

2024 学年初二（下）数学阶段性测试一

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 在下列判断中，错误的是（ ）

A. 方程 $x(x-1)=0$ 是一元二次方程

B. 方程 $xy+5x=0$ 是二元二次方程

C. 方程 $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x}{3}=2$ 是分式方程

D. 方程 $\sqrt{2}x^2-x-1=0$ 是无理方程

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了方程的概念，掌握一元二次方程，分式方程，二元二次方程，无理方程的概念是解题的关键.

根据一元二次方程，分式方程，二元二次方程，无理方程的概念逐项排除即可.

【详解】解：A、方程 $x(x-1)=0$ 是一元二次方程，原选项判断正确，不符合题意；

B、方程 $xy+5x=0$ 是二元二次方程，原选项判断正确，不符合题意；

C、方程 $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x}{3}=2$ 是分式方程，原选项判断正确，不符合题意；

D、方程 $\sqrt{2}x^2-x-1=0$ 是一元二次方程，原选项判断错误，符合题意；

故选：D.

2. 对于二项方程 $ax^n+b=0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)，当 n 为偶数时，已知方程有两个实数根，那么 ab 一定（ ）

A. $ab < 0$

B. $ab > 0$

C. $ab \geq 0$

D. $ab \leq 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据 n 为偶数时，方程有两个实数根，得出 $-\frac{b}{a} \geq 0$ 即可.

【详解】 $ax^n+b=0$,

可得： $x^n = -\frac{b}{a}$,

因为当 n 为偶数时，已知方程有两个实数根，

所以 $-\frac{b}{a} \geq 0$,

所以 $ab \leq 0$,

故选：D.

【点睛】此题考查高次方程的问题，关键是根据 n 为偶数时，方程有两个实数根得出 ab 的范围.

3. 已知一次函数 $y = 3x - 1$ ，则下列判断错误的是 ()

- A. 直线 $y = 3x - 1$ 在 y 轴上的截距为 -1
- B. 直线 $y = 3x - 1$ 不经过第二象限
- C. 直线 $y = 3x - 1$ 在 x 轴上方的点的横坐标的取值范围是 $x > 1$
- D. 该一次函数的函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象经过的象限、一次函数的性质，掌握一次函数的图象与性质是解题的关键. 根据一次函数解析式中 k 、 b 的值可判断选项 A、B、D；令 $y > 0$ ，求得 $x > \frac{1}{3}$ ，则可判断选项 C.

【详解】解：A、当 $x = 0$ 时， $y = -1$ ，直线 $y = 3x - 1$ 在 y 轴上的截距为 -1 ，故原说法正确，
B、直线 $y = 3x - 1$ 经过第一、三、四象限，不经过第二象限，故原说法正确，
C、直线 $y = 3x - 1$ 在 x 轴上方的点，即 $y > 0$ ，则横坐标的取值范围是 $x > \frac{1}{3}$ ，故原说法错误，
D、 $k = 3 > 0$ ，该一次函数的函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，故原说法正确，
故选：C.

4. 已知，等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 AD 的中点，那么四边形 $EFGH$ 一定是 ()

- A. 矩形
- B. 菱形
- C. 正方形
- D. 等腰梯形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定、菱形的判定、三角形中位线的性质等知识，熟练掌握三角形中位线的性质是解决问题的关键. 由题意得 $EF \parallel AC$ ， $GH \parallel AC$ 推出 $EF \parallel HG$ ，同理得出 $HE \parallel GF$ ，即可得出四边形 $EFGH$ 是平行四边形，由中位线的性质得出 $EF = \frac{1}{2}AC$ ， $EH = \frac{1}{2}BD$ ，证得 $EF = EH$ ，即可得出结果.

