

八下数学第二次阶段练习

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分)

1. 一次函数 $y = x - 2$ 的图像不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质，熟练掌握一次函数的性质是解答本题的关键.

先根据一次函数 $y = x - 2$ 中 $k = 1 > 0$ ， $b = -2 < 0$ 判断出函数图象经过的象限，进而可得出结论.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = x - 2$ 中 $k = 1 > 0$ ， $b = -2 < 0$ ，

$\therefore$ 此函数的图象经过第一、三、四象限，不经过第二象限，

故选： B.

2. 下列关于 x 的方程有实数根的是 ()

A. $\sqrt{x+2} + x = 0$

B. $\sqrt{x+1} + 1 = 0$

C. $x^4 + 1 = 0$

D. $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解分式方程，二次根式有意义的条件，熟练掌握以上知识点是解答本题的关键.

根据解一元二次方程，解分式方程，二次根式有意义的条件等知识点逐项判断解答即可.

【详解】 解： A、 $\because \sqrt{x+2} + x = 0$ ，

$$\therefore \sqrt{x+2} = -x,$$

$$\therefore x+2 = x^2, \text{ 即 } x^2 - x - 2 = 0,$$

解得： $x = 2$ 或 $x = -1$ ，

经检验， $x = -1$ 是原方程 的根，

此方程有实数解，故 A 选项符合题意；

B、 $\because \sqrt{x+1} + 1 = 0$ ，

$$\therefore \sqrt{x+1} = -1,$$

∴ 此方程无实数根，故 B 选项不符合题意；

C、∵ $x^4 + 1 = 0$,

∴ $x^4 = -1$,

∴ 此方程无实数根，故 C 选项不符合题意；

D、∵ $\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$,

方程两边同乘 $x^2 - 1$ ，得 $x = 1$ ，

∴ $x^2 - 1 = 0$,

∴ $x = 1$ 为增根，

∴ 此方程无实数根，故 D 选项不符合题意；

故选：A.

3. 某区为残疾人办实事，在一道路改造工程中，为盲人修建一条长 3000 米的盲道，在实际施工中，由于增加了施工人员，每天可以比原计划多修建 250 米，结果提前 2 天完成工程，设实际每天修建盲道 x 米，根据题意可得方程（ ）

A. $\frac{3000}{x - 250} - \frac{3000}{x} = 2$

B. $\frac{3000}{x + 250} - \frac{3000}{x} = 2$

C. $\frac{3000}{x} - \frac{3000}{x - 250} = 2$

D. $\frac{3000}{x} - \frac{3000}{x + 250} = 2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题属于工程问题，未知量是工作效率：实际每天修建盲道 x 米. 题目告诉了工作总量：3000 米，那么根据工作时间来列等量关系. 等量关系为：原计划工作时间 - 现在工作时间 = 2 天，据此列出方程.

【详解】解：实际每天修建盲道 x 米，则原计划每天修 $(x - 250)$ 米.

由题意，知原计划用的时间为 $\frac{3000}{x - 250}$ 天，实际用的时间为： $\frac{3000}{x}$ 天，

故所列方程为： $\frac{3000}{x - 250} - \frac{3000}{x} = 2$.

故选 A.

【点睛】本题考查用分式方程解决工程问题，工程问题的基本关系式为：工作时间 = 工作总量 ÷ 工作效率. 找到关键描述语，得到等量关系是解决问题的关键.

4. 关于抛物线 $y = -x^2 + 2x - 3$ 的判断，下列说法正确的是（ ）

A. 抛物线的开口方向向上

B. 抛物线的对称轴是直线 $x = -1$

C. 抛物线对称轴左侧部分是下降的

D. 抛物线顶点到 x 轴的距离是 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次项系数的正负性判断开口方向；根据对称轴公式 $x = -\frac{b}{2a}$ 计算对称轴；根据开口方向判断图象是上升还是下降；根据顶点坐标公式 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 计算顶点坐标进行判断.

【详解】A: 二次项系数为 $-1 < 0$ ，故开口向下，错误；

B: 对称轴公式 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$ ，错误；

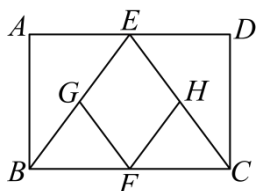
C: 开口向下，在对称轴左侧部分上升，错误；

D: 顶点坐标公式 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 代入计算得顶点为 $(1, -2)$ ，顶点到 x 轴的距离是 2，正确.

故答案选: D

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质，掌握相关的公式以及系数特殊性判断是解题关键.

