

八年级下数学测验 1

班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、单选题

1. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{5x^2+4x+3}{2}=1$ 是分式方程

B. $\frac{\sqrt{2}}{x}+\sqrt{3}=2$ 是无理方程

C. $\begin{cases} x^2-x=5 \\ 3y=12 \end{cases}$ 是二元二次方程组

D. $x^6+3x^2 \leq 0$ 是二项方程

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程、无理方程、二元二次方程组、二项方程的定义，根据相关定义逐项判定即可.

【详解】 解： A. $\frac{5x^2+4x+3}{2}=1$ 是整式方程，原说法不正确；

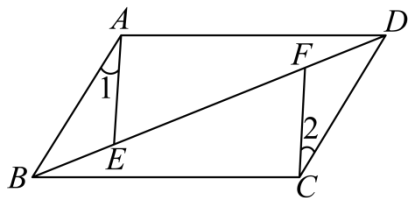
B. $\frac{\sqrt{2}}{x}+\sqrt{3}=2$ 是分式方程，原说法不正确；

C. $\begin{cases} x^2-x=5 \\ 3y=12 \end{cases}$ 是二元二次方程组，说法正确；

D. $x^6+3x^2 \leq 0$ 是不等式，不是二项方程；

故选： C.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ， E 、 F 是对角线 BD 上的两点，如果再添加一个条件，使 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，则添加的条件不能是 ()



A. $AB = CF$

B. $BE = FD$

C. $BF = DE$

D. $\angle 1 = \angle 2$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定，熟练掌握判定定理是解题的关键.

根据所给条件，结合平行四边形的各种判定方法逐一判断即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, \angle ABD = \angle CDB ;$$

$$\text{又} \because BE = DF ,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (\text{SAS}),$$

$$\therefore AE = CF, \angle AEB = \angle CFD ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CFE ;$$

$$\therefore AE // CF ;$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，故 B 正确；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, \angle ABD = \angle CDB ;$$

$$\text{又} \because BF = DE ,$$

$$\therefore BF - EF = DE - EF ,$$

$$\therefore BE = DF ,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (\text{SAS}),$$

$$\therefore AE = CF, \angle AEB = \angle CFD ;$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CFE ;$$

$$\therefore AE // CF ;$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，故 C 正确；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, \angle ABD = \angle CDB ;$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2 ,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = CF, \angle AEB = \angle CFD ;$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CFE ;$$

$$\therefore AE // CF ;$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，故 D 正确；

添加 $AB = CF$ 后，不能得出 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，进而得不出四边形 $AECF$ 平行四边形，

故选：A.

3. 用换元法解方程 $\frac{x^2-1}{x} + \frac{x}{x^2-1} = 3$ 时, 如果设 $\frac{x^2-1}{x} = y$, 那么可以得到一个关于 y 的整式方程, 该方程是 ()

A. $y^2 - 3y - 1 = 0$

B. $y^2 + 3y - 1 = 0$

C. $y^2 - 3y + 1 = 0$

D. $y^2 + 3y + 1 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查解分式方程, 根据题设, 原方程化为 $y + \frac{1}{y} = 3$, 去分母化为整式方程, 整理方程即可解答.

【详解】解: 设 $\frac{x^2-1}{x} = y$, 则原方程化为 $y + \frac{1}{y} = 3$,

方程两边同乘以 y , 得 $y^2 + 1 = 3y$,

即 $y^2 - 3y + 1 = 0$,

故选: C.

4. 下列方程中, 没有实数根的方程是 ()

A. $\frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4}$

B. $x^2 + x - 1 = 0$

C. $\sqrt{x^2+1} = 0$

D. $\sqrt{x} = -x$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解无理方程, 解分式方程和根的判别式等知识点, 先把分式方程转化成整式方程, 求出方程的解, 再进行检验即可判断选项 A; 根据根的判别式即可判断选项 B; 根据 $x^2 + 1 \geq 1$ 和算术平方根即可判断选项 C; 根据二次根式的性质进行判断选项 D.

