

2024-2025 学年上海市闵行区紫竹双语学校八年级（下）

第二次月考数学试卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列函数中，是一次函数的是（ ）

A. $y = 1 - x$

B. $y = \frac{1}{x}$

C. $y = kx + 1$

D. $y = x^2 + 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数的定义条件进行逐一分析即可。

【详解】解：A、 $y=1-x$ 是一次函数，故此选项符合题意；

B、 $y = \frac{1}{x}$ 是反比例函数，故此选项不符合题意；

C、当 $k=0$ 时不是一次函数，故此选项不符合题意；

D、 $y=x^2+1$ 是二次函数，故此选项不符合题意。

故选：A。

【点睛】本题考查了一次函数。解题的关键是掌握一次函数的定义，一次函数 $y=kx+b$ 的定义条件是： k 、 b 为常数， $k \neq 0$ ，自变量次数为 1。

2. 十边形的外角和为（ ）

A. 1800°

B. 1440°

C. 1080°

D. 360°

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查多边形的外角和，熟练掌握多边形外角和为 360° 是解题的关键；因此此题可根据多边形的外角和进行求解即可。

【详解】解：十边形的外角和是 360° ；

故选 D。

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，如果 $\angle A + \angle C = 160^\circ$ ，那么 $\angle B$ 等于（ ）

A. 40°

B. 60°

C. 80°

D. 100°

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质，根据平行四边形的对角相等，邻角互补进行求解即可。

【详解】解：∵ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\therefore \angle A = \angle C, \quad \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 2\angle C = 160^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 100^\circ$$

故选 D.

4. 已知两个相似三角形的对应边的比为 5:1，则它们的周长之比为 ()

A. 1:5

B. 5:1

C. 25:1

D. 1:25

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形的性质，周长之比等于相似比解答即可.

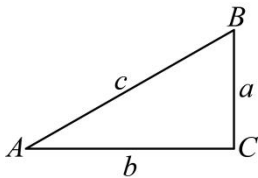
本题考查了相似三角形的性质，熟练掌握性质是解题的关键.

【详解】解：两个相似三角形的对应边的比为 5:1，

故它们的周长之比为 5:1，

故选：B.

5. 如图，在 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = a$ ， $AC = b$ ， $AB = c$ ，则下列选项正确的是 ()



A. $\sin A = \frac{b}{c}$

B. $\tan B = \frac{b}{a}$

C. $\tan A = \frac{a}{c}$

D. $\cos B = \frac{b}{a}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了三角函数的定义根据定义逐一判断，即可求解；掌握 $\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$ ，

$\cos \alpha = \frac{\alpha \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$ ， $\tan \alpha = \frac{\alpha \text{ 的对边}}{\alpha \text{ 的邻边}}$ 是解题的关键.

【详解】解：A. $\sin A = \frac{a}{c}$ ，结论错误，故不符合题意；

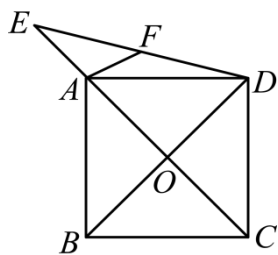
B. $\tan B = \frac{b}{a}$ ，结论正确，故符合题意；

C. $\tan A = \frac{a}{b}$, 结论错误, 故不符合题意;

D. $\cos B = \frac{a}{c}$, 结论错误, 故不符合题意;

故选: B.

6. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $3\sqrt{2}$, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 在 CA 的延长线上, $OE = 5$, 连接 DE , 若 F 为 DE 的中点, 则线段 AF 的长为 ()



A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

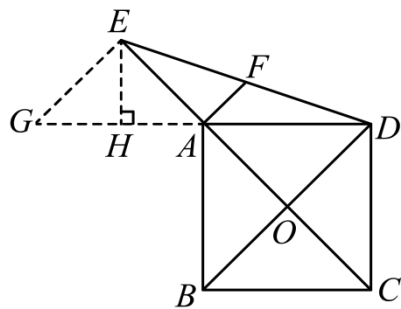
D. $\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了正方形的性质, 勾股定理, 等腰直角三角形的性质与判定, 三角形中位线定理, 正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键. 先有正方形的性质和勾股定理得到 $OA = 3$, 推出 $AE = 2$, 延长 DA 到 G , 使 $AG = AD$, 连接 EG , 过点 E 作 AG 的垂线, 垂足为 H , 再证明 AF 为 $\triangle DGE$ 的中位线, 接着证明 $\text{Rt}\triangle EAH$ 是等腰直角三角形, 进而由勾股定理得到 $AH = EH = \sqrt{2}$, 则 $GH = 2\sqrt{2}$, 由勾股定理得 EG , 最后由 $AF = \frac{1}{2}EG$ 得到答案.