5. 如图，矩形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点， G 、 H 分别是 BE 、 CE 的中点，要使四边形 $EGFH$ 是正方形，只需添加一个条件，这个条件可以是 ()



A. $BC = AB$

B. $BC = 2AB$

C. $BC = \sqrt{2}AB$

D. $BC = \sqrt{3}AB$

【答案】B

【解析】

【分析】先利用矩形的性质进一步得出 $BE = CE$ ，再根据三角形中位线的判定和性质得出四边形 $EGFH$ 是菱形，再证明 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，进而可得出 $\angle GEH = 90^\circ$ ，即可证明四边形 $EGFH$ 是正方形.

【详解】解：添加的条件可以是 $BC = 2AB$ ，理由如下：

$\because$ 点 E 是 AD 的中点，

$\therefore AE = DE$ ，

$\because ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$ ， $AB = DC$ ，

$$\therefore \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{CD^2 + DE^2},$$

$$\therefore BE = CE,$$

$\therefore$ 点 G 、 F 、 H 分别是 EB 、 BC 、 CE 的中点,

$$\therefore GF = \frac{1}{2}EC = EH = HC, \quad HF = \frac{1}{2}BE = GE = BG,$$

$$\therefore EG = GF = FH = HE,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是菱形,

$\because BC = 2AB$, 点 E 是 AD 的中点,

$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AEB = 45^\circ,$$

同理可得 $\angle DEC = 45^\circ$,

$$\therefore \angle GEH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是正方形.

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了正方形的判定, 矩形的性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 三角形中位线的判定和性质等知识, 掌握正方形的判定是解题的关键.

6. 下列命题中, 假命题是 ()

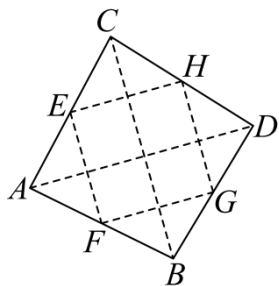
- A. 顺次联结任意四边形四边中点所得的四边形是平行四边形
- B. 顺次联结对角线相等的四边形四边中点所得的四边形是菱形
- C. 顺次联结对角线互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是矩形
- D. 顺次联结两组邻边互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是矩形

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据平行四边形、特殊的平行四边形的判定、中位线定理、中点四边形的定义进行判定即可.

【详解】



观察图形: E, F, G, H 分别为 AC, AB, BD, CD 的中点, 根据中位线定理:

$$EF \parallel BC, GH \parallel BC, EF = GH = \frac{1}{2}BC$$

- A: 顺次联结任意四边形四边中点所得的四边形是平行四边形,正确;
 B: 顺次联结对角线相等的四边形四边中点所得的四边形是菱形, 正确;
 C: 顺次联结对角线互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是矩形, 正确;
 D: 顺次联结两组邻边互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是平行四边形, 错误.

故答案选: D.

【点睛】 本题考查中位线定理应用、平行四边形、特殊的平行四边形的判定, 掌握四边形的判定是解题关键.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 一次函数的图像平行于直线 $y = 2x + 1$, 截距是 -3 , 这个一次函数的解析式是_____.

【答案】 $y = 2x - 3$ 或 $y = 2x + 6$

【解析】

【分析】 设所求直线解析式为 $y = kx + b$, 先根据截距的定义得到直线过点 $(0, -3)$ 或 $(-3, 0)$, 再根据两直线平行的问题得到 $k = 2$, 由此可得到所求直线解析式.

【详解】 解: 设所求直线解析式为 $y = kx + b$,

①一次函数的图像与 y 轴的截距是 -3 , 且与直线 $y = 2x + 1$ 平行,

$$\therefore k = 2, b = -3,$$

$$\therefore \text{所求直线解析式为 } y = 2x - 3;$$

②当一次函数的图像与 x 轴的截距为 -3 , 且与直线 $y = 2x + 1$ 平行,

$$\therefore k = 2,$$

$$\text{把点 } (-3, 0) \text{ 代入 } y = 2x + b, \text{ 得: } 0 = 2 \times (-3) + b,$$

$$\text{解得: } b = 6,$$

$$\therefore \text{所求直线解析式为 } y = 2x + 6;$$

故答案为 $y = 2x - 3$ 或 $y = 2x + 6$.

【点睛】 本题考查了两直线相交或平行的问题: 两条直线的交点坐标, 就是由这两条直线相对应的一次函数表达式所组成的二元一次方程组的解; 若两条直线是平行的关系, 那么他们的自变量系数相同, 即 k 值相同. 也考查了待定系数法求一次函数解析式.

8. 方程 $(x-4)\sqrt{x-3}=0$ 的解为_____.

【答案】 3 或 4

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，因式分解法解一元二次方程，解题的关键是掌握利用因式分解求解方程.

【详解】 解： $\because (x-4)\sqrt{x-3}=0$,

$\therefore x-4=0$ 或 $x-3=0$,

解得： $x_1=4$, $x_2=3$

故答案为： 3 或 4.