【详解】解: A、 $\frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4}$,

$$\frac{1}{x+2} = \frac{3}{(x+2)(x-2)},$$

去分母得: $x-2=3$,

解得: $x=5$,

经检验, $x=5$ 是分式方程的解, 即方程有实数根, 不符合题意;

B、 $x^2 + x - 1 = 0$,

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$, 方程有实数根, 不符合题意;

C、 $\sqrt{x^2 + 1} = 0$, 不论 x 为何值, $x^2 + 1 \geq 1$,

即 $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$, 方程无实数根, 符合题意;

D、当 $x=0$ 时, $\sqrt{x} = -x$, 即方程有实数根, 不符合题意,

故选: C.

5. 甲、乙两组同学在植树活动中均植树 120 棵, 已知甲组每小时比乙组多种植 10 棵, 且甲组比乙组提前 2 小时完成. 设乙组每小时植树 x 棵, 可列出方程为 ()

A. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+10} + 2$

B. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+10} - 2$

C. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x-10} + 2$

D. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x-10} - 2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了从实际问题中抽象出分式方程, 设乙组每小时植树 x 棵, 则甲组每小时植树 $(x+10)$ 棵, 根据甲组比乙组提前 2 小时完成列出方程即可.

【详解】解: 设乙组每小时植树 x 棵,

由题意得, $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+10} + 2$,

故选: A.

6. 下列命题中正确的命题的个数是 ()

①夹在两条平行线之间的平行线段相等;

②多边形的内角中至多有 3 个锐角;

③一组对角相等, 一组对边平行的四边形是平行四边形;

④平行四边形的两条对角线将其分成四个等积的小三角形;

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质和判定、多边形的内角, 根据平行四边形的性质和判定、多边形的内

角逐一判断解题.

【详解】解：①夹在两条平行线之间的平行线段相等，故此命题是真命题；

②多边形的内角中至多有 3 个锐角，故此命题是真命题；

③一组对角相等，一组对边平行的四边形是平行四边形，故此命题是真命题；

④平行四边形的两条对角线把平行四边形分成的四个小三角形的面积相等，故此命题是真命题.

由此可得：真命题有 4 个.

故选：D.

二、填空题

7. 下列方程中： a 、 $x^4 + 2x = 1$ ； b 、 $x + x^{-3} = 2$ ； c 、 $x^3 + \sqrt{x} = 1$ ； d 、 $x^2 = \frac{1}{2}$ ，属于高次方程的是_____.

【答案】 a

【解析】

【分析】本题考查高次方程的定义，高次方程是指次数大于 2 次的方程，根据定义即可判断.

【详解】解： a 、 $x^4 + 2x = 1$ 是四次方程；

b 、 $x + x^{-3} = 2$ 不是高次方程；

c 、 $x^3 + \sqrt{x} = 1$ 不是高次方程；

d 、 $x^2 = \frac{1}{2}$ 是二次方程，不是高次方程.

故答案为： a .

8. 已知关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 8$ 是二项方程，那么 $m =$ _____.

【答案】0

【解析】

【分析】本题考查高次方程，利用方程的项数得出方程不含一次项是解题的关键.

根据二项方程可得不含 mx 这一项解题即可.

【详解】解： $\because$ 方程 $2x^2 + mx + 3 = 8$ 是二项方程，

$\therefore mx = 0$ ，即 $m = 0$ ，

故答案为：0.

9. 二元二次方程 $x^2 - 5xy - 6y^2 = 0$ 可以化为两个一次方程，它们是_____.

【答案】 $x - 6y = 0$ ， $x + y = 0$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解法，把 y 看成常量，把 y 看成常量，方程就是关于 x 的一元二次方程，利用因式分解法化为两个一次方程即可，方程看成关于 x 的一元二次方程是解决本题的关键.

【详解】解： $x^2 - 5xy - 6y^2 = 0$,

$$(x - 6y)(x + y) = 0,$$

$$\therefore x - 6y = 0, \quad x + y = 0.$$

故答案为： $x - 6y = 0, \quad x + y = 0$.

10. 一元二次方程 $x^2 - 81 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 9, \quad x_2 = -9$

【解析】

【分析】用直接开方法解方程即可.

【详解】 $\because x^2 - 81 = 0$,

$$\therefore x^2 = 81,$$

$$\therefore x = \pm 9,$$

$$\therefore x_1 = 9, \quad x_2 = -9,$$

故答案为： $x_1 = 9, \quad x_2 = -9$

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法—直接开方法，熟练掌握直接开方法解一元二次方程是解本题的关键.