【详解】解: 延长 DA 到 G , 使 $AG = AD$, 连接 EG , 过点 E 作 AG 的垂线, 垂足为 H



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore OA = OC = OD = OB$, $\angle DOC = 90^\circ$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DOC$ 中, $OD^2 + OC^2 = DC^2$

$$\because DC = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore OA = OC = OD = OB = 3$$

$$\because OE = 5$$

$$\therefore AE = OE - OA = 5 - 3 = 2$$

$\because F$ 为 DE 的中点, A 为 GD 的中点

$\therefore AF$ 为 $\triangle DGE$ 的中位线

$$\therefore AF = \frac{1}{2}EG$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$$\therefore \angle EAH = \angle DAC = 45^\circ$$

$\therefore \triangle EAH$ 是等腰直角三角形

$$\therefore AH = EH, AH^2 + EH^2 = AE^2$$

$$\because AE = 2$$

$$\therefore AH = EH = \sqrt{2}$$

$$\therefore GH = AG - AH = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

在 $\text{Rt}\triangle EHG$ 中, 由勾股定理得 $EG^2 = EH^2 + GH^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 2 + 8 = 10$

$$\therefore EG = \sqrt{10}$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2}EG = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

故选: C.

二、填空题: 本题共 12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分.

7. 已知一次函数 $y = -x + b$ 的图象过点 $P(2, 4)$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 6

【解析】

【分析】 直接把点 $P(2, 4)$ 代入一次函数 $y = -x + b$, 求出 b 的值即可.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = -x + b$ 的图象过点 $P(2, 4)$,

$$\therefore -2 + b = 4, \text{ 解得 } b = 6.$$

故答案为: 6.

【点睛】 本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点, 熟知一次函数图象上各点的坐标一定适合此函数的

解析式是解答此题的关键.

8. 用换元法解分式方程 $\frac{2x^2+1}{x} - \frac{2x}{2x^2+1} = 1$ 时, 如果设 $\frac{2x^2+1}{x} = y$, 将原方程化为关于 y 的整式方程,

那么这个整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - y - 2 = 0$

【解析】

【分析】 设 $\frac{2x^2+1}{x} = y$, 则原方程化为 $y - \frac{2}{y} = 1$, 再方程两边都乘 y 即可.

【详解】 解: $\frac{2x^2+1}{x} - \frac{2x}{2x^2+1} = 1$,

设 $\frac{2x^2+1}{x} = y$, 则原方程化为:

$$y - \frac{2}{y} = 1,$$

方程两边都乘 y , 得 $y^2 - 2 = y$,

即 $y^2 - y - 2 = 0$,

故答案为: $y^2 - y - 2 = 0$.

【点睛】 本题考查了用换元法解分式方程, 能正确换元是解此题的关键.

9. 计算: $3\vec{a} - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $2\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

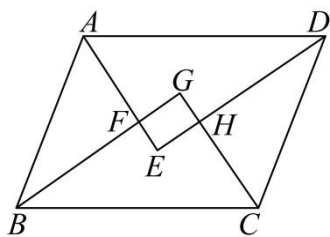
【分析】 根据向量的线性运算法则进行运算, 从而可得答案.

【详解】 解: $3\vec{a} - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b}) = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

故答案为: $2\vec{a} + 2\vec{b}$.

【点睛】 本题考查的向量的线性运算, 掌握向量的加, 减, 数乘运算是解题的关键.

10. 如图, $\square ABCD$ 的四个内角的平分线相交, 如能构成四边形 $EFGH$, 则这个四边形 $EFGH$ 是_____.



【答案】矩形

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质和矩形的判定. 利用平行四边形的性质得出 $\angle GHE = \angle EFG = \angle FGH = 90^\circ$ 即可证明四边形 $EFGH$ 是矩形.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ADC = 180^\circ.$$

$\because AE, DE$ 分别平分 $\angle DAB, \angle ADC$,

$$\therefore \angle EAD + \angle EDA = 90^\circ, \text{ 即 } \angle HEF = 90^\circ.$$

同理可证 $\angle GHE = \angle EFG = \angle FGH = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

故答案为: 矩形.

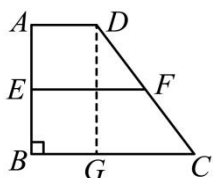
11. 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ, AB = 4, AD = 2, CD = 5$, 这个梯形的中位线的长度为_____.

【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理, 矩形的判定和性质, 梯形中位线的性质, 解题的关键是作出辅助线, 过点 D 作 $DG \perp BC$ 于点 G , 证明四边形 $ABGD$ 为矩形, 得出 $BG = AD = 2, DG = AB = 4$, 根据勾股定理求出 $CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = 3$, 根据中位线性质的求出 $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(2 + 5) = \frac{7}{2}$.