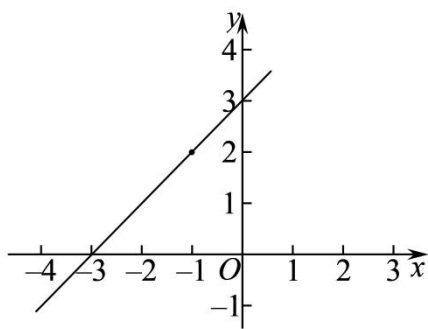
9. 如果一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 为常数, $k \neq 0$) 的图像过点 $(-1, 2)$ 且经过第一、二、三象限, 那么当 $y > 2$ 时, x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > -1$

【解析】

【分析】 根据题意画出图形, 进而即可求解.

【详解】 解: 如图所示,



当 $y > 2$ 时, x 的取值范围是 $x > -1$

故答案为: $x > -1$.

【点睛】 本题考查了一次函数的性质, 熟练掌握一次函数的性质是解题的关键.

10. 关于 x 方程 $a(x-1)=1$ ($a \neq 0$) 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{a+1}{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程, 熟练掌握解一元一次方程的步骤是解题的关键

先去括号，再通过移项、系数化为1来求解方程.

【详解】解： $a(x-1)=1(a \neq 0)$

$$ax-a=1.$$

$$ax=1+a.$$

$$x=\frac{a+1}{a}.$$

故答案为： $x=\frac{a+1}{a}$.

11. $\square ABCD$ 中， $\angle A$ 与 $\angle C$ 的和为 100° ，那么 $\angle B =$ _____ $^\circ$.

【答案】 130

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质，对角相等以及邻角互补即可解答.

【详解】解： $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ, \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

故答案为 130.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，在掌握平行四边形对角相等以及邻角互补的性质是解答本题的关键.

12. 如果将抛物线 $y=(x-4)^2$ 先向下平移 3 个单位，再向左平移 5 个单位，那么所得新抛物线的表达式是 _____.

【答案】 $y=(x+1)^2-3$

【解析】

【分析】本题考查二次函数图象的平移，根据平移规则：左加右减，上加下减，进行解即可. 熟练掌握平移规则，是解题的关键.

【详解】解：由题意，平移后所得新抛物线的表达式是： $y=(x-4+5)^2-3=(x+1)^2-3$;

故答案为： $y=(x+1)^2-3$.

13. 一个多边形的内角的是五边形外角和的 3 倍，则这个多边形是 _____ 边形.

【答案】 八

【解析】

【分析】根据多边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，外角和等于 360° ，结合题意列方程求解即可.

【详解】解：设多边形的边数是 n ，则这个多边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，

$\therefore$ 五边形的外角和为 360° ，且这个多边形的内角和是五边形的外角和的 3 倍，

$$\therefore (n-2) \cdot 180^\circ = 3 \times 360^\circ,$$

解得 $n = 8$ ，

$\therefore$ 这个多边形为八边形.

故答案为：八.

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和与外角和，熟记多边形的内角和公式和外角和为 360° 是解题的关键，要注意“八”不能用阿拉伯数字写.

14. 如果二次函数 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ($a_1 \neq 0$, a_1 、 b_1 、 c_1 是常数) 与 $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ($a_2 \neq 0$, a_2 、 b_2 、 c_2 是常数) 满足 a_1 与 a_2 互为相反数, b_1 与 b_2 相等, c_1 与 c_2 互为倒数, 那么称这两个函数为“亚旋转函数”. 请直接写出函数 $y = -x^2 + 3x - 2$ 的“亚旋转函数”为_____.

【答案】 $y = x^2 + 3x - \frac{1}{2}$

【解析】

【详解】分析：仔细阅读题意，明确“亚旋转函数”的意义，然后根据特点求解即可.

详解： $\because y = -x^2 + 3x - 2$ 中 $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$ ，且 -1 的相反数是 1 ，与 b 相等的数是 3 ， -2 的倒数是 $-\frac{1}{2}$ ，

$\therefore y = -x^2 + 3x - 2$ 的“亚旋转函数”为 $y = x^2 + 3x - \frac{1}{2}$.

故答案是： $y = x^2 + 3x - \frac{1}{2}$.

点睛：此题主要考查了新定义下的函数关系，仔细认真审题，确定解题方法，然后直接根据特点求解是解题关键.

15. 菱形的对角线分别是 6 和 8，那么这个菱形的高为_____.

【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质，勾股定理，菱形面积的计算，熟练掌握以上知识点是解答本题的关键. 根据菱形的对角线互相垂直平分再结合勾股定理求出菱形的边长，菱形的面积，设高为 h ，则 $5 \times h = 24$ ，解出 h 即可得解.

