题的关键。

(1) 作线段 AB 的垂直平分线交 AC 于点 O ，然后截取 $OB=OD=AC$ ，得到四边形 $ABCD$ 即可；

(2) 先根据菱形的面积等于对角线成绩的一半求出菱形的面积，然后根据勾股定理求出 AB 长，根据菱形的面积等于底乘高求出高解题即可；

【小问 1 详解】

解：菱形 $ABCD$ 即为所作；



解: $\because BD = 2AC = 4$,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC \times BD = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$,

$\therefore ABCD$ 是菱形,

$\therefore AO = 1, BO = 2$,

$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$\therefore$ 菱形的高为 $\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$,

故答案为: $4, \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

22. 二中附校八年级准备用 2400 元购买一批学习用品作为奖品奖励优秀学生, 已知甲种学习用品的单价比乙种学习用品的单价少 2 元, 如果用这些钱全部购买甲种学习用品比全部购买乙种学习用品可多买 200 件, 那么请求出这两种学习用品的单价分别是多少元?

【答案】 这两种学习用品的单价分别是 4 元、6 元.

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的实际应用, 解题的关键是理解题意, 列出方程.

设甲种学习用品的单价为 x 元, 则乙种学习用品的单价为 $(x+2)$ 元, 根据用 2400 元全部购买甲种学习用品比全部购买乙种学习用品可多买 200 件, 列出方程, 解出 x , 即可.

【详解】 解: 设甲种学习用品的单价为 x 元, 则乙种学习用品的单价为 $(x+2)$ 元

$$\therefore \frac{2400}{x} = \frac{2400}{x+2} + 200,$$

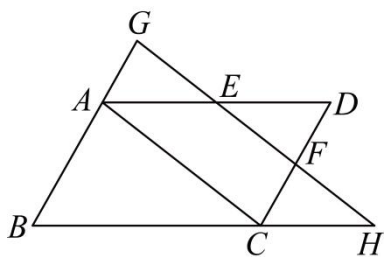
$$\therefore x = 4, x = -6 \text{ (不合题意舍去)}$$

经检验, $x = 4$ 是原方程的解,

$\therefore$ 乙种学习用品的单价为: $x+2 = 6$ 元.

答：这两种学习用品的单价分别是 4 元、6 元.

23. 如图，已知在 $\square ABCD$ 中，点 E 、 F 分别是边 AD 、 CD 的中点，过点 E 、 F 的直线交 BA 、 BC 的延长线于点 G 、 H ，连接 AC 。



(1) 求证：四边形 $ACHE$ 是平行四边形；

(2) 连接 CE ，如果 $CE = AE$ ，求证：四边形 $ACFG$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质，矩形的判定，三角形中位线定理，等腰三角形的性质等知识，掌握相关知识点是解题的关键.

(1) 根据平行四边形的性质以及三角形中位线定理即可求证；

(2) 根据平行四边形的性质得出 $AB \parallel CD$ ，根据平行线的性质得出 $\angle G = \angle DFE$ ，根据 AAS 证明 $\triangle AEG \cong \triangle DEF$ ，得出 $AG = DF$ ，结合线段中点定义可得 $AG = CF$ ，然后根据“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”先证明其为平行四边形，根据等边对等角可得出 $\angle EAC = \angle ECA$ ， $\angle D = \angle DCE$ ，结合三角形内角和定理可求出 $\angle ACD = 90^\circ$ ，最后根据矩形的判定即可得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because \square ABCD$ ，

$\therefore AE \parallel CH$ ，

$\because$ 点 E 、 F 分别是边 AD 、 CD 的中点，

$\therefore EH \parallel AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ACHE$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

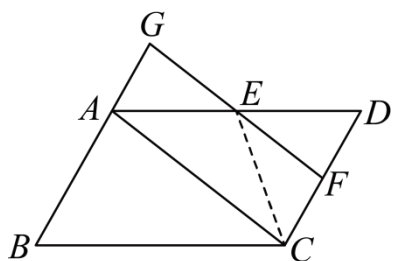
证明： $\because \square ABCD$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle G = \angle DFE$ ，