【详解】解: 过点 D 作 $DG \perp BC$ 于点 G , 如图所示:



则 $\angle DGB = 90^\circ$,

$$\because AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle B = \angle BGD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 为矩形,

$$\therefore BG = AD = 2, \quad DG = AB = 4,$$

$$\therefore CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = 3,$$

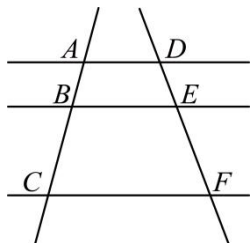
$$\therefore BC = 2 + 3 = 5,$$

$\therefore EF$ 为梯形的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(2 + 5) = \frac{7}{2}.$$

故答案为: $\frac{7}{2}$.

12. 如图, $AD \parallel BE \parallel CF$, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, $DE = 3$, 则 DF 的长为_____.



【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查的是平行线分线段成比例定理, 灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键. 根据平行线分线段成比例定理列出比例式, 代入计算得到答案.

【详解】 解: $\because AD \parallel BE \parallel CF$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{EF},$$

解得 $EF = 6$,

$$\therefore DF = DE + EF = 9,$$

故答案为: 9.

13. 对于锐角 α , 已知 $\sin \alpha = \cos 40^\circ$, 则 $\alpha =$ _____.

【答案】 50°

【解析】

【分析】 本题考查了互余两角三角函数的关系, 掌握 $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ 是解题的关键.

根据互余两角三角函数的关系进行计算即可.

【详解】 解: 由互余两角三角函数的关系可得, $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, 而且 $\sin \alpha = \cos 40^\circ$,

所以 $90^\circ - \alpha = 40^\circ$. 即 $\alpha = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$,

故答案为: 50° .

14. 从“卓越”对应的英语单词“*excellence*”中任意选一个字母, 选出的字母为“*e*”的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$ ##0.4

【解析】

【分析】本题主要考查概率公式, 解题的关键是掌握随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

从“卓越”对应的英语单词“*excellence*”中任意选一个字母共有 10 种等可能结果, 其中选出的字母为“*e*”的有 4 种结果, 再根据概率公式求解即可.

【详解】解: 从“卓越”对应的英语单词“*excellence*”中任意选一个字母共有 10 种等可能结果, 其中选出的字母为“*e*”的有 4 种结果,

所以选出的字母为“*e*”的概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$,

故答案为: $\frac{2}{5}$.

15. 若 $y = (m-2)x^{m^2-2} + 3x$ 是关于 x 的二次函数, 则 m 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】此题主要考查了二次函数定义, 利用二次函数定义可得 $m^2 - 2 = 2$, 且 $m - 2 \neq 0$, 解方程即可.

【详解】解: $\because y = (m-2)x^{m^2-2} + 3x$ 是关于 x 的二次函数,

$\therefore m^2 - 2 = 2$, 且 $m - 2 \neq 0$,

解得: $m = -2$.

故答案为: -2 .

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将抛物线 $y = x^2 + 2$ 向左平移 1 个单位, 再向下平移 4 个单位, 所得新抛物线的顶点为 P , 与 y 轴交点为 A , 则 $\tan \angle POA =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象与几何变换、二次函数的性质以及解直角三角形, 先求出新抛物线表达式为 $y = (x+1)^2 - 2$, 即可求得 $P(-1, -2)$, 过点 P 作 $PH \perp y$ 轴, 垂足为 H , 即可得出 $\tan \angle POA$.

【详解】解：∵将抛物线 $y = x^2 + 2$ 向左平移1个单位，再向下平移4个单位，所得新抛物线为

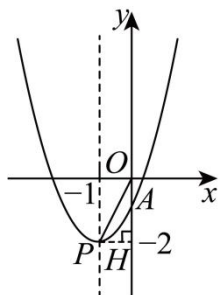
$$y = (x+1)^2 + 2 - 4, \text{ 即 } y = (x+1)^2 - 2$$

$$\therefore P(-1, -2),$$

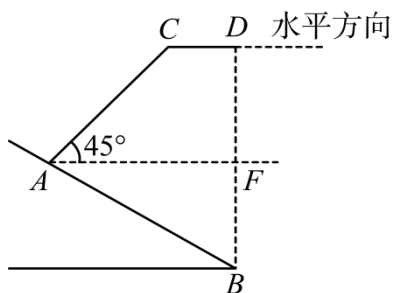
如图，过点 P 作 $PH \perp y$ 轴，垂足为 H ，

$$\text{在 Rt}\triangle PAH \text{ 中, } \tan \angle POA = \frac{PH}{OH} = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.