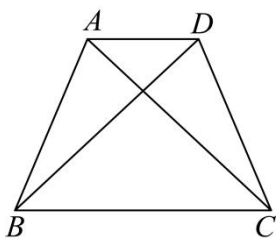
【详解】解：菱形的边长为 $\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 5$ ，面积为 $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ ，

设高为 h ，则 $5 \times h = 24$ ，

解得： $h = \frac{24}{5}$ ，

故答案为： $\frac{24}{5}$ 。

16. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AC \perp BD$ ， 如果 $BC = 4$ ， $AD = 2$ ， 那么梯形 $ABCD$ 的面积为_____。



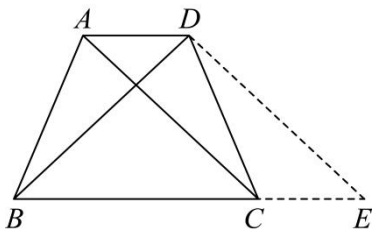
【答案】 9

【解析】

【分析】 题目主要考查等腰梯形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理理解三角形，平行四边形的判定和性质等，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键。

过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E ，得四边形 $ACED$ 是平行四边形，再由平行四边形的性质得出 $CE = AD = 2$ ， $\triangle ACD \cong \triangle CDE$ ，利用等腰梯形的性质及全等三角形的判定得出 $\triangle ACD \cong \triangle DBA$ (SAS)，再由等腰三角形的判定得出 $\triangle BDE$ 为等腰直角三角形，结合图形求解即可。

【详解】解：过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E ，



则四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$\therefore CE = AD = 2$ ， $\triangle ACD \cong \triangle CDE$ ，

$\therefore BE = 4 + 2 = 6$ ，

$\therefore$ 等腰梯形 $ABCD$ ，

$\therefore AB = CD$ ， $\angle BAD = \angle CDA$ ，

$\therefore AD = AD$ ，

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle DBA (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = BD,$$

$$\therefore DE = BD,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$\therefore BDE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore BD = DE = 3\sqrt{2}, \text{ 梯形 } ABCD \text{ 的面积} = \triangle BDE \text{ 面积},$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积} = \triangle BDE \text{ 面积为: } \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9$$

故答案为: 9.

17. 已知点 $(-1, y_1)$, $(\sqrt{2}, y_2)$, $(2, y_3)$ 在函数 $y = ax^2 - 2ax + a - 2$ ($a > 0$) 的图像上, 那么 y_1 、 y_2 、 y_3 按由小到大的顺序排列是_____.

【答案】 $y_2 < y_3 < y_1$

【解析】

【分析】 先根据二次函数的解析式计算出对称轴, 然后结合图象根据点与对称轴距离的远近判断函数的大小即可.

【详解】 二次函数的对称轴为 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$,

$$\therefore a > 0,$$

$\therefore$ 二次函数开口方向向上, 且距离对称轴越远函数值越大.

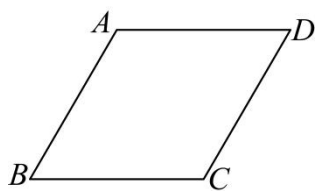
$$\therefore -1 \text{ 距 } 1 \text{ 有 } 2 \text{ 个单位长度, } \sqrt{2} \text{ 距 } 1 \text{ 有 } (\sqrt{2} - 1) \text{ 个单位长度, } 2 \text{ 距 } 1 \text{ 有 } 1 \text{ 个单位长度, } \sqrt{2} - 1 < 1 < 2,$$

$$\therefore y_2 < y_3 < y_1,$$

故答案为: $y_2 < y_3 < y_1$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的图象和性质, 掌握二次函数图象和性质是解题的关键.

18. 在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 将菱形 $ABCD$ 绕点 B 旋转, 得到菱形 $A'BC'D'$, 其中点 D' 落在 BA 的延长线上, 那么 $\triangle C'D'D$ 的面积是_____



【答案】 $27 - 9\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质，旋转的性质，含 30° 度角的直角三角形的性质，勾股定理等等，连接 AC 交 BD 于 O ，设 $C'D'$ ， AD 交于 F ，由菱形的性质可得 $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC \perp BD$ ， $BD = 2OB$ ，则可得到 $OA = \frac{1}{2}AB = 3$ ， $OB = 3\sqrt{3}$ ， $BD = 2OB = 6\sqrt{3}$ ；由旋转的性质可得 $BC' = BC = 6$ ， $\angle A'BC' = \angle ABC = 60^\circ$ ，则可证明 B 、 C' 、 D 三点共线，得到 $DC' = BD - BC' = 6\sqrt{3} - 6$ ；证明 $\angle C'FD = 90^\circ$ ，得到 $C'F = \frac{1}{2}C'D = 3\sqrt{3} - 3$ ，则 $DF = \sqrt{C'D^2 - C'F^2} = 9 - 3\sqrt{3}$ ，据此根据三角形面积计算公式求解即可。

【详解】 解：如图所示，连接 AC 交 BD 于 O ，设 $C'D'$ ， AD 交于 F ，

$\because$ 在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ, \quad AC \perp BD, \quad BD = 2OB,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 2OB = 6\sqrt{3};$$