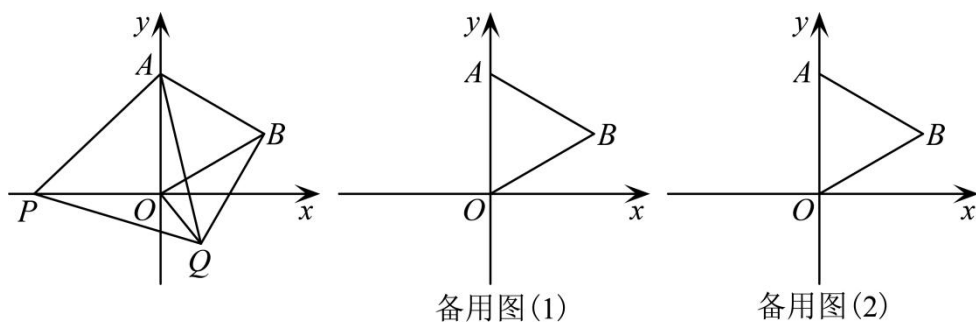
$\because E$ 是 AD 中点，

$\therefore AE = DE$,
 又 $\because \angle AEG = \angle DEF$,
 $\therefore \triangle AEG \cong \triangle DEF$ (AAS) ,
 $\therefore AG = DF$,
 $\because F$ 是 CD 的中点,
 $\therefore CF = DF$,
 $\therefore AG = CF$,
 又 $\because AG \parallel CF$,
 $\therefore$ 四边形 $ACFG$ 是平行四边形;
 如图,



$\because CE = AE$, $AE = DE$,
 $\therefore \angle EAC = \angle ECA$, $CE = DE$,
 $\therefore \angle D = \angle DCE$,
 $\because \angle EAC + \angle ACD + \angle D = \angle EAC + \angle ECA + \angle DCE + \angle D = 180^\circ$,
 $\therefore 2(\angle ECA + \angle DCE) = 180^\circ$,
 $\therefore \angle ACD = \angle ECA + \angle DCE = 90^\circ$,
 $\because$ 四边形 $ACFG$ 是平行四边形,
 $\therefore$ 平行四边形 $ACFG$ 是矩形.

24. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, 4)$, 点 P 是 x 轴上一动点, 以线段 AP 为一边, 在其一侧作等边 $\triangle APQ$. 当点 P 运动到原点 O 处时, 记 Q 的位置为 B .



(1) 求点 B 的坐标;

(2) 当点 P 在 x 轴上运动 (P 不与 O 重合) 时, 求证: $\angle ABQ = 90^\circ$;

(3) 是否存在点 P , 使得以 A 、 O 、 Q 、 B 为顶点的四边形是梯形? 若存在, 请直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $B(2\sqrt{3}, 2)$

(2) 见解析 (3) 存在, $(-2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(4\sqrt{3}, 0)$

【解析】

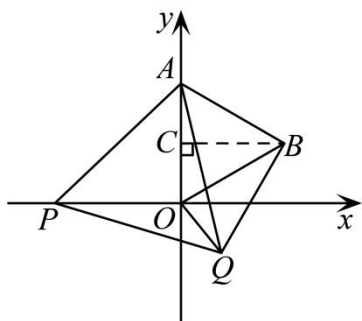
【分析】(1) 根据题意作辅助线过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C , 根据等边三角形的性质和勾股定理即可求出点 B 的坐标,

(2) 根据 $\angle PAQ = \angle OAB = 60^\circ$, 可知 $\angle PAO = \angle QAB$, 得出 $\triangle APO \cong \triangle AQB$ 总成立, 得出当点 P 在 x 轴上运动 (P 不与 Q 重合) 时, $\angle ABQ$ 为 90° ;

(3) 根据点 P 在 x 的正半轴还是负半轴两种情况讨论, 再根据全等三角形的性质即可得出结果.