17. 如图，一架无人机在滑雪赛道的一段坡道 AB 的上方进行跟踪拍摄，无人机伴随运动员水平向右飞行，某次拍摄中，当运动员在点 A 位置时，无人机在他的仰角为 45° 的斜上方 C 处，当运动员到达地面 B 点时，无人机恰好到达运动员正上方的 D 处，已知 AB 的坡度为 $1:\sqrt{3}$ 且长为 300 米，无人机飞行距离 CD 为 60 米，则无人机离地面高度 BD 的长是_____米. (参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.7$)

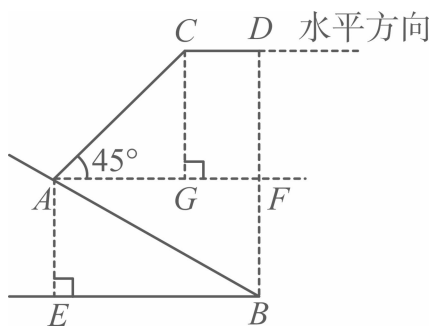


【答案】 345

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用-仰角俯角问题、坡度坡角问题，过 A 点作地面的垂线，交地面于点 E ，过点 C 作 $CG \perp AF$ 于点 G ，由 AB 的坡度为 $1:\sqrt{3}$ 且长为 300 米，结合勾股定理可得 $AE = BF = 150$ 米， $BE = AF = 150\sqrt{3}$ 米， $AG = AF - FG = (150\sqrt{3} - 60)$ 米，在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中， $\angle CAG = 45^\circ$ ，可得 $AG = CG = (150\sqrt{3} - 60)$ 米，则 $DF = CG = (150\sqrt{3} - 60)$ 米，根据 $BD = DF + BF$ 可得出答案.

【详解】解：过 A 点作地面的垂线，交地面于点 E ，过点 C 作 $CG \perp AF$ 于点 G ，



$\therefore AB$ 的坡度为 $1:\sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

设 $AE = x$ 米，则 $BE = \sqrt{3}x$ 米，

由勾股定理可得 $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 2x$ 米，

$$\therefore 2x = 300,$$

解得 $x = 150$,

$$\therefore AE = BF = 150 \text{ 米}, \quad BE = AF = 150\sqrt{3} \text{ 米},$$

$\therefore$ 四边形 $CDFG$ 是矩形，

$$\therefore CD = FG = 60 \text{ 米},$$

$$\therefore AG = AF - FG = (150\sqrt{3} - 60) \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中， $\angle CAG = 45^\circ$,

$$\therefore AG = CG = (150\sqrt{3} - 60) \text{ 米},$$

$$\therefore DF = CG = (150\sqrt{3} - 60) \text{ 米},$$

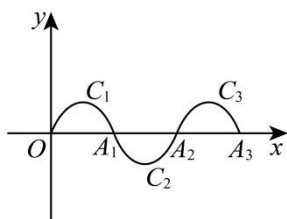
$$\therefore BD = DF + BF = 150\sqrt{3} + 90 \gg 345 \text{ (米)}.$$

$\therefore$ 无人机离地面的高度 BD 的长约为 345 米.

故答案为：345.

18. 如图，一段抛物线： $y = -x(x-2)$ ($0 \leq x \leq 2$) 记为图象 C_1 ，它与 x 轴交于两点 O 、 A_1 ；将图象 C_1 绕点 A_1 旋转 180° 得到图象 C_2 ，交 x 轴于点 A_2 ；将图象 C_2 绕点 A_2 旋转 180° 得到图象 C_3 ，交 x 轴于点 A_3 ；...

如此进行下去，若点 $P\left(\frac{2025}{2}, m\right)$ 在某段抛物线上，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查抛物线与 x 轴的交点、二次函数图象上点的坐标特征，解答本题的关键是明确题意，发现图象的变化特点；

根据题意和图象可以发现每 4 个单位长度的图象为一个循环，然后即可计算出点 $P\left(\frac{2025}{2}, m\right)$ 中 m 的值.

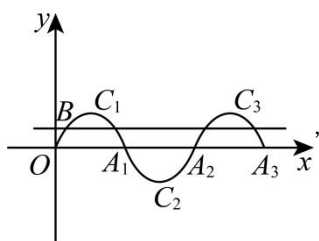
【详解】 解： $y = -x(x-2) = -(x-1)^2 + 1$,

$\therefore$ 图象 C_1 的顶点坐标为 $(1, 1)$,

$\therefore$ 点 O 和图象 C_1 的顶点间的一半，横坐标为 $x = \frac{1}{2}$,

把 $x = \frac{1}{2}$ 代入 $y = -(x-1)^2 + 1$ ，解得： $y = \frac{3}{4}$ ，

作 $y = \frac{3}{4}$ 的直线平行 x 轴，如图：



$\therefore B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$,

由图象可得，

每 4 个单位长度的图象为一个循环，

$\therefore \frac{2025}{2} = 1012\frac{1}{2}$, $1012 \div 4 = 253$,

$\therefore$ 点 $P\left(\frac{2025}{2}, m\right)$ 与图象 C_1 的点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 中的纵坐标是相等的，

$\therefore m = \frac{3}{4}$,

故答案为: $\frac{3}{4}$.

三、计算题: 本大题共 1 小题, 共 5 分.