由旋转的性质可得 $BC' = BC = 6$ ， $\angle A'BC' = \angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle A'BA = \angle ABC' = 30^\circ,$$

$\therefore B$ 、 C' 、 D 三点共线，

$$\therefore DC' = BD - BC' = 6\sqrt{3} - 6;$$

$$\therefore AB = AD, \quad BC' = D'C',$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 30^\circ, \quad \angle C'BD' = \angle C'D'B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle D'C'D = \angle C'BD' + \angle C'D'B = 60^\circ,$$

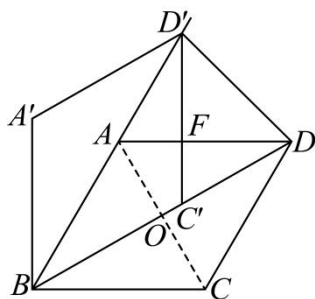
$$\therefore \angle C'FD = 90^\circ,$$

$$\therefore C'F = \frac{1}{2}C'D = 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore DF = \sqrt{C'D^2 - C'F^2} = 9 - 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle C'D'D} = \frac{1}{2}C'D' \cdot DF = \frac{1}{2} \times 6 \times (9 - 3\sqrt{3}) = 27 - 9\sqrt{3},$$

故答案为： $27 - 9\sqrt{3}$.



三、简答题（本大题共 4 题，19、20 题每题 5 分，21、22 每题 6 分，满分 22 分）

19. 解方程： $3 - \sqrt{2x - 3} = x$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先移项，两边平方，然后整理求得 x 的值，最后进行检验即可.

【详解】 解： 原方程化为： $3 - x = \sqrt{2x - 3}$

两边平方，得 $(3 - x)^2 = 2x - 3$,

整理，得 $x^2 - 8x + 12 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = 6$,

经检验： $x_1 = 2$ 是原方程的根， $x_2 = 6$ 是原方程的增根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 2$.

【点睛】 本题主要考查解一元二次方程，二次根式的性质，解此题的关键在于熟练掌握其知识点.

20. 解方程： $\frac{1}{x-2} + \frac{4}{4-x^2} = 1$.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 题目主要考查解分式方程及一元二次方程，熟练掌握求解方法是解题关键.

先将分式方程去分母化为整式方程，然后求解检验即可.

【详解】 解： $\frac{1}{x-2} + \frac{4}{4-x^2} = 1$ 即 $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} = 1$,

去分母得： $x + 2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$,

整理得： $x^2 - x - 2 = 0$,

解得： $x = 2$ 或 $x = -1$,

检验：当 $x=2$ 时， $x-2=0$ ，不是分式方程的解，

当 $x=-1$ 时， $(x+2)(x-2) \neq 0$ ，是分式方程的解，

$\therefore x=-1$ 。

21. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9(1) \\ x - y = 6(2) \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】先降次转化成两个一次方程组，解方程组即可求解。

【详解】解：
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9(1) \\ x - y = 6(2) \end{cases},$$

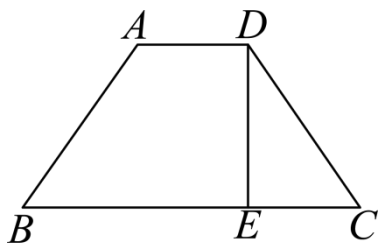
由方程①可得 $x+2y = -3$ 或 $x+2y = 3$ ，

则方程组可变为
$$\begin{cases} x+2y = -3 \\ x-y = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y = 3 \\ x-y = 6 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查的是高次方程，关键是通过分解，把高次方程降次，得到二元一次方程组，用到的知识点是因式分解、加减法。

22. 已知：在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $DE \perp BC$ ，垂足为 E ， $BE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ 。求证： $AB = CD$ 。



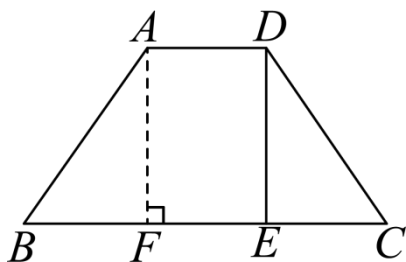
【答案】见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，证明 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ 是解题的关键。

过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，四边形 $ADEF$ 是平行四边形，可得 $AD = EF$ ，再由 $BE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ，可得 $BF = CE$ ，可证明 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ ，即可求证。

【详解】证明：如图，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，



$\because DE \perp BC, AD \parallel BC,$

$\therefore DE = AF, DE \parallel AF, \angle AFB = \angle DEC = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形,

