

风华初级中学教育集团 2024 学年第二学期八年级数学单元练习 1

班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、选择题 (共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列函数中, 一次函数是 ()

A. $y = \frac{1}{5}x^2 + 2$

B. $y = -2$

C. $y = 2x - 3$

D. $y = -\frac{3}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的定义, 一次函数 $y = kx + b$ 的定义条件是: k 、 b 为常数, $k \neq 0$, 自变量次数为 1. 根据一次函数的定义条件进行逐一分析即可.

【详解】 解: 根据一次函数的定义可得: $y = 2x - 3$ 是一次函数,
故选: C

2. 下列方程组中, 不是二元二次方程组的是: ()

A. $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} xy = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查的是二元二次方程组的定义: 由两个方程组成, 并含有两个未知数且含有未知数的项最高次数是 2 的方程组叫做二元二次方程组. 依据二元二次方程组的定义求解即可.

【详解】 解: A. 方程组 $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ 是二元二次方程组, 不符合题意;
B. 方程组 $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ 是二元二次方程组, 不符合题意;
C. 方程组 $\begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 中, 不是整式方程, 不是二元二次方程组, 符合题意;
D. 方程组 $\begin{cases} xy = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ 是二元二次方程组, 不符合题意.

故选: C.

3. 若点 $A(2, a)$ 、 $B(3, b)$ 在直线 $y = -x + 1$ 图像上, 则 ()

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. 不能确定

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的性质, 一次函数图象上点的坐标特征, 根据 $k = -1 < 0$ 可知 y 将随 x 的增大而减小, 根据函数的增减性和已知条件即可得出结论. 解题的关键是根据函数增减性确定自变量大小.

【详解】 解: $\because k = -1 < 0$,

$\therefore y$ 将随 x 的增大而减小,

$\because 2 < 3$,

$\therefore a > b$.

故选: A.

4. 把分式方程 $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ 的两边同时乘以 $3(x+2)(x-2)$, 约去分母, 得 ()

- A. $6x + 3x + 6 = 1$ B. $6x + 3x + 6 = x^2 - 4$
C. $6x - 3x + 6 = x^2 - 4$ D. $6x - 3x - 6 = x^2 - 4$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程, 掌握解分式方程的方式解题的关键, 根据解分式方程去分母的方法求解即可.

【详解】 解: 分式方程 $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ 的两边同时乘以 $3(x+2)(x-2)$, 约去分母, 得

$6x - 3(x+2) = x^2 - 4$, 即为 $6x - 3x - 6 = x^2 - 4$.

故选: D.

5. 如果直线 $y = 2x + 3$ 与直线 $y = 3x - 2m$ 相交于 x 轴上, 那么 m 的值为 ()

- A. $m = -3$ B. $m = -9$ C. $m = -\frac{3}{2}$ D. $m = -\frac{9}{4}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与坐标轴的交点问题, 求出直线 $y = 2x + 3$ 与 x 轴的交点坐标, 再代入到直线 $y = 3x - 2m$ 中, 进行求解即可.

【详解】解： $\because y = 2x + 3$,

$\therefore$ 当 $y = 2x + 3 = 0$ 时, 解得: $x = -\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 直线 $y = 2x + 3$ 与 x 轴的交点坐标为 $(-\frac{3}{2}, 0)$,

$\therefore$ 直线 $y = 2x + 3$ 与直线 $y = 3x - 2m$ 相交于 x 轴上,

$\therefore$ 把 $(-\frac{3}{2}, 0)$ 代入 $y = 3x - 2m$, 得: $3 \times (-\frac{3}{2}) - 2m = 0$,

解得: $m = -\frac{9}{4}$;

故选 D.

6. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ 2x - y = k \end{cases}$ 有实数解, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k \geq 3$;

B. $k = 3$;

C. $k < 3$;

D. $k \leq 3$.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查根据二元二次方程组的解的情况, 求参数的范围, 将二元二次方程组转化为一元二次方程, 进行求解即可.

【详解】解: $\begin{cases} x^2 - y = 2 \text{ ①} \\ 2x - y = k \text{ ②} \end{cases}$,

由②, 得: $y = 2x - k$,

把 $y = 2x - k$ 代入①, 得: $x^2 - 2x + k = 2$, 即: $x^2 - 2x + k - 2 = 0$,

$\therefore$ 方程组有实数解,

$\therefore \Delta = 4 - 4(k - 2) \geq 0$,

$\therefore k \leq 3$;

故选 D.