11. 已知 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} x + y = m \\ x \cdot y = n \end{cases}$ 的一个解，那么这个方程组的另一个解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$.

【解析】

【分析】将 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ 代入原方程组求得 $\begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases}$ ，所以原方程组是 $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$ ，再解此方程组即可.

【详解】解：将 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ 代入原方程组求得 $\begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases}$,

$$\therefore \text{原方程组是} \begin{cases} x+y=-1 \text{①} \\ xy=-2 \text{②} \end{cases},$$

由①, 得 $x=-y-1$ ③,

把③代入②式, 化简得 $y^2+y-2=0$,

解之, 得 $y_1=-2$, $y_2=1$.

把 $y_1=-2$ 代入 $x=-y-1$, 得 $x_1=1$,

把 $y_2=1$ 代入 $x=-y-1$, 得 $x_2=-2$.

$$\therefore \text{原方程组的解为: } \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=1 \end{cases} \text{. 故答案为 } \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了解二元二次方程组, 熟练掌握运算是解题的关键.

12. 如果方程 $\sqrt{x}-k=2$ 无实数解, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -2$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程和解一元一次不等式, 能根据算术平方根的非负性得出 $1+k < 0$ 是解此题的关键. 移项后得出 $\sqrt{x}=2+k$, 根据算术平方根的非负性得出 $\sqrt{x} \geq 0$, 求出此时 $2+k < 0$, 再求出 k 的取值范围即可.

【详解】 解: $\sqrt{x}-k=2$,

$$\sqrt{x}=2+k,$$

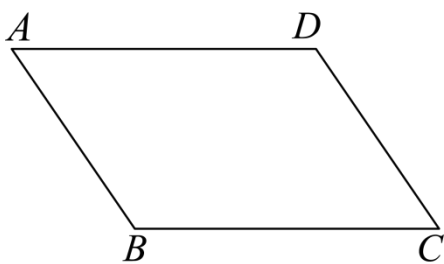
$$\because \sqrt{x} \geq 0,$$

$\therefore$ 若方程 $\sqrt{x}-k=2$ 无实数解, 必须 $2+k < 0$,

$$\therefore k < -2,$$

故答案为: $k < -2$.

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=10$, $BC=15$, 面积为 120, 点 P 是边 AD 上一点, 连接 PB , 将线段 PB 绕着点 P 旋转 90° 得到线段 PQ , 如果点 Q 恰好落在直线 AD 上, 那么线段 AQ 的长为_____



【答案】 2 或 14

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，旋转的性质，勾股定理，注意分类讨论；由题意得 $BP \perp AD$ ；分顺时针旋转与逆时针旋转两种情况，利用旋转性质及勾股定理即可求解．根据题意确定 $BP \perp AD$ 是解题的关键．

【详解】 解： $\because$ 线段 PB 绕着点 P 旋转 90° 得到线段 PQ ，点 Q 恰好落在直线 AD 上，

$$\therefore BP \perp AD,$$

$$\because BC \cdot BP = 120,$$

$$\therefore BP = 120 \div BC = 8,$$

$$\text{由勾股定理得: } AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 6;$$

当线段 PB 绕着点 P 顺时针旋转 90° 时，如图，

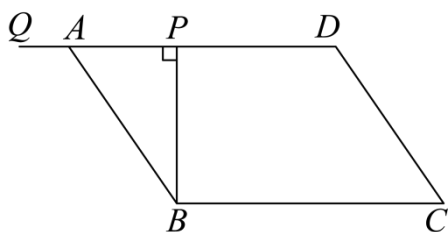
$$\therefore PQ = BP = 8,$$

$$\therefore AQ = PQ - AP = 2;$$

当线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90° 时，

则 PQ 在点 P 的右侧，

$$\therefore AQ = AP + PQ = 6 + 8 = 14;$$



综上， AQ 的长为 2 或 14；

故答案为：2 或 14．

14. 当 $m =$ _____ 时，解关于 x 的方程 $x + \frac{x}{x-2} = \frac{m}{2-x}$ 会产生增根．

【答案】 -2

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，由分式方程有增根求出 x 的值，代入整式方程计算即可求出 m 的值.