$\therefore AD = EF,$

$\because BE = \frac{1}{2}(AD + BC),$

$\therefore 2BE = AD + BE + CE,$ 即 $BE = AD + CE,$

$\therefore BF + EF = AD + CE,$

$\therefore BF = CE,$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE,$

$\therefore AB = CD.$

四、解答题（本大题共 3 题，23、24 题每题 8 分，25 题 10 分，满分 26 分）

23. 上海市为了增强居民的节水意识，避免水资源的浪费，全面实施居民“阶梯水价”。当累计水量达到年度阶梯水量分档基数临界点后，即开始实施阶梯价格计价，分档水量和价格见下表。

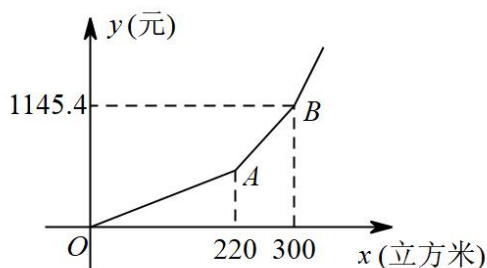
分档	户年用水量 (立方米)	自来水价格 (元/立方米)	污水处理费 (元/立方米)
第一阶梯	0-220 (含 220)	1.92	1.70
第二阶梯	220-300 (含 300)	3.30	1.70
第三阶梯	300 以上	4.30	1.70
注：1. 应缴纳水费 = 自来水费总额 + 污水处理费总额 2. 应缴纳污水处理费总额 = 用水量 $\times$ 污水处理费 $\times 0.9$			

仔细阅读上述材料，请解答下面的问题，并把答案写在答题纸上：

(1) 小静家 2019 年上半年共计用水量 100 立方米，应缴纳水费_____元；

(2) 小静家全年缴纳的水费共计 1000.5 元, 那么 2019 年全年用水量为_____立方米;

(3) 如图所示是上海市“阶梯水价” y 与用水量 x 的函数关系, 那么第二阶梯 (线段 AB) 的函数解析式为_____, 定义域_____.



【答案】 (1) 345; (2) 270; (3) $y = 4.83x - 303.6$, $220 < x \leq 300$.

【解析】

【分析】 (1) 用水量 100 立方米处于第一阶梯, 直接利用应缴纳水费 = 自来水费总额 + 污水处理费总额计算即可;

(2) 先判断出用水量处于第几阶梯, 然后设 2019 年全年用水量为 x 立方米, 列出方程求解即可;

(3) 先求出用水量 220 立方米时的水费, 然后利用待定系数法求解析式即可, 定义域根据图象直接可得.

【详解】 (1) $1.92 \times 100 + 1.7 \times 100 \times 0.9 = 345$ (元)

$\therefore$ 用水量 100 立方米应缴纳水费 345 元;

(2) 当用水量为 220 立方米时, 应缴水费为 $1.92 \times 220 + 1.7 \times 220 \times 0.9 = 759$ (元)

当用水量为 300 立方米时, 应缴水费为 $1.92 \times 220 + 3.3 \times 80 + 1.7 \times 300 \times 0.9 = 1145.4$ (元)

$\therefore$ 全年缴纳的水费共计 1000.5 元, 说明用水量处于第二阶梯,

设 2019 年全年用水量为 x 立方米, 根据题意得

$$1.92 \times 220 + 3.3(x - 220) + 1.7 \times 300 \times 0.9 = 1000.5$$

解得 $x = 270$

$\therefore$ 2019 年全年用水量为 270 立方米;

(3) 由 (2) 可知, 当 $x = 220$ 时, $y = 759$,

设线段 AB 的解析式为 $y = kx + b$

将 $A(220, 759)$, $B(300, 1145.4)$ 代入解析式中得

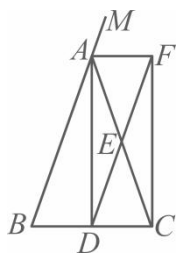
$$\begin{cases} 220k + b = 759 \\ 300k + b = 1145.4 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = 4.83 \\ b = -303.6 \end{cases}$$

∴ 线段 AB 的解析式为 $y = 4.83x - 303.6$,

定义域为 $220 < x \leq 300$.

【点睛】 本题主要考查一元一次方程的应用及一次函数的应用，掌握待定系数法并能够理解题意是解题的关键.

24. 已知：如图， $\triangle ABC$ 中， M 是 BA 延长线上一点， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AC 的中点，过点 A 作 $AF \parallel BC$ ，与 DE 的延长线相交于点 F .



(1) 求证：四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

(2) 如果 AF 平分 $\angle MAC$ ，求证：四边形 $ADCF$ 是矩形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AC 的中点得到 DE 是中位线，故 $DE \parallel AB$ ，即可证明四边形 $ABDF$ 是平行四边形；

(2) 先证明四边形 $ADCF$ 是平行四边形，根据 AF 平分 $\angle MAC$ 得到 $\angle MAF = \angle CAF$ ，证明 $AB = AC$ ，即可证明 $AD \perp BC$ ，故 $\angle ADC = 90^\circ$ ，故四边形 $ADCF$ 是矩形.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 中位线，

$\therefore DE \parallel AB$ ，

$\because AF \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形，

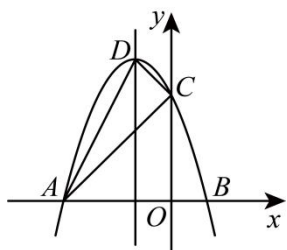
$\therefore AF = BD$.