二、填空题 (共 12 题, 每空 3 分, 满分 36 分)

7. 一次函数 $y = 4x - 2$ 的函数值 y 随自变量 x 值的增大而_____ (填“增大”或“减小”).

【答案】增大

【解析】

【分析】根据一次函数的性质判断出一次函数 $y = 4x - 2$ 中 k 的符号, 再根据一次函数的增减性进行解答即可.

【详解】解：∵一次函数 $y=4x-2$ 中， $k=4>0$ ，

∴函数值 y 随自变量 x 值的增大而增大.

故答案为：增大.

【点睛】此题考查一次函数的增减性与系数 k 的符号的关系.

8. 方程 $x^4 = 16$ 的实数根是_____.

【答案】 $x = \pm 2$

【解析】

【分析】用直接开平方法求解即可.

【详解】∵ $x^4 = 16$ ，

∴ $x^2=4$ ， $x^2=-4$ （舍去），

∴ $x = \pm 2$.

故答案为： $x = \pm 2$.

【点睛】本题考查了直接开平方法解一元二次方程，其解法是将一元二次方程整理成 $x^2 = c(c \geq 0)$ ，然后两边同时开平方即可.

9. 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 不经过第_____象限.

【答案】 三

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图象，根据一次函数的图象和性质，进行判断即可.

【详解】解：∵ $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ， $-\frac{1}{2} < 0, 3 > 0$ ，

∴直线经过一，二，四象限，不经过第三象限；

故答案为：三

10. 已知 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ 是二元二次方程 $ax^2 - 2y^2 = -7$ 的一个解，那么 $a =$ _____.

【答案】 43

【解析】

【分析】本题考查二元二次方程的解，把 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ 代入方程，进行求解即可.

【详解】解：把 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ 代入 $ax^2 - 2y^2 = -7$ ，得： $a \times (-1)^2 - 2 \times 5^2 = -7$ ，

解得： $a = 43$ ；

故答案为：43.

11. 一次函数 $y = \frac{3}{2}x - 1$ ，如果 $y < 0$ ，那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x < \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数与不等式，根据 $y < 0$ 可得 $\frac{3}{2}x - 1 < 0$ ，再解不等式即可.

【详解】解：当 $y < 0$ 时， $\frac{3}{2}x - 1 < 0$ ，

$$\therefore \frac{3}{2}x < 1,$$

$$\text{解得 } x < \frac{2}{3},$$

故答案为： $x < \frac{2}{3}$.

12. 将二元二次方程 $25x^2 - 40xy + 16y^2 = 9$ 化成两个一次方程，那么这两个一次方程分别是_____和_____.

【答案】 ①. $5x - 4y + 3 = 0$ ②. $5x - 4y - 3 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查解二元二次方程，移项后，利用完全平方公式和平方差公式进行因式分解，转化为两个一次方程，即可.

【详解】解： $25x^2 - 40xy + 16y^2 = 9$

$$25x^2 - 40xy + 16y^2 - 9 = 0$$

$$(5x - 4y)^2 - 9 = 0$$

$$(5x - 4y + 3)(5x - 4y - 3) = 0,$$

$$\therefore 5x - 4y + 3 = 0 \text{ 或 } 5x - 4y - 3 = 0;$$

故答案为： $5x - 4y + 3 = 0$ ， $5x - 4y - 3 = 0$.

13. 一次函数 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 的图象与坐标轴所围成的图形的面积是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征. 求线段的长的问题一般是转化为求点的坐标的问题解决. 求得函数与坐标轴的交点, 然后根据三角形的面积公式即可求得三角形的面积.

【详解】 解: 一次函数的关系式是 $y = -\frac{3}{4}x + 3$, 当 $x = 0$ 时, $y = 3$;

当 $y = 0$ 时, $-\frac{3}{4}x + 3 = 0$,

解得: $x = 4$,

其图象与坐标轴围成的三角形面积是: $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

故答案为 6.