【详解】解：在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ， $\angle B = \angle C$ ， $BC = CB$ ，
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (SAS)$ ，

$$\therefore AC = BD,$$

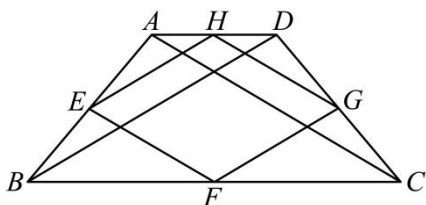
$\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 AD 的中点,

$$\therefore EF \parallel AC, GH \parallel AC,$$

$$\therefore EF \parallel HG,$$

同理: $HE \parallel GF$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,



$\because E$ 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 AD 的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC, EH = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because AC = BD,$$

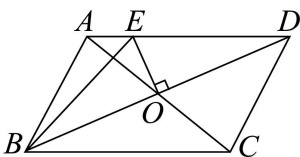
$$\therefore EF = EH,$$

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是菱形;

故选: B.

5. 如图, 在周长为 20 cm 的 $\square ABCD$ 中, $AB \neq AD$, AC 、 BD 相交于点 O , $OE \perp BD$ 交 AD 于 E ,

则 $\triangle ABE$ 的周长为 ()



A. 10 cm

B. 20 cm

C. 5 cm

D. 15 cm

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 线段垂直平分线的性质, 掌握知识点的应用是解题的关键.

由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则 $OB = OD$, 从而得出 OE 垂直平分 BD , 故有 $BE = DE$, 所以 $\triangle ABE$ 的周长为 $AB + AD$, 再由 $\square ABCD$ 为 20cm 即可求解.

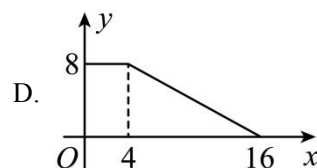
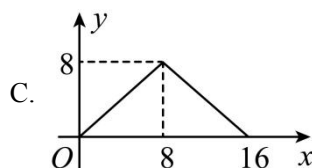
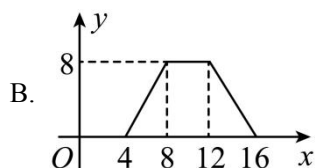
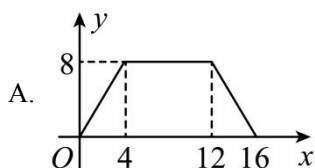
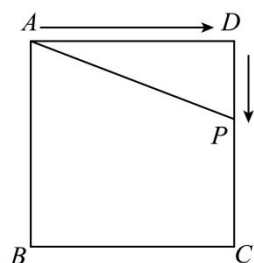
【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OB = OD,$$

$\because OE \perp BD$,
 $\therefore BE = DE$,
 $\therefore \triangle ABE$ 的周长 $AB + AE + BE$
 $= AB + AE + DE$
 $= AB + AD$,
 $\because \square ABCD$ 为 20cm ,
 $\therefore AD + BD = 10\text{cm}$,
 $\therefore \triangle ABE$ 的周长为 10cm ,

故选: A .

6. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, P 为正方形边上一动点, 运动路线是 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, 设 P 点经过的路程为 x , 以点 A 、 P 、 D 为顶点的三角形的面积是 y . 则下列图象能大致反映 y 与 x 的函数关系的是()



【答案】B

【解析】

【分析】根据特殊点和三角形的面积公式解答即可.

【详解】解: 由题意可知, P 点在 AD 段时面积为零, 在 DC 段时面积 y 由 0 逐渐增大到 8, 在 CB 段因为底和高不变所以面积 y 不变, 在 BA 段时面积 y 逐渐减小为 0,

故选: B.

【点睛】本题考查动点问题的函数图象识别, 根据动点 P 的位置正确得出三角形的面积变化情况是解答的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 如果将一次函数 $y = 1 - 3x$ 的图象沿 y 轴向上平移 5 个单位, 那么平移后所得图象的函数解析式为_____.

【答案】 $y = -3x + 6$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的平移，掌握直线平移的规律是解题的关键.