19. 解方程: $x - \sqrt{2x+1} = 1$.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 先移项, 再两边平方, 即可得出一个一元二次方程, 求出方程的解, 最后进行检验即可.

【详解】 解: 移项得: $\sqrt{2x+1} = x-1$,

两边平方得: $2x+1 = (x-1)^2$,

整理得: $x^2 - 4x = 0$,

解得: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$,

经检验 $x = 0$ 不是原方程的解, 舍去,

$\therefore x = 4$ 是原方程的解.

【点睛】 本题考查了解无理方程的应用, 解此题的关键是能把无理方程转化成有理方程, 注意: 解无理方程一定要进行检验.

四、解答题: 本题共 8 小题, 共 53 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

20. 解方程: $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{1}{3x} = \frac{x+5}{3x-3}$

【答案】 $x = -4$

【解析】

【详解】 试题分析:

方程两边都乘 $3x(x-1)$, 将原方程化为一元二次方程, 再用因式分解法求解, 注意检验.

试题解析:

方程两边都乘 $3x(x-1)$, 得: $3(x+1) - (x-1) = (x+5)x$,

整理得: $x^2 + 3x - 4 = 0$, 解得: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

经检验: $x = -4$ 是原方程的解.

点睛: 本题主要考查了可化为一元二次方程的分式方程的解法, 基本方法是, 将方程两边都乘以分母的最简公分母, 化分式方程为整式方程, 求出整式方程的解后, 要代入到最简公分母中检验, 若最简公分母不等于 0, 则是原分式方程的解, 否则原分式方程无解.

21. 解二元二次方程组
$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2-y-2x-1=0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】把方程①变形为 $y=1-x$ ，利用代入法消去 y ，得到关于 x 的一元二次方程，解方程求出 x ，然后就可以求出 y ，从而求解.

【详解】解：
$$\begin{cases} x+y-1=0 \text{ ①} \\ x^2-y-2x-1=0 \text{ ②} \end{cases},$$

把①变形 $y=1-x$ ，代入②得 $x^2-(1-x)-2x-1=0$ ，

化简整理得 $x^2-x-2=0$ ，

$\therefore x_1=2, x_2=-1$ ，

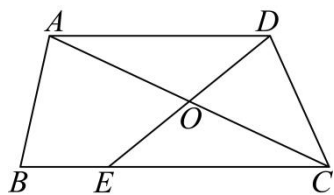
把 $x=2$ 代入①得 $y=-1$ ，

把 $x=-1$ 代入①得 $y=2$ ，

所以原方程组的解为：
$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=2 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查二元二次方程组的解法，一般用代入法比较简单，先消去一个未知数再解关于另一个未知数的一元二次方程，把求得结果代入一个较简单的方程中即可.

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 O 是对角线 AC 的中点， DO 的延长线与 BC 相交于点 E ，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ， $\overrightarrow{BE}=\vec{c}$.



(1) 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 表示向量： $\overrightarrow{ED} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 写出图中所有与 $\overrightarrow{AD}$ 互为相反向量的向量： $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 求作： $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC}$. (画出所求向量，并直接写出结论)

【答案】 (1) $-\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$

(3) 见详解

【解析】

【分析】(1) 由 $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{c}$, 代入即可;

(2) 由 $\triangle AOD \cong \triangle COE$, 可知 $AD = EC$, 因此图中与 $\overrightarrow{AD}$ 互为相反向量的向量有 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$;

(3) 如图, 作 $DM \parallel OC$, $CM \parallel OD$, 则向量 $\overrightarrow{AM}$ 即为所求.

【小问 1 详解】

解: $\because \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{c}$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = -\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}.$$

故答案为: $-\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}$;

【小问 2 详解】

解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAO = \angle ECO,$$

$\because$ 点 O 是对角线 AC 的中点,

$$\therefore AO = OC,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COE$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COE,$$

$$\therefore AD = EC,$$

$\therefore$ 图中与 $\overrightarrow{AD}$ 互为相反向量的向量有 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$,

故答案为: $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$;

【小问 3 详解】

如图, 向量 $\overrightarrow{AM}$ 即为所求

作 $DM \parallel OC$, $CM \parallel OD$,

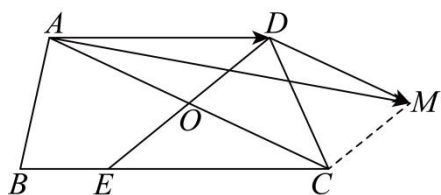
则四边形 $DOCM$ 是平行四边形,

$$\therefore OC = DM,$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DM},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM},$$

则向量 $\overrightarrow{AM}$ 即为所求.



【点睛】本题考查平面向量三角形法则、四边形法则，平行四边形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，相反向量的定义等知识，解题的关键是熟练掌握基本概念.