14. 要使一次函数 $y = 3x - 2$ 的图象经平移后过点 $(2, 10)$, 需向上平移_____个单位.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数图象的平移, 利用待定系数法求解一次函数的解析式, 掌握一次函数的平移规律是解题的关键. 由直线 $y = 3x - 2$ 向上平移 m 个单位, 其图象经过点 $(2, 10)$, 把 $(2, 10)$ 代入平移后的解析式: $y = 3x - 2 + m$ 即可得到答案.

【详解】 解: 设直线 $y = 3x - 2$ 向上平移 m 个单位, 其图象经过点 $(2, 10)$,

$\therefore$ 点 $(2, 10)$ 在 $y = 3x - 2 + m$ 的图象上,

$\therefore 6 - 2 + m = 10$,

$\therefore m = 6$,

故答案为: 6.

15. 按照解分式方程的一般步骤解关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3} = 2 - \frac{k}{3-x}$ 出现增根 $x = 3$, 那么 k 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的增根、解分式方程, 先将分式方程去分母, 化为整式方程, 再将增根代入计算即可得出答案.

【详解】 解: $\frac{x}{x-3} = 2 - \frac{k}{3-x}$,

去分母得: $x = 2(x-3)x + k$,

将增根 $x = 3$ 代入得: $x = 2(x-3)x + k$,

解得: $k = 3$,

故答案为: 3.

16. 点 A 为直线 $y = -2x + 2$ 上的一点, 且到两坐标轴距离相等, 则 A 点坐标为_____.

【答案】 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (2, -2)

【解析】

【详解】解: 设 A (x, y).

$\because$ 点 A 为直线 $y = -2x + 2$ 上的一点,

$\therefore y = -2x + 2$.

又 $\because$ 点 A 到两坐标轴距离相等,

$\therefore x = y$ 或 $x = -y$.

当 $x = y$ 时, 解得 $x = y = \frac{2}{3}$,

当 $x = -y$ 时, 解得 $y = -2$, $x = 2$.

故 A 点坐标为 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 或 (2, -2).

故答案是: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 或 (2, -2).

17. 用换元法解分式方程 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} = 7$, 若设 $\frac{1}{x} + x = y$, 则方程可化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $y^2 - 3y - 9 = 0$

【解析】

【分析】本题考查换元法解分式方程, 根据 $\frac{1}{x} + x = y$, 得到 $\frac{1}{x^2} + x^2 = y^2 - 2$, 整体代入分式方程中, 转化为整式方程即可.

【详解】解: $\because \frac{1}{x} + x = y$,

$\therefore \left(\frac{1}{x} + x\right)^2 = \frac{1}{x^2} + x^2 + 2 = y^2$,

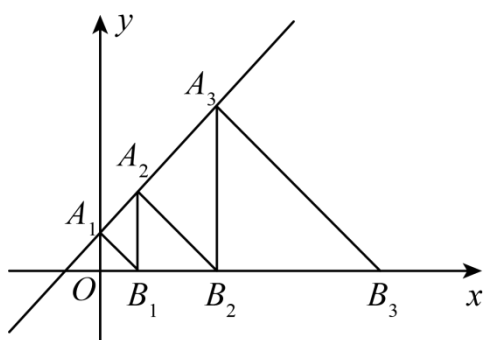
$\therefore \frac{1}{x^2} + x^2 = y^2 - 2$,

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 7,$$

$\therefore$ 方程可化为 $y^2 - 3y - 2 = 7$, 即: $y^2 - 3y - 9 = 0$;

故答案为: $y^2 - 3y - 9 = 0$.