根据“上加下减”的规律写出函数解析式即可.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = 1 - 3x$ 的图象沿 y 轴向上平移 5 个单位，

$\therefore$ 平移后所得图象的函数解析式为 $y = 1 - 3x + 5 = -3x + 6$ ，

故答案为： $y = -3x + 6$.

8. 已知一次函数 $y = (m+1)x - 2$ 图像过点 $A(-1, -4)$ ，那么当 x 的值增大时，函数 y 的值随之_____ . (填“增大”或填“减小”)

【答案】 增大

【解析】

【分析】 把点 A 的坐标代入函数解析式求得 m 的值，然后结合 $(m+1)$ 的符号确定该函数图象的增减性，由函数图象的增减性解答.

【详解】 解：把 $A(-1, -4)$ 代入得 $-4 = -(m+1) - 2$ ，

解得： $m = 1$ ，

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = 2x - 2$ ，

即 x 的值增大时，函数 y 的值随之增大，

故答案为： 增大.

9. 在方程 $x^2 + \frac{3}{x^2 - 3x} = 3x - 4$ 中，如果设 $y = x^2 - 3x$ ，那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____ .

【答案】 $y^2 + 4y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 此题考查了换元法解分式方程的能力，用换元法解一些复杂的分式方程是比较简单的一种方法，根据方程特点设出相应未知数，再将分式方程化为整式方程. 先将原方程中 $3x$ 移项，化为分式方程，再变形为整式方程即可.

【详解】 解： $\because x^2 + \frac{1}{x^2 - 3x} = 3x - 4$ ，

$\therefore x^2 - 3x + \frac{1}{x^2 - 3x} = -4$ ，

设 $y = x^2 - 3x$,

$$\therefore y + \frac{1}{y} = -4,$$

$\therefore$ 原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 + 4y + 1 = 0$,

故答案为: $y^2 + 4y + 1 = 0$.

10. 方程 $2x^3 + 54 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了立方根的性质, 熟练掌握立方根的性质是解题的关键. 先将方程 $2x^3 + 54 = 0$ 变形为 $x^3 = -27$, 再利用立方根的性质, 即可求解.

【详解】 解: $\because 2x^3 + 54 = 0$,

$$\therefore x^3 = -27,$$

解得: $x = -3$.

故答案为: $x = -3$.

11. 方程 $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘法对方程 $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的左边进行计算, 然后两边同时平方可得 $x^2 - 4 = 0$; 接下来, 移项后利用直接开方法解这个一元二次方程得到方程的根, 然后代入原方程中检验即可确定方程的根

【详解】 $\because \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2} = 0$,

$$\sqrt{(x+2)(x-2)} = 0,$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0,$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4,$$

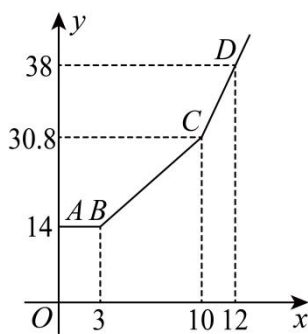
$$x = \pm 2$$

当 $x=-2$ 时, $\sqrt{x-2}$ 无意义

故方程 $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的根是 $x=2$

【点睛】此题考查无理方程,掌握无理方程的求解方法是关键;

12. 如果乘坐出租车所付款金额 y (元) 与乘坐距离 x (千米) 之间的函数图象由线段 AB 、线段 BC 和射线 CD 组成 (如图所示), 那么乘坐该出租车 9 (千米) 需要支付的金额为_____元.



【答案】 28.4

【解析】

【分析】根据图象可知, 9 (千米) 处于图中 BC 段, 用待定系数法求出线段 BC 的解析式, 然后令 $x=8$ 求出相应的 y 的值即可.