【小问 1 详解】

解: 过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C ,



$\because A(0, 4)$, $\triangle AOB$ 为等边三角形,

$\therefore AB = OB = 4$, $\angle BOA = 60^\circ$,

$\therefore \angle OBC = 30^\circ$,

$$\therefore OC = AC = 2,$$

$$\therefore BC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{即 } B(2\sqrt{3}, 2);$$

【小问 2 详解】

证明：当点 P 在 x 轴上运动 (P 不与 O 重合) 时，

$$\because \angle PAQ = \angle OAB = 60^\circ,$$

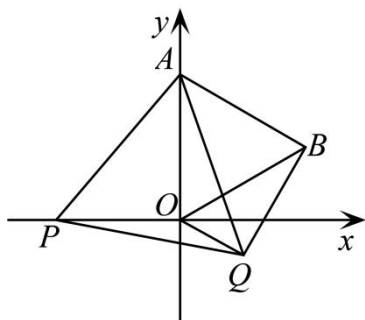
$$\therefore \angle PAO = \angle QAB,$$

在 $\triangle APO$ 和 $\triangle AQB$ 中，

$$\begin{cases} AP = AQ \\ \angle PAO = \angle QAB \\ AO = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APO \cong \triangle AQB (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABQ = \angle AOP = 90^\circ;$$



【小问 3 详解】

由 (2) 可知，点 Q 总在过点 B 且与 AB 垂直的直线上，可见 AO 与 BQ 不平行.

①当点 P 在 x 轴负半轴上时，点 Q 在点 B 的下方，

此时，若 $AB \parallel OQ$ ，四边形 $AOQB$ 即是梯形，

当 $AB \parallel OQ$ 时， $\angle BQO = 90^\circ$ ， $\angle BOQ = \angle ABO = 60^\circ$.

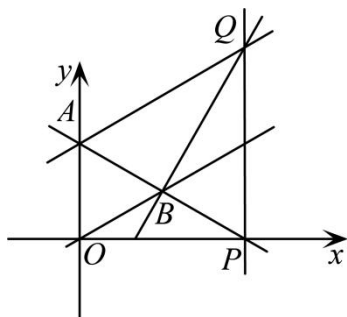
又 $OB = OA = 4$ ，可求得 $BQ = \frac{OB}{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，

由 (2) 可知， $\triangle APO \cong \triangle AQB$ ，

$$\therefore OP = BQ = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 此时 P 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 0)$.

②当点 P 在 x 轴正半轴上时, 点 Q 在 B 的上方,



此时, 若 $AQ \parallel OB$, 四边形 $AOBQ$ 即是梯形,

当 $AQ \parallel OB$ 时, $\angle ABQ = 90^\circ$, $\angle QAB = \angle ABO = 60^\circ$.

又 $AB = 4$, 可求得 $BQ = \sqrt{3}AB = 4\sqrt{3}$,

由 (2) 可知, $\triangle APO \cong \triangle AQB$,

$\therefore OP = BQ = 4\sqrt{3}$,

$\therefore$ 此时 P 的坐标为 $(4\sqrt{3}, 0)$.

综上, P 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(4\sqrt{3}, 0)$.

【点睛】 本题主要考查了等边三角形的性质、勾股定理以及全等三角形的判定及性质, 难度适中.

25. 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 3$, 点 M 为射线 CD 上的动点 (M 与点 C 不重合) 将矩形沿某一直线对折, 使点 B 与点 M 重合, 折痕与边 AD 交于点 E , 与边 BC 交于点 F .