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BD = CD$,
 $\therefore AF = CD$,
 $\because AF \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是矩平行四边形.
 $\because AF$ 平分 $\angle MAC$,
 $\therefore \angle MAF = \angle CAF$.
 $\because AF \parallel BC$,
 $\therefore \angle MAF = \angle B$, $\angle CAF = \angle ACB$,
 $\therefore \angle B = \angle ACB$,
 $\therefore AD \perp BC$,
 $\therefore \angle ADC = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是矩形.

【点睛】 本题主要考查平行四边形的判定和性质，矩形的判定以及角平分线的定义，熟练掌握平行四边形的判定和性质是解题的关键.

25. 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(1, 0)$ ，与 y 轴相交于点 $C(0, 3)$.



- (1) 求抛物线的解析式和顶点 D 的坐标;
- (2) $\triangle ADC$ 的面积;
- (3) 点 Q 在抛物线上，且 $\triangle ADQ$ 是以 AD 为底的等腰三角形，求 Q 点的坐标.

【答案】 (1) $y = -x^2 - 2x + 3$; $D(-1, 4)$;

(2) 3

(3) $\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{4}, \frac{11-\sqrt{41}}{8}\right)$ 或 $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{4}, \frac{11+\sqrt{41}}{8}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数与几何综合，涉及到了二次函数的图象性质，割补法求三角形面积，等腰三角形的判定等知识点，熟悉掌握各知识点是解题的关键.

(1) 把 $B(1,0)$ ， $C(0,3)$ 代入 $y = ax^2 - 2x + c$ 运算求解即可；

(2) 利用割补法运算求解即可；

(3) 根据等腰三角形的性质推出 $QD^2 = QA^2$ ，列方程运算求解即可.

【小问 1 详解】

解： 把 $B(1,0)$ ， $C(0,3)$ 代入 $y = ax^2 - 2x + c$ 可得：

$$\begin{cases} a - 2 + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} a = -1 \\ c = 3 \end{cases},$

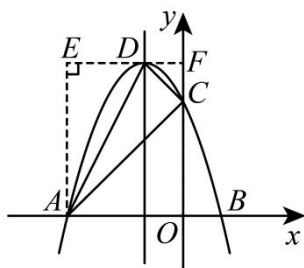
$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3,$$

$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4,$$

$$\therefore \text{顶点坐标 } D(-1,4);$$

【小问 2 详解】

解： 过点 D 作 $EF \parallel AO$ ，交 y 轴于点 F ， $AE \perp EF$ ，垂足为 E 如图所示：



$$\therefore D(-1,4),$$

$$\therefore F(0,4),$$

把 $y = 0$ 代入 $y = -x^2 - 2x + 3$ 可得： $0 = -x^2 - 2x + 3$ ，

解得： $x_1 = -3$ 或 $x_2 = 1$ ，

$$\therefore A(-3,0),$$

$$\therefore E(-3,4),$$

$$\therefore EA = 4 - 0 = 4, \quad ED = -1 - (-3) = 2, \quad DF = 0 - (-1) = 1, \quad CF = 4 - 3 = 1, \quad CO = 3 - 0 = 3, \\ AO = 0 - (-3) = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\text{长方形}AOF E} - S_{\triangle DEA} - S_{\triangle AOC} - S_{\triangle CFD} = 3 \times 4 - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} - 3 \times 3 \times \frac{1}{2} - 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 12 - 4 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 3;$$

【小问3详解】

解：令 $Q(x, y)$ 且满足 $y = -x^2 - 2x + 3$, $A(-3, 0)$, $D(-1, 4)$,

$\therefore \triangle ADQ$ 是以 AD 底的等腰三角形,

$$\therefore QD^2 = QA^2, \text{ 即 } (x+3)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2,$$

化简得: $x - 2 + 2y = 0$,

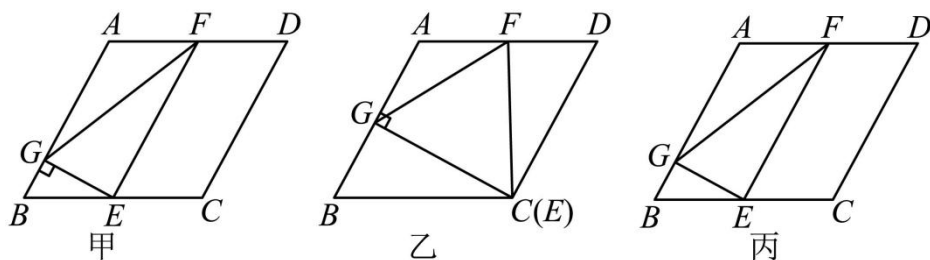
$$\text{由 } \begin{cases} x - 2 + 2y = 0 \\ y = -x^2 - 2x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \\ y_1 = \frac{11 - \sqrt{41}}{8} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4} \\ y_2 = \frac{11 + \sqrt{41}}{8} \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}, \frac{11 - \sqrt{41}}{8} \right) \text{ 或 } \left(\frac{-3 - \sqrt{41}}{4}, \frac{11 + \sqrt{41}}{8} \right).$$