23. 近期，由杭州深度求索人工智能基础技术研究有限公司（简称 *DeepSeek*）开发的 *AI* 大模型在全球范围内掀起了热潮. 据悉，*DeepSeek* 训练一个 *AI* 模型时，初始数据量为 2000 条时需 18 分钟完成训练，之后每增加 100 条数据，训练时间延长 3 分钟. 假设总数据量为 x 条（ $x \geq 2000$ ），训练时间为 y 分钟，且 y 与 x 的关系可以近似的看作一次函数.

- (1) 求 y 关于 x 的函数关系式；
- (2) 若训练总时间为 69 分钟，求使用的数据总量.

【答案】(1) $y = 0.03x - 42$ ($x \geq 2000$)

(2) 若训练的总时间为 69 分钟，使用的数据总量为 3700 条.

【解析】

【分析】该题考查了一次函数的应用，解题的关键是列出函数关系式.

- (1) 根据每增加 100 条数据，训练时间延长 3 分钟求出 y 关于 x 的函数关系式即可；
- (2) 将 $y = 69$ 代入关系式求解即可.

【小问 1 详解】

解：根据题意得， $y = 3 \times \frac{x - 2000}{100} + 18 = 0.03x - 42$ ($x \geq 2000$)；

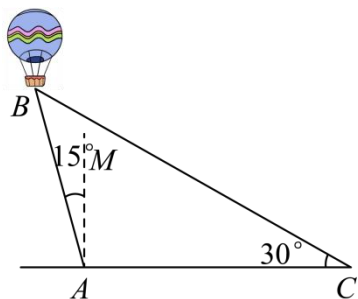
【小问 2 详解】

解：当 $y = 69$ 时， $69 = 0.03x - 42$ ，

解得 $x = 3700$.

$\therefore$ 若训练的总时间为 69 分钟，使用的数据总量为 3700 条.

24. 如图， A 处有一垂直于地面的标杆 AM ，热气球沿着与 AM 的夹角为 15° 的方向升空，到达 B 处，这时在 A 处的正东方向 200 米的 C 处测得 B 的仰角为 30° （ AM 、 B 、 C 在同一平面内）. 求 A 、 B 之间的距离.（结果精确到 1 米， $\sqrt{2} \approx 1.414$ ）



【答案】A、B之间的距离约为 141 米

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键；

过点A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，根据题意可得： $AC = 200$ 米， $\angle BAC = 105^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，从而利用三角形内角和定理可得 $\angle ABD = 45^\circ$ ，然后在 $Rt\triangle ACD$ 中，利用含 30° 度角的直角三角形的性质可得 $AD = 100$ 米，再在 $Rt\triangle ABD$ 中，利用锐角三角函数的定义进行计算，即可解答.

【详解】解：过点A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，

由题意得： $AC = 200$ 米， $\angle BAC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，

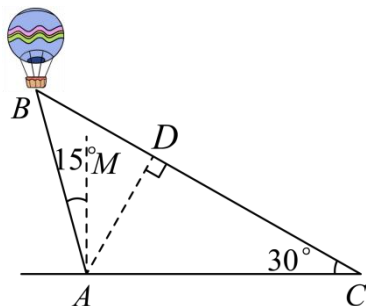
$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle BAC - \angle C = 45^\circ,$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中， $\angle C = 30^\circ$ ，

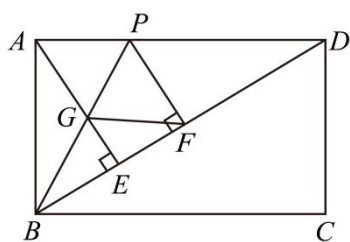
$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC = 100 \text{ (米)},$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } AB = \frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ (米)},$$

$\therefore$ A、B之间的距离约为 141 米.



25. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AE \perp BD$ 于点 E ，点 P 是边 AD 上一点，若 BP 平分 $\angle ABD$ ，交 AE 于点 G ， $PF \perp BD$ 于点 F .



(1) 求证: $AP = AG$;

(2) 求证: 四边形 $AGFP$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质、菱形的判定和性质, 熟练掌握以上知识点是解题的关键.

(1) 根据矩形性质和角平分线的性质证明;

(2) 证明 $AG = PF$, 证明四边形 $AGFP$ 是平行四边形, 再根据 $AP = AG$ 即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore PA \perp AB$,

$\because BP$ 平分 $\angle ABD$, $PF \perp BD$,

$\therefore PA = PF$, $\angle ABP = \angle GBE$,

$\because \angle ABP + \angle APB = 90^\circ$, $\angle GBE + \angle BGE = 90^\circ$,

$\therefore \angle APB = \angle BGE$,

$\because \angle BGE = \angle AGP$,

$\therefore \angle APG = \angle AGP$,

$\therefore AG = AP$,

【小问 2 详解】

证明: $\because PA = PF$, $AG = AP$,

$\therefore AG = PF$,

$\because AE \perp BD$, $PF \perp BD$,

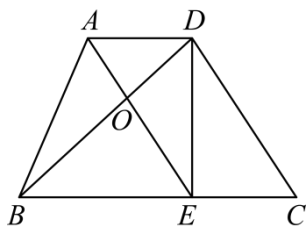
$\therefore PF \parallel AE$,

$\therefore$ 四边形 $AGFP$ 是平行四边形,

$\because AP = AG$,

$\therefore$ 四边形 $AGFP$ 是菱形.

26. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 是一点, 且 $OA \cdot BE = OE \cdot CE$.



- (1) 求证：四边形 $AECD$ 是平行四边形；
 (2) 如果 $\angle BDE = \angle DAE$ ，求证： $OB \cdot CD = BE \cdot DE$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质，三角形相似的判定与性质，平行的判定与性质，熟练掌握以上知识点是解题的关键。

(1) 通过 $AD \parallel BC$ ，证明 $\triangle ADO \sim \triangle EBO$ ，得到 $\frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OB}$ ，结合 $OA \cdot BE = OE \cdot CE$ ，即 $\frac{OA}{OE} = \frac{CE}{BE}$ ，推出 $\frac{OD}{OB} = \frac{CE}{BE}$ ，从而得到 $\frac{BD}{OB} = \frac{BC}{BE}$ ，结合 $\angle OBE = \angle DBC$ ，推出 $\triangle OBE \sim \triangle DBC$ ，那么 $\angle BOE = \angle BDC$ ，得到 $OE \parallel CD$ ，即 $AE \parallel CD$ ，最后结合 $AD \parallel BC$ 从而得证；

(2) 先证明 $\triangle DOE \sim \triangle ADE$ ，得到 $\frac{DE}{AE} = \frac{OD}{AD}$ ，再证明 $\triangle ADO \sim \triangle EBO$ ，得到 $\frac{OD}{AD} = \frac{OB}{BE}$ ，那么 $\frac{DE}{AE} = \frac{OB}{BE}$ ，

由四边形 $AECD$ 是平行四边形，可知 $AE = CD$ ，从而有 $\frac{DE}{CD} = \frac{OB}{BE}$ ，最后得证。

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ADO = \angle EBO, \quad \angle DAO = \angle BEO,$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle EBO,$$

$$\therefore \frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OB},$$

$$\because OA \cdot BE = OE \cdot CE,$$

$$\therefore \frac{OA}{OE} = \frac{CE}{BE}.$$

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{CE}{BE}.$$

$$\therefore \frac{OD+OB}{OB} = \frac{CE+BE}{BE}$$

$$\therefore \frac{BD}{OB} = \frac{BC}{BE}$$

又 $\angle OBE = \angle DBC$

$$\therefore \triangle OBE \sim \triangle DBC$$

$$\therefore \angle BOE = \angle BDC$$

$$\therefore OE \parallel CD, \text{ 即 } AE \parallel CD.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

证明: $\because \angle BDE = \angle DAE, \angle OED = \angle DEA,$

$$\therefore \triangle DOE \sim \triangle ADE.$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OD}{AD}.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle EBO, \angle DAO = \angle BEO,$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle EBO,$$

$$\therefore \frac{OD}{AD} = \frac{OB}{BE}.$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OB}{BE}.$$

$\because$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

$$\therefore AE = CD.$$

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{OB}{BE}.$$

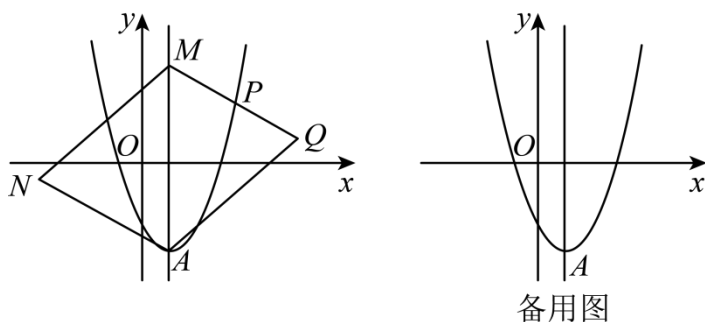
$$\text{即 } OB \cdot CD = BE \cdot DE.$$

27. 如图, 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ (其中 b, c 为常数) 的图象经过

点 $(3, 1)$, 其顶点 A 的横坐标为 1. 点 P 是该抛物线在 x 轴上方的图象上的一点, 其横坐标为 m , 点 Q 的坐

标为 $(2m-1, 1)$, 连接 QP 并延长交该抛物线的对称轴于点 M , 连接 AQ , 以 AQ, QM 为边作平行四边形

$AQMN$.