【详解】解：解：去分母得： $x(x-2)+x=-m$,

由分式方程有增根，得到 $x-2=0$ ，即 $x=2$ ，

把 $x=2$ 代入整式方程得： $m=-2$ ，

故答案为： -2.

【点睛】此题考查了分式方程的增根，增根确定后可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

15. 若凸 n 边形的内角和为 1260° ，则从一个顶点出发引的对角线条数是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】根据凸 n 边形的内角和公式 $180^\circ \times (n-2)$ ，列出方程再求解即可

【详解】解：由题意得 $180^\circ \times (n-2) = 1260^\circ$

解得 $n=9$,

从一个顶点出发引的对角线条数是 $n-3=6$

故答案为： 6.

【点睛】本题考查凸 n 边形的内角和以及对角线的条数等知识，熟练掌握凸 n 边形的内角和公式是解决本题的关键

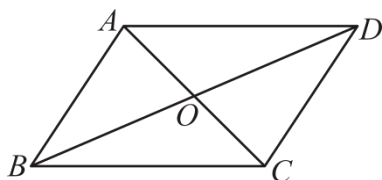
16. 若平行四边形的一条边长是 10，一条对角线长为 8，则它的另一条对角线长 x 的取值范围是__.

【答案】 $12 < x < 28$ ## $28 > x > 12$

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质以及三角形三边关系，解题的关键是把平行四边形的问题转化为三角形的问题. 根据平行四边形的性质可知由对角线和边组成的三角形的三边是 10 和 4、 $\frac{1}{2}x$ ，利用三角形三边关系可求 x 的取值范围.

【详解】解：如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $BD = x$,

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 4, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}x,$$

在 $\triangle BOC$ 中, $BC = 10, OC = 4$,

$\therefore OB$ 的取值范围是 $BC - OC < OB < BC + OC$, 即 $6 < OB < 14$,

$\therefore BD$ 的取值范围是 $12 < BD < 28$.

故答案为: $12 < x < 28$.

17. 如果实数 x 满足 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$, 那么 $x + \frac{1}{x}$ 的值是_____.

【答案】3

【解析】

【分析】 本题主要考查了用换元法解一元二次方程、解分式方程, 利用完全平方公式把方程变形是解题的关键.

利用完全平方公式把方程变形为 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$, 利用换元法, 设 $x + \frac{1}{x} = m$, 则

$m^2 - 2m - 3 = 0$, 转化为解一元二次方程, 求出 $x + \frac{1}{x}$ 可能的值, 分别得出分式方程, 计算检验是否有解, 即可得出答案.

【详解】 解: $\because x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$,

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0,$$

设 $x + \frac{1}{x} = m$, 则 $m^2 - 2m - 3 = 0$,

因式分解得: $(m - 3)(m + 1) = 0$,

$$\therefore m-3=0 \text{ 或 } m+1=0,$$

$$\text{解得: } m=3 \text{ 或 } m=-1,$$

$$\text{当 } m=3 \text{ 时, 则 } x+\frac{1}{x}=3,$$

$$\text{整理得: } x^2-3x+1=0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{经检验, } x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ 都是方程 } x+\frac{1}{x}=3 \text{ 的解,}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x} \text{ 的值为 } 3;$$

$$\text{当 } m=-1 \text{ 时, 则 } x+\frac{1}{x}=-1,$$

$$\text{整理得: } x^2+x+1=0,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0,$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=-1 \text{ 时, 方程无解.}$$

$$\text{综上所述, } x+\frac{1}{x} \text{ 的值为 } 3,$$

故答案为: 3.

18. 小明在解方程 $\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$ 时采用了下面的方法: 由

$$(\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x})(\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}) = (\sqrt{24-x})^2 - (\sqrt{8-x})^2 = (24-x) - (8-x) = 16,$$

$$\text{又有 } \sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2, \text{ 可得 } \sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}=8, \text{ 将这两式相加可得 } \begin{cases} \sqrt{24-x}=5 \\ \sqrt{8-x}=3 \end{cases},$$

将 $\sqrt{24-x}=5$ 两边平方可解得 $x=-1$, 经检验 $x=-1$ 是原方程的解.

请你学习小明的方法, 解决下列问题:

(1) 已知 $\sqrt{22-a^2}-\sqrt{10-a^2}=3\sqrt{2}$, 则 $\sqrt{22-a^2}+\sqrt{10-a^2}$ 的值为_____.