18. 如图, 在直角坐标系中, 等腰直角三角形 A_1B_1O 、 $A_2B_2B_1$ 、 $A_3B_3B_2$ 、 $\cdots$ 、 $A_nB_nB_{n-1}$ 按如图所示的方式放置, 其中点 A_1 、 A_2 、 A_3 、 $\cdots$ 、 A_n 均在一次函数 $y = kx + b$ 的图象上, 点 B_1 、 B_2 、 B_3 、 $\cdots$ 、 B_n 均在 x 轴上. 若点 B_1 的坐标为 $(1, 0)$, 点 B_2 的坐标为 $(3, 0)$, 则点 A_{2025} 的坐标为_____



【答案】 $(2^{2024} - 1, 2^{2024})$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特点, 涉及到的知识点有待定系数法求一次函数解析式, 一次函数图象上点的坐标特征以及等腰直角三角形的性质. 解答该题的难点是找出点 B_n 的坐标的规律. 首先, 根据等腰直角三角形的性质求得点 A_1, A_2 的坐标; 然后, 将点 A_1, A_2 的坐标代入一次函数解析式, 利用待定系数法求得该直线方程是 $y = x + 1$; 最后, 利用等腰直角三角形的性质推知点 $B_n(2^n - 1, 0)$ 的坐标, 即可求得点 A_n 的坐标, 进一步可得答案.

【详解】 解: $\because$ 点 B_1 的坐标为 $(1, 0)$, 点 B_2 的坐标为 $(3, 0)$,

$\therefore OB_1 = 1, OB_2 = 3$, 则 $B_1B_2 = 2$.

$\therefore \triangle A_1B_1O$ 是等腰直角三角形, $\angle A_1OB_1 = 90^\circ$,

$\therefore OA_1 = OB_1 = 1$.

$\therefore$ 点 A_1 的坐标是 $(0, 1)$.

同理，在等腰直角 $\triangle A_2B_2B_1$ 中， $\angle A_2B_1B_2 = 90^\circ$, $A_2B_1 = B_1B_2 = 2$ ，则 $A_2(1, 2)$.

$\therefore$ 点 A_1, A_2 均在一次函数 $y = kx + b$ 的图象上，

$$\therefore \begin{cases} k + b = 2 \\ b = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 该直线方程是 $y = x + 1$.

$\therefore$ 点 A_3, B_2 的横坐标相同，都是 3，

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时， $y = 4$ ，即 $A_3(3, 4)$ ，则 $A_3B_2 = 4$ ，

$\therefore B_3(7, 0)$.

...

$$B_n(2^n - 1, 0),$$

$\therefore$ 当 $x = 2^{n-1} - 1$ 时， $y = 2^{n-1} - 1 + 1 = 2^{n-1}$ ，

即点 A_n 的坐标为 $(2^{n-1} - 1, 2^{n-1})$.

$\therefore A_{2025}$ 的坐标为 $(2^{2024} - 1, 2^{2024})$.

故答案为： $(2^{2024} - 1, 2^{2024})$.

三、简答题（共 3 题，每题 6 分，满分 18 分）

19. 解方程： $6 - 2\sqrt{x-3} = x$.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程. 原方程可变形为 $6 - x = 2\sqrt{x-3}$ ，然后两边平方，即可转化成整式方程求得 x 的值，然后代入方程检验即可. 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法，

【详解】 解：原方程可变形为 $6 - x = 2\sqrt{x-3}$ ，

方程两边平方，得 $(6 - x)^2 = 4(x - 3)$ ，

整理，得 $x^2 - 16x + 48 = 0$ ，

解这个方程，得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 12$ ，

检验：把 $x = 4$ 代入原方程的两边，左边 $= 6 - 2\sqrt{4-3} = 4$ ，右边 $= 4$ ，左边 = 右边，可知 $x = 4$ 是原方程的根，

把 $x=12$ 代入原方程的两边, 左边 $=6-2\sqrt{12-3}=0$, 右边 $=12$, 左边 $\neq$ 右边, 可知 $x=12$ 是增根, 应舍去,

所以, 原方程的根是 $x=4$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} y=x-2 \\ x^2-5xy+6y^2=0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查解方程组, 先将①代入②得: $x^2-5x(x-2)+6(x-2)^2=0$, 再根据因式分解法解一元二次方程, 进而可得出答案

【详解】 解:
$$\begin{cases} y=x-2 \text{ ①} \\ x^2-5xy+6y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

将①代入②得: $x^2-5x(x-2)+6(x-2)^2=0$,

整理得: $x^2-7x+12=0$,

$$(x-3)(x-4)=0,$$

$$\therefore x=3 \text{ 或 } x=4,$$

当 $x=3$ 时, $y=1$,

当 $x=4$ 时, $y=2$,

$$\therefore \text{方程组的解为: } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

21. 解关于 x 的方程: $x(x+4m)=4m(x+1)$.