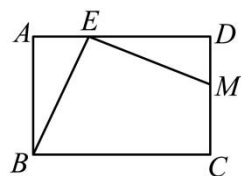


图1

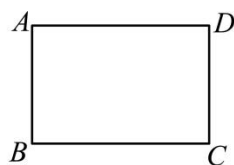


图2

(1) 如图 1, 若 $BE \perp ME$, 求 CM 的长;

(2) 当 M 在边 CD 上时, 设 $CM = x$, $AE = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并直接写出定义域;

(3) 当 $\triangle BEF$ 是等腰三角形时, 直接写出 CM 的长.

【答案】 (1) 1 (2) $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2} (0 \leq x \leq 2)$;

(3) CM 的长为 $4 \pm \sqrt{7}$ 或 2 或 $\sqrt{7}$.

【解析】

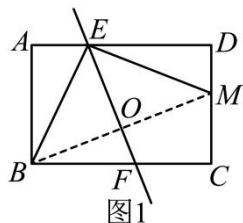
【分析】 (1) 证明 $\triangle AEB \cong \triangle DME$ (AAS), 即可求解;

(2) $EM = 3 - y$, $DE = 2 - x$, 由勾股定理即可求解;

(3) 分 $BE = EF$ 、 $BE = BF$ 、 $BF = EF$ 三种情况, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设 EF 交 BM 于点 O ,



则 $BE = ME$,

$$\angle ABE + \angle AEB = 90^\circ, \quad \angle AEB + \angle MED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MED = \angle ABE,$$

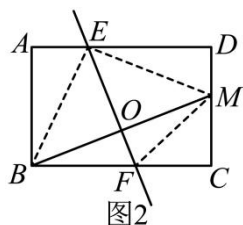
$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DME (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = ED = 2, \quad AE = DM,$$

$$\text{则 } AE = AD - ED = 2 - 1 = 1 = CM;$$

【小问 2 详解】

解: 由题意得: 则 $BE = EM$, $BF = MF$,



$$\because CM = x, \quad AE = y,$$

$$\therefore EM = 3 - y, \quad DE = 2 - x,$$

$$\because BE = EM,$$

$$\text{则 } y^2 + 4 = (3 - y)^2 + (2 - x)^2,$$

$$\text{化简得: } y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2} (0 \leq x \leq 2);$$

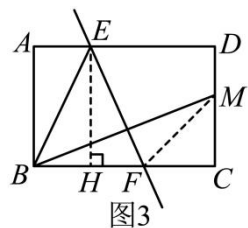
【小问 3 详解】

解: ①当 $BE = EF$ 时,

过点 E 作 $EH \perp BC$, 则 $BH = HF = AE = y$,

$$\text{则 } FC = BC - BH = 3 - 2y,$$

连接 FM ，则 $FM = BF = 2y$ ，



在 $\triangle MFC$ 中， $MF^2 = FC^2 + MC^2$ ，

即： $(2y)^2 = (3-2y)^2 + x^2 \dots ②$ ，

联立①②并解得： $x = 4 \pm \sqrt{7}$ ，

故 $CM = x = 4 - \sqrt{7}$ ；

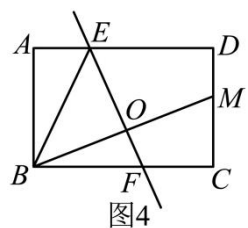
②当 $BE = BF$ 时，

则 $BE = BF = EM$ ，

$\therefore$ 点 M 与点 D 重合，

即： $CM = 2$ ；

③当 $BF = EF$ 时，



则 $\angle FEB = \angle EBF = \angle AEB$ ，

即： BE 是 $\angle AEF$ 的角平分线，

故： $AB = BO = \frac{1}{2}BM = 2$ ，

则 $BM = 4$ ，而 $BC = 3$ ，

则 $CM = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ ；

故 CM 的长为 $4 \pm \sqrt{7}$ 或 2 或 $\sqrt{7}$ 。

【点睛】本题为四边形综合应用题，涉及到矩形与折叠问题、勾股定理运用、二次函数基本知识等，其中 (3)，关键是按条件分类，正确画图、确立线段间的关系，进而求解，本题综合性强，难度较大。