(2) 解方程 $\sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5}=4x$, 得方程的解为_____.

【答案】 ①. $2\sqrt{2}$ ②. $x=3$

【解析】

【分析】(1) 根据题目所给方法, 可求 $\left(\sqrt{22-a^2}-\sqrt{10-a^2}\right)\left(\sqrt{22-a^2}+\sqrt{10-a^2}\right)$ 的值, 然后结合 $\sqrt{22-a^2}-\sqrt{10-a^2}=3\sqrt{2}$, 即可求出 $\sqrt{22-a^2}+\sqrt{10-a^2}$ 的值;

(2) 根据题目所给方法, 可求 $\sqrt{4x^2+6x-5}=2x+1$, 再解方程即可.

【详解】解: (1)

$$\left(\sqrt{22-a^2}-\sqrt{10-a^2}\right)\left(\sqrt{22-a^2}+\sqrt{10-a^2}\right)=\left(\sqrt{22-a^2}\right)^2-\left(\sqrt{10-a^2}\right)^2=(22-a^2)-(10-a^2)=12,$$

$$\text{又 } \sqrt{22-a^2}-\sqrt{10-a^2}=3\sqrt{2},$$

$$\therefore 3\sqrt{2}\left(\sqrt{22-a^2}+\sqrt{10-a^2}\right)=12$$

$$\therefore \sqrt{22-a^2}+\sqrt{10-a^2}=2\sqrt{2};$$

$$(2) \left(\sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5}\right)\left(\sqrt{4x^2+6x-5}-\sqrt{4x^2-2x-5}\right)$$

$$=\left(\sqrt{4x^2+6x-5}\right)^2-\left(\sqrt{4x^2-2x-5}\right)^2$$

$$=(4x^2+6x-5)-(4x^2-2x-5)$$

$$=8x,$$

$$\text{又 } \sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5}=4x,$$

$$\therefore \sqrt{4x^2+6x-5}-\sqrt{4x^2-2x-5}=2,$$

$$\text{两式相加, 得 } \sqrt{4x^2+6x-5}=2x+1,$$

$$\text{两边同时平方, 得 } 4x^2+6x-5=(2x+1)^2,$$

$$\text{解得 } x=3,$$

经检验, $x=3$ 是原方程的解.

故答案为: $2\sqrt{2}$; $x=3$.

【点睛】本题考查了解无理方程, 熟练掌握无理方程的解法, 准确计算是解题的关键.

三、解答题

19. 解关于 x 的方程: $ax-a^2=2x-4$.

【答案】 $a=2$ 时, 方程有无数解; $a \neq 2$ 时, $x=a+2$

【解析】

【分析】 本题考查了含参数的方程的求解，先将原方程化简，然后讨论 $a-2$ 是否为 0，若 $a-2=0$ ，则方程有无数解，若 $a-2 \neq 0$ ，则方程有唯一解。

【详解】 解： $ax - a^2 = 2x - 4$

$$(a-2)x = a^2 - 4,$$

当 $a-2=0$ ，即 $a=2$ 时，方程有无数解；

当 $a-2 \neq 0$ ，即 $a \neq 2$ 时， $x = \frac{a^2 - 4}{a - 2}$ ，解得 $x = a + 2$ 。

20. 解方程： $\sqrt{1-3x} - 1 = x$ 。

【答案】 $x = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了无理方程，解题关键是把无理方程转化成有理方程，并注意根的检验。先移项，再把两边平方，把无理方程转化成有理方程，解一元二次方程，再把根代入原方程检验即可。

【详解】 解： $\sqrt{1-3x} - 1 = x$ ，

移项，得 $\sqrt{1-3x} = x + 1$ ，

两边平方，得 $1-3x = x^2 + 2x + 1$ ，

整理，得 $x^2 + 5x = 0$ ，

解得 $x_1 = 0$ ， $x_2 = -5$ ，

检验：把 $x = 0$ 代入原方程，左边=右边，故 $x = 0$ 是原方程的根，

把 $x = -5$ 代入原方程，左边 $\neq$ 右边，故 $x = -5$ 是原方程的增根，舍去，

故原方程的解为 $x = 0$ 。

21. 解方程组：
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{4}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 设 $\frac{1}{x+y} = m$, $\frac{1}{x-y} = n$, 可解得 $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$, 即得 $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}$, 可解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$, 再检验, 即可得

答案.