【答案】 当 $m<0$ 时, 方程无实数根; 当 $m=0$ 时, $x_1=x_2=0$; 当 $m>0$ 时, $x_1=2\sqrt{m}$, $x_2=-2\sqrt{m}$.

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 正确计算是解题的关键. 先移项得: $x^2+4mx=4mx+4m$, 即 $x^2=4m$, 再进行讨论当 $m<0$ 时, 当 $m=0$ 时, 当 $m>0$ 时, 分别求解即可.

【详解】 解: $x(x+4m)=4m(x+1)$

移项可得: $x^2 + 4mx = 4mx + 4m$, 即 $x^2 = 4m$,

当 $m < 0$ 时, $4m < 0$, 因为实数的平方都大于等于 0, 所以此时方程 $x^2 = 4m$ 无实数根;

当 $m = 0$ 时, 方程为 $x^2 = 0$, 解得: $x_1 = x_2 = 0$;

当 $m > 0$ 时, $x^2 = 4m$, 解得: $x_1 = 2\sqrt{m}$, $x_2 = -2\sqrt{m}$;

综上, 当 $m < 0$ 时, 方程无实数根; 当 $m = 0$ 时, $x_1 = x_2 = 0$; 当 $m > 0$ 时, $x_1 = 2\sqrt{m}$, $x_2 = -2\sqrt{m}$.

四、解答题 (共 3 题, 22 题 8 分, 23 题 8 分, 24 题 12 分, 满分 28 分)

22. 小明在普通商场中用 96 元购买了一种商品, 后来他在网上发现完全相同的这一商品在网上购买比普通商场中每件少 2 元, 他用 90 元在网上再次购买这一商品, 比上次在普通商场中多买了 3 件. 问小明在网上购买的这一商品每件几元?

【答案】小明在网上购买的这一商品每件 6 元

【解析】

【分析】设小明在网上购买的这一商品每件 x 元, 小明在普通商场中用 96 元购买了一种商品, 后来他在网上发现完全相同的这一商品在网上购买比普通商场中每件少 2 元, 他用 90 元在网上再次购买这一商品, 比上次在普通商场中多买了 3 件根据此可列方程求解.

【详解】设小明在网上购买的这一商品每件 x 元.

$$\frac{90}{x} - \frac{96}{x+2} = 3,$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0,$$

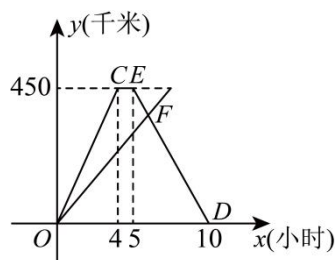
$$x_1 = -10, x_2 = 6.$$

经检验它们都是原方程的根, 但 $x = -10$ 不符合题意.

答: 小明在网上购买的这一商品每件 6 元.

【点睛】本题考查分式方程的应用, 设出价格, 根据件数作为等量关系列方程求解.

23. A、B 两城间的公路长为 450 千米, 甲、乙两车同时从 A 城出发沿这一公路驶向 B 城, 甲车到达 B 城 1 小时后沿原路返回. 如图是它们离 A 城的路程 y (千米) 与行驶时间 x (小时) 之间的函数图像.



(1) 求甲车返回过程中 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出定义域;

(2) 乙车行驶 6 小时与返回的甲车相遇, 求乙车的行驶速度;

(3) 在 (2) 的条件下, 当甲车出发_____小时, 甲乙两车相距 180 千米.