- (1) 求该抛物线对应的函数关系式;
- (2) 当 $m > 0$, 且 $QM \perp y$ 轴时, 求点 Q 的坐标;
- (3) 当点 N 与点 Q 的纵坐标之和为 0 时, 求 m 的值;
- (4) 当四边形 $AQMN$ 是矩形时, 直接写出 m 的值.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 2$

(2) $(5, 1)$

(3) $m = 1 \pm \sqrt{5}$

(4) $m = 1 \pm 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象及性质, 熟练掌握二次函数的图象及性质, 平行四边形的性质, 矩形的性质, 相似的判定及性质是解题的关键;

(1) 根据顶点 A 的横坐标为 1, 求 $b = -2$, 再将点 $(3, 1)$ 代入 $y = x^2 - 2x + c$, 求出 c 的值, 即可求函数的解析式;

(2) 用待定系数法求直线 PQ 的解析式, 再求 M 点坐标为 $(1, 2m^2 - 4m - 5)$, 由题意可得 $1 = 2m^2 - 4m - 5$, 即可求 m 的值;

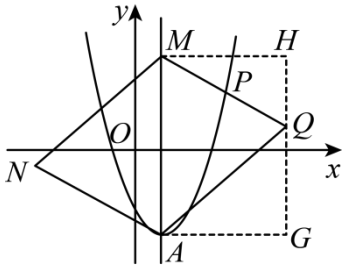
(3) 根据平行四边形的性质, 结合点的平移求出 $N(3 - 2m, 2m^2 - 4m - 9)$, 再由 $2m^2 - 4m - 9 + 1 = 0$, 即可求 m 的值;

(4) 过点 Q 作 $HG \parallel y$ 轴, 过点 M 作 $MH \perp HG$ 交于 H 点, 过点 A 作 $AG \perp HG$ 交于 G 点, 证明

$\triangle MHQ \sim \triangle QGA$, 得到 $\frac{2m-2}{4} = \frac{2m^2-4m-6}{2m-2}$, 求出 m 的值即可.

【小问 1 详解】

解：如图：



$\therefore$ 顶点 A 的横坐标为 1,

$$\therefore -\frac{1}{2}b = 1,$$

$$\therefore b = -2,$$

$$\therefore y = x^2 - 2x + c,$$

将点 $(3,1)$ 代入, $9 - 6 + c = 1,$

解得 $c = -2,$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 2;$$

【小问 2 详解】

解: $\because P$ 点横坐标为 $m,$

$$\therefore P(m, m^2 - 2m - 2),$$

设直线 PQ 的解析式为 $y = kx + b',$

$$\therefore \begin{cases} mk + b' = m^2 - 2m - 2 \\ (2m - 1)k + b' = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{m^2 - 2m - 3}{-m + 1} \\ b' = m^2 - 2m - 2 - \frac{m(m^2 - 2m - 3)}{-m + 1} \end{cases},$$

$$\text{直线 } PQ \text{ 的解析式为 } y = \frac{m^2 - 2m - 3}{-m + 1}x + m^2 - 2m - 2 - \frac{m(m^2 - 2m - 3)}{-m + 1},$$

$$\therefore M(1, 2m^2 - 4m - 5),$$

$\because QM \perp y$ 轴,

$$\therefore 2m^2 - 4m - 5 = 1,$$

解得 $m = 3$ 或 $m = -1$ (舍);

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(2m-1, 1)$,

$\therefore Q(5, 1)$;

【小问 3 详解】

解: $\because$ 四边形 $AQMN$ 是平行四边形,

$\therefore Q$ 点向左平移 $-2m+2$ 个单位长度, 向上平移 $2m^2-4m-6$ 个单位长度得到 M 点,

$\therefore A$ 点向左平移 $-2m+2$ 个单位长度, 向上平移 $2m^2-4m-6$ 个单位长度得到 $N(3-2m, 2m^2-4m-9)$,

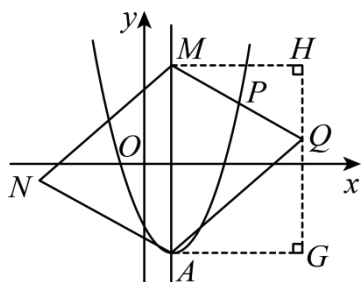
$\therefore$ 点 N 与点 Q 的纵坐标之和为 0,

$$\therefore 1+2m^2-4m-9=0,$$

解得 $m=1\pm\sqrt{5}$;

【小问 4 详解】

解: 过点 Q 作 $HG \parallel y$ 轴, 过点 M 作 $MH \perp HG$ 交于 H 点, 过点 A 作 $AG \perp HG$ 交于 G 点, 如图:



$$\therefore \angle MQA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MQH + \angle AQG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MQH + \angle QMH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AQG = \angle QMH,$$

$$\therefore \triangle MHQ \sim \triangle QGA,$$

$$\therefore \frac{MH}{QG} = \frac{HQ}{AG}, \text{ 即 } \frac{2m-2}{4} = \frac{2m^2-4m-6}{2m-2},$$

解得: $m=1\pm 2\sqrt{2}$.