【详解】 解: 设 $\frac{1}{x+y} = m$, $\frac{1}{x-y} = n$, 则原方程组变形为:

$$\begin{cases} m+n=3 \\ 4m-n=2 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\frac{1}{2} \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$,

经检验, $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ 是原方程组的解,

$$\therefore \text{原方程组的解为: } \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查解分式方程, 解题的关键是用换元法把方程组变形.

22. 解方程组: $\begin{cases} x+2y=12 \text{ ①} \\ 9x^2-12xy+4y^2=16 \text{ ②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=5 \end{cases}$

【解析】

【分析】把方程②化为 $3x-2y=4$ 或 $3x-2y=-4$ ，再转化为两个二元一次方程组，再解方程组即可.

【详解】解：由②得 $(3x-2y)^2=16$.

$\therefore 3x-2y=4$ 或 $3x-2y=-4$.

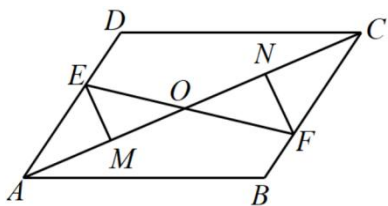
则原方程组可化为 $\begin{cases} x+2y=12 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y=12 \\ 3x-2y=-4 \end{cases}$,

解这两个方程组，得 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=5 \end{cases}$,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=5 \end{cases}$;

【点睛】本题考查的是二元二次方程组的解法，熟练的把二元二次方程组化为二元一次方程组的方法是解本题的关键.

23. 如图，已知 E 、 F 分别为 $\square ABCD$ 的对边 AD 、 BC 上的点，且 $DE=BF$ ， $EM \perp AC$ 于 M ， $FN \perp AC$ 于 N ， EF 交 AC 于点 O ，求证： EF 与 MN 互相平分.

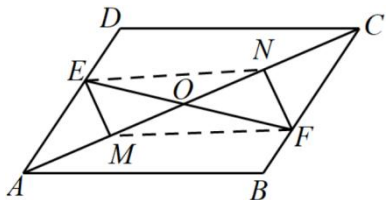


【答案】见解析

【解析】

【分析】连接 EN 、 FM ，利用 $EM \perp AC$ 于 M ， $FN \perp AC$ 于 N ，推出 $EM \parallel FN$ ，根据 AAS 证明 $\triangle AEM \cong \triangle CFN$ ，得到 $EM=FN$ ，证明四边形 $EMFN$ 是平行四边形，由此得到结论.

【详解】证明：连接 EN 、 FM ，



$\because EM \perp AC$ ， $FN \perp AC$ ，

$\therefore \angle AME = \angle EMN = \angle FNC = \angle FNM = 90^\circ$ ，

$\therefore EM \parallel FN$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，

$$\therefore \angle EAM = \angle FCN,$$

$$\because DE = BF,$$

$$\therefore AE = CF,$$

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle CFN$ 中

$$\begin{cases} \angle EAM = \angle FCN \\ \angle AME = \angle CNF \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEM \cong \triangle CFN (AAS),$$

$$\therefore EM = FN,$$

$$\because EM \parallel FN,$$

$\therefore$ 四边形 $EMFN$ 是平行四边形,

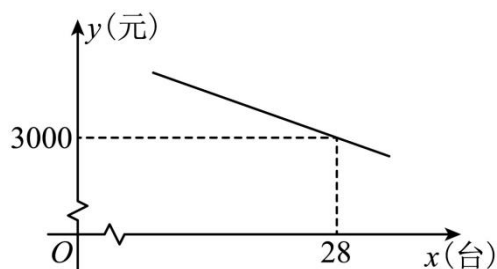
$\therefore EF$ 与 MN 互相平分.

【点睛】此题考查了平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，正确掌握平行四边形的判定定理和性质定理及全等三角形的判定定理是解题的关键.

24. 某商场售卖甲、乙两种不同的电视机，第一季度甲型电视机的售价比乙型电视机售价少 800 元，甲型电视机销售额为 64000 元，乙型电视机销售量是甲型电视机的两倍，且乙型电视机的销售额是甲型电视机的 2.5 倍.