【答案】(1) $y = -90x + 900$, 函数的定义域为 $5 \leq x \leq 10$;

(2) 60 千米/小时

(3) $\frac{24}{7}$ 小时或 $\frac{36}{5}$ 小时或 $\frac{9}{2}$ 小时

【解析】

【分析】此题考查一次函数的实际运用, 利用待定系数法求函数解析式, 以及基本数量关系: 路程 $\div$ 时间=速度, 解答时注意数形结合.

(1) 设出一次函数解析式, 代入图象上的两个点 $(5, 450)$, $(10, 0)$, 即可解答;

(2) 把 $x = 6$ 代入 (1) 中的函数解析式, 求得路程 (甲、乙距 A 城的距离), 进一步求得速度即可解答;

(3) 分三种情况讨论: ①在甲车到达 B 城前, ②在甲车从 B 城返回时, ③甲车到达 B 城后停留 1 小时过程中, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设甲车返回过程中 y 与 x 之间的函数解析式 $y = kx + b$,

$\because$ 图象过 $(5, 450)$, $(10, 0)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 5k + b = 450 \\ 10k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -90 \\ b = 900 \end{cases},$$

$\therefore y = -90x + 900$, 函数的定义域为 $5 \leq x \leq 10$;

【小问 2 详解】

当 $x = 6$ 时, $y = -90 \times 6 + 900 = 360$,

乙车的行驶速度 $\frac{360}{6} = 60$ (千米/小时);

【小问 3 详解】

分三种情况讨论:

①在甲车到达 B 城前, 设甲车出发 t 小时, 即 $0 < t \leq 4$ 时, 甲乙两车相距 180 千米, 此时甲车速度为

$450 \div 4 = 112.5$ (千米 / 小时), 乙车速度为 60 千米 / 小时,

则 $112.5t - 60t = 180$,

解得: $t = \frac{180}{52.5} = \frac{24}{7}$ 小时;

②在甲车从B城返回时, 设甲车出发 t 小时, 即 $5 < t \leq 10$ 时, 甲乙两车相距 180 千米, 乙车行驶的路程为 $60t$ 千米, 甲车离A城的路程为 $-90t + 900$ 千米,

则 $|-90t + 900 - 60t| = 180$,

解得: $t = \frac{24}{5}$ (不合题意, 舍去) 或 $t = \frac{36}{5}$ 小时,

③甲车到达B城后停留1小时过程中, 设甲车出发 t 小时, 即 $4 < t \leq 5$ 时, 甲乙两车相距 180 千米, 乙车行驶的路程为 $60t$ 千米,

则 $450 - 60t = 180$,

解得: $t = \frac{9}{2}$ 小时

综上, 当甲车出发 $\frac{24}{7}$ 小时或 $\frac{36}{5}$ 小时或 $\frac{9}{2}$ 小时, 甲乙两车相距 180 千米.

24. 已知一次函数 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点A、B.

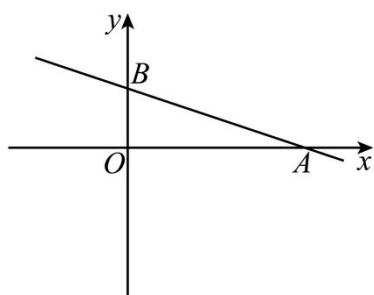


图1

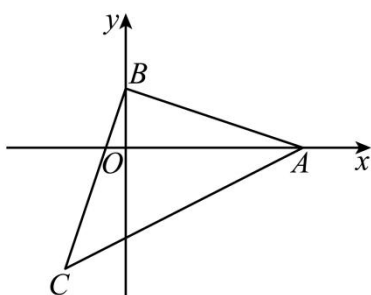


图2

- (1) 求 $\triangle AOB$ 的面积及点O到直线AB的距离;
- (2) 若第三象限存在一点C, 如图2所示, 使得 $BC = BA$, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, 求点C的坐标;
- (3) 在(2)的条件下, 双曲线 $y = \frac{16}{x}$ 图像上有一点M, 满足 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$, 直接写出所有满足条件的点M坐标.