五、(本大题满分10分. 第1、3小题各3分, 第2小题4分)

26. 平行四边形 $ABCD$ 中, E 是边 BC 上的动点, 过点 E 作 $EG \perp AB$, 垂足为点 G , F 是边 AD 的中点, 连接 EF 、 FG .



(1) 如图甲, 当 E 是边 BC 的中点时, 如果四边形 $ABCD$ 的面积为 10, 求 $\triangle EFG$ 的面积;

(2) 如图乙, 点 E 移动至点 C 处, 试判断 $\triangle EFG$ 形状, 并说明理由;

(3) 如图丙, 如果 $AB = AD = 2$, $\angle B = 60^\circ$, 设 $BE = x$, $S_{\triangle EFG} = y$, 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出定义域.

【答案】(1) $\frac{5}{2}$

(2) $\triangle EFG$ 是等腰三角形, 理由见解析

$$(3) y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{8}x (0 < x \leq 2)$$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质和判定定理得出四边形 $ABEF$ 是平行四边形, 设平行四边形 $ABEF$ 边 EF 上的高为 h , 根据面积之间的关系求解即可;

(2) 取 BC 中点 H , 连接 FH 与 CG 交于点 P , 根据平行线的性质及垂直平分线的判定和性质得出 $FG = FC$, 即可得出结果;

(3) 过点 G 作 $GN \perp BC$ 于 N , 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于 M , 根据含 30° 度角的直角三角形的性质及勾股定理得出 $BG = \frac{1}{2}x$, $BN = \frac{1}{4}x$, $NG = \frac{\sqrt{3}}{4}x$, $AM = \sqrt{3}$, 结合图形得出 $S_{\triangle EFG} = S_{\text{梯形}ABEF} - S_{\triangle AFG} - S_{\triangle BGE}$ 代入求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AB \parallel CD, AF \parallel BE,$$

$\because E$ 是边 BC 的中点时, F 是边 AD 的中点,

$$\therefore EF \parallel AB,$$

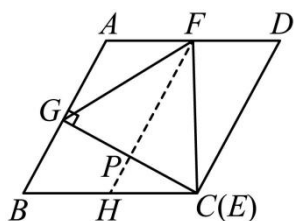
$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,

设平行四边形 $ABEF$ 边 EF 上的高为 h ,

$$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}EF \cdot h = \frac{1}{2}S_{\text{平行四边形}ABEF} = \frac{1}{4}S_{\text{平行四边形}ABCD} = \frac{5}{2};$$

【小问 2 详解】

取 BC 中点 H , 连接 FH 与 CG 交于点 P ,



由 (1) 可知 $EF \parallel AB$,

$$\therefore EG \perp AB,$$

$\therefore P$ 是 CG 中点, $\angle FPG = \angle BGC = 90^\circ$,

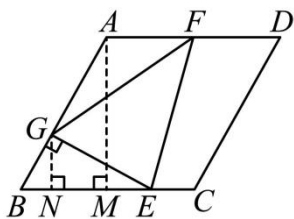
$\therefore FH$ 垂直平分 CG ,

$\therefore FG = FC$,

$\therefore \triangle EFG$ 是等腰三角形;

【小问 3 详解】

过点 G 作 $GN \perp BC$ 于 N , 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ,



在 $Rt\triangle BGE$ 中, $\angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle BEG = 30^\circ$,

$$\therefore BG = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x,$$

在 $Rt\triangle BNG$ 中, $\angle BGN = 30^\circ$,

$$\therefore BN = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{4}x,$$

$$\therefore NG = \sqrt{BG^2 - BN^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x,$$

在 $Rt\triangle ABM$ 中,

$\angle BAM = 30^\circ$,

$$\therefore BM = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 到 } AD \text{ 的距离为 } AM - NG = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}x,$$

$$\therefore y = S_{\text{梯形}ABEF} - S_{\triangle AFG} - S_{\triangle BGE}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1) \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}x \right) \times 1 - \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}x$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{8}x (0 < x \leq 2).$$

【点睛】题目主要考查平行四边形的判定和性质, 勾股定理解三角形及含 30° 度角的直角三角形的性质, 线

段垂直平分线的判定和性质及确定函数解析式等，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.