(1) 求甲、乙两种电视机的售价;

(2) 经过市场调查，两种电视机的售价和销售量均满足一次函数的关系，在第一季度的售价和销售量的基础上，甲型电视机售价 y (元) 与销售量 x (台) 的关系如图所示，乙型电视机售价 y (元) 与销售量 x (台) 的关系为 $y = 6000 - 50x$. 该商场计划第二季度再进一批甲、乙两种电视机共 80 台，且甲型电视机的进货数量不低于乙型电视机的 1.5 倍，商场第二季度刚好售卖完这批电视机，销售额为 260800 元. 求第二季度甲的电视机的销售量及售价.



【答案】(1) 甲种电视机的售价为 3200 元，乙种电视机的售价为 4000 元;

(2) 第二季度甲的电视机的销售量是 48 台，售价是 2500 元/台.

【解析】

【分析】(1) 设乙种电视机的售价为 x 元, 甲种电视机的售价为 $(x-800)$ 元, 利用乙型电视机的销售额是甲型电视机的 2.5 倍列出方程即可求解;

(2) 设甲型电视机售价 y (元) 与销售量 x (台) 的关系为 $y=kx+b$, 待定系数法可得 $y=-25x+3700$, 设第二季度甲的电视机的销售量是 m 台, 则第二季度乙的电视机的销售量是 $(80-m)$ 台, 根据甲型电视机的进货数量不低于乙型电视机的 1.5 倍, 得 $m \geq 48$, 而商场第二季度刚好售卖完这批电视机, 销售额为 260800 元, 有 $(-25m+3700)m + [6000-50(80-m)](80-m) = 260800$, 可解得 $m=48$ 或 $m=28$ (舍去), 从而可得第二季度甲的电视机的销售量是 48 台, 售价是 2500 元/台.

【小问 1 详解】

设乙种电视机的售价为 x 元, 甲种电视机的售价为 $(x-800)$ 元,

$$\text{则 } \frac{64000}{x-800} \times 2 = \frac{64000 \times 2.5}{x},$$

解得: $x=4000$,

经检验, $x=4000$ 是方程的解, 也符合题意,

$$\therefore x-800=4000-800=3200,$$

答: 甲种电视机的售价为 3200 元, 乙种电视机的售价为 4000 元;

【小问 2 详解】

由 (1) 知, 第一季度甲种电视机售价是 3200 元/台, 销售量为 $\frac{64000}{3200} = 20$ (台),

由图象可知, 当售价是 3000 元/台时, 销售量是 28 台,

设甲型电视机售价 y (元) 与销售量 x (台) 的关系为 $y=kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} 20k+b=3200 \\ 28k+b=3000 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k=-25 \\ b=3700 \end{cases},$$

$$\therefore y=-25x+3700,$$

设第二季度甲的电视机的销售量是 m 台, 则第二季度乙的电视机的销售量是 $(80-m)$ 台,

$\because$ 甲型电视机的进货数量不低于乙型电视机的 1.5 倍,

$$\therefore m \geq 1.5(80 - m),$$

解得 $m \geq 48$,

$\because$ 商场第二季度刚好售卖完这批电视机, 销售额为 260800 元,

$$\therefore (-25m + 3700)m + [6000 - 50(80 - m)](80 - m) = 260800,$$

整理化简得 $m^2 - 76m + 1344 = 0$,

解得 $m = 48$ 或 $m = 28$,

$\because m \geq 48$,

$\therefore m = 28$ 舍去,

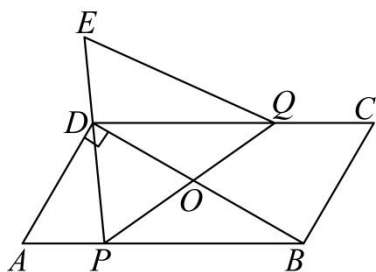
$\therefore m = 48$,

此时 $y = -25m + 3700 = -25 \times 48 + 3700 = 2500$,

答: 第二季度甲的电视机的销售量是 48 台, 售价是 2500 元/台.

【点睛】本题考查分式方程和一次函数的应用, 解题的关键是读懂题意, 列出方程和函数关系式.

25. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, O 为对角线 BD 的中点, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$. $AD = 4$. 动点 P 从点 A 出发, 以每秒 2 个单位的速度沿折线 $AB - BC$ 向终点 C 匀速运动, 连结 PO 并延长交折线 $CD - DA$ 于点 Q . 将线段 PQ 绕着点 P 逆时针旋转 60° 得到线段 PE , 连结 QE , 设点 P 的运动时间为 $t(s)$.



- (1) 用含 t 的代数式表示 PB 的长.
- (2) 当点 P 在边 AB 上运动时, 求证: $AP = CQ$.
- (3) 当点 E 在 $\triangle ABD$ 边上时, 求 t 的值.

【答案】(1) 当 $0 \leq t \leq 4$ 时, $PB = 8 - 2t$; 当 $4 < t \leq 6$ 时, $PB = 2t - 8$

(2) 见解析 (3) 2 或 3

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质, 勾股定理, 全等三角形的判定与性质, 等边三角形的判定与性质, 利用分类讨论的思想方法解答.

(1) 利用含 30° 角的直角三角形的性质, 平行四边形的性质解答即可;

(2) 连接 AC ，利用平行四边形的性质和全等三角形的判定与性质解答即可；

(3) 利用平行四边形的性质，等边三角形的判定与性质求得点 E 与点 D 重合或点 E 在 AB 边上时的 t 值，从而得到 t 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle ADB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AD = 4$,

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2AD = 8,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 4\sqrt{3},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

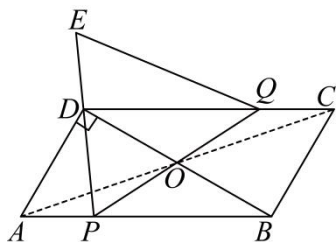
$$\therefore BC = AD = 4,$$

① 当 $0 \leq t \leq 4$ 时, $PB = AB - AP = 8 - 2t$,

② 当 $4 < t \leq 6$ 时, $PB = 2t - 8$;

【小问 2 详解】

证明: 连接 AC , 如图,



在 $\square ABCD$ 中, O 为对角线 BD 的中点,

$$\therefore AC \text{ 经过点 } O, OA = OC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle QCO = \angle PAO,$$

在 $\triangle APO$ 和 $\triangle CQO$ 中,

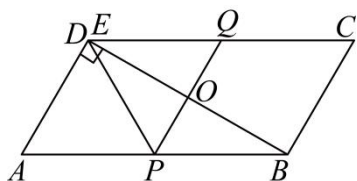
$$\begin{cases} \angle AOP = \angle COQ \\ OA = OC \\ \angle OAP = \angle OCQ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle APO \cong \triangle CQO (\text{ASA}),$$

$$\therefore AP = CQ;$$

【小问 3 详解】

解：①当点 E 与点 D 重合时，如图，



由题意得： $\triangle PQE$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle PQE = \angle QPE = 60^\circ,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle QPB = \angle PQE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle QPB = 60^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel PQ,$$

$\therefore$ 四边形 $APQD$ 为平行四边形，

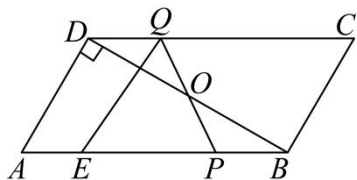
$$\therefore PQ = AD = 4,$$

$$\therefore DQ = PQ = AP = 4,$$

$$\therefore 2t = 4,$$

$$\therefore t = 2,$$

②当点 E 落在 AB 边上时，如图，



由题意得： $\triangle PQE$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle PEQ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle PEQ = 60^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel EQ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEQD$ 为平行四边形,

$$\therefore EQ = AD = 4, AE = DQ,$$

$$\therefore PE = 4,$$

$$\therefore AE = AP - PE = 2t - 4,$$

在 $\triangle DOQ$ 和 $\triangle BOP$ 中,

$$\begin{cases} \angle DOQ = \angle BOP \\ OD = OB \\ \angle QDO = \angle PBO \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DOQ \cong \triangle BOP (\text{AAS}),$$

$$\therefore DQ = PB,$$

$$\therefore PB = AE,$$

$$\therefore 8 - 2t = 2t - 4,$$

$$\therefore t = 3,$$

$\therefore$ 当点 E 在 $\triangle ABD$ 边上时, t 的值为: 2 或 3.