【答案】(1) $6, \frac{3\sqrt{10}}{5}$

(2) $C(-2, -4)$

(3) $M(-8, -2)$ 或 $M(-6, -\frac{8}{3})$ 或 $M(2, 8)$ 或 $M(24, \frac{2}{3})$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与几何的综合应用, 反比例函数与几何的综合应用, 熟练掌握相关知识点, 利

用数形结合的思想进行求解，是解题的关键：

(1) 分别令 $x=0, y=0$ ，求出 A, B 的坐标，三角形的面积公式求出 $\triangle AOB$ 的面积，等积法求出点 O 到直线 AB 的距离即可；

(2) 过点 B 作 x 轴的平行线 DE ，作 $CD \perp DE, AE \perp DE$ ，证明 $\triangle CDB \cong \triangle BEA$ ，进行求解即可；

(3) 根据 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$ ，过点 C 作 AB 的平行线，等距平移，在 AB 的上方作 AB 的平行线，两条平行线与双曲线的交点即为点 M 。

【小问 1 详解】

$$\text{解：} \because y = -\frac{1}{3}x + 2,$$

$$\therefore \text{当 } x=0 \text{ 时, } y=2, \text{ 当 } y=0 \text{ 时, } -\frac{1}{3}x + 2 = 0, \text{ 解得: } x=6,$$

$$\therefore A(6,0), B(0,2),$$

$$\therefore OA=6, OB=2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6,$$

设点 O 到直线 AB 的距离为 h ，

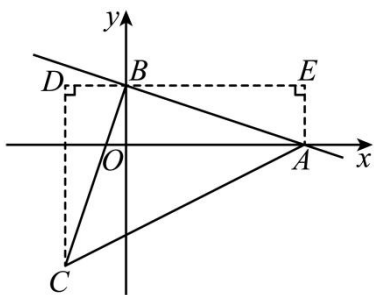
$$\text{则: } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot h = 6,$$

$$\therefore h = \frac{3\sqrt{10}}{5};$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

【小问 2 详解】

过点 B 作 x 轴的平行线 DE ，作 $CD \perp DE, AE \perp DE$ ，



则: $AE = OB = 2, BE = OA = 6, \angle D = \angle E = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DCB = \angle ABE = 90^\circ - \angle CBD,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \triangle CDB \cong \triangle BEA,$$

$$\therefore CD = BE = 6, BD = AE = 2,$$

$$\therefore C(-2, 2-6), \text{ 即: } C(-2, -4);$$

【小问 3 详解】

①过点 C 作 AB 的平行线, 设解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + b$,

把 $C(-2, -4)$ 代入, 得: $-4 = \frac{2}{3} + b$,

$$\therefore b = -\frac{14}{3},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3},$$

$\therefore$ 当点 M 在直线 $y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$ 上时, $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \\ y = \frac{16}{x} \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -8 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -6 \\ y = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

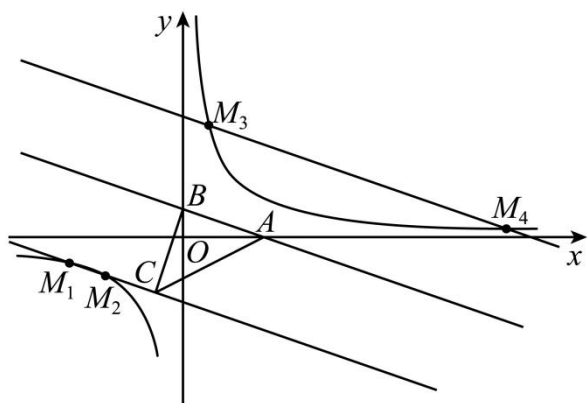
$$\therefore M(-8, -2) \text{ 或 } M\left(-6, -\frac{8}{3}\right);$$

②将直线 AB 向上平移 $2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$ 个单位, 得到直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2 + \frac{20}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}$,

则: 当点 M 在直线 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}$ 上时, $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3} \\ y = \frac{16}{x} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 24 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases},$$

$$\therefore M(2, 8) \text{ 或 } M\left(24, \frac{2}{3}\right);$$



$$\text{综上: } M(-8, -2) \text{ 或 } M\left(-6, -\frac{8}{3}\right) \text{ 或 } M(2, 8) \text{ 或 } M\left(24, \frac{2}{3}\right).$$