【详解】解: 根据图象可知 $B(3,14), C(10,30.8)$, 9 (千米) 处于图中 BC 段,

设线段 BC 的解析式为 $y=kx+b(k \neq 0)$

将 $B(3,14), C(10,30.8)$ 代入解析式中得

$$\begin{cases} 3k+b=14 \\ 10k+b=30.8 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k=2.4 \\ b=6.8 \end{cases}$$

$\therefore$ 线段 BC 解析式为 $y=2.4x+6.8(3 \leq x \leq 10)$,

当 $x=9$ 时, $y=2.4 \times 9 + 6.8 = 28.4$,

$\therefore$ 乘坐该出租车 9 (千米) 需要支付的金额为 28.4 元.

故答案为: 28.4

【点睛】本题主要考查一次函数的实际应用, 掌握待定系数法是解题的关键.

13. 如果一个多边形的内角和是外角和的 2 倍, 那么这个多边形是_____边形.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角与外角. 根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 和外角和定理列出方程, 然后求解即可.

【详解】 解: 设多边形的边数为 n ,

由题意得, $(n-2) \cdot 180^\circ = 2 \times 360^\circ$,

解得 $n = 6$.

故这个多边形的边数是 6.

故答案为: 6.

14. 已知菱形一组对角的和为 240° , 较短的一条对角线的长度为 4, 那么这个菱形的面积为_____.

【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先画出图形, 根据已知条件得出 $\angle BAD = \frac{1}{2} \times 240^\circ = 120^\circ$, $AC = 4$, 根据菱形的性质得出 $BA = BC$, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, $AO = \frac{1}{2} AC = 2$, $BO = DO = \frac{1}{2} BD$, 证明 ABC 是等边三角形, 得出 $AB = AC = 4$, 根据勾股定理得出 $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, 根据 $S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$, 据此即可解答.

【详解】 解: 由题意得, $\angle BAD = \frac{1}{2} \times 240^\circ = 120^\circ$, $AC = 4$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore BA = BC$, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, $AO = \frac{1}{2} AC = 2$, $BO = DO = \frac{1}{2} BD$,

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore ABC$ 是等边三角形,

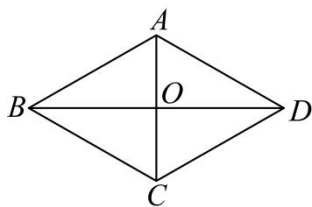
$\therefore AB = AC = 4$,

$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

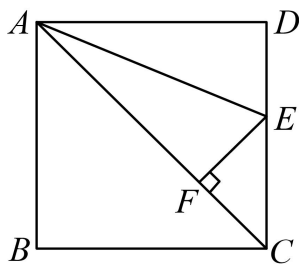
$\therefore BD = 2BO = 4\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

故答案为: $8\sqrt{3}$.



15. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 在边 DC 上, AE 平分 $\angle DAC$, $EF \perp AC$, 点 F 为垂足, 那么 $FC = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】 根据正方形的性质和已知条件可求得 AF , AC 的长, 从而不难得到 FC 的长.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = AD = CD = 1, \quad \angle D = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle DAC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FAE.$$

$$\because EF \perp AC \text{ 交于 } F,$$

$$\therefore \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle D.$$

$$\because AE = AE,$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle FAE,$$

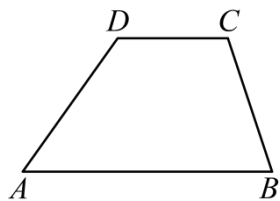
$$\therefore AF = AD = 1,$$

$$\therefore FC = AC - AF = \sqrt{2} - 1,$$

故答案为 $\sqrt{2} - 1$;

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质、勾股定理、角平分线的性质、以及全等三角形的判定与性质; 熟练掌握正方形的性质, 求出 $AF = AD$ 是解决问题的关键.

16. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $BC + CD = AB$, 设 $\angle A = x^\circ$, $\angle B = y^\circ$, 那么 y 关于 x 的函数关系式是_____.



【答案】 $y = 180 - 2x$

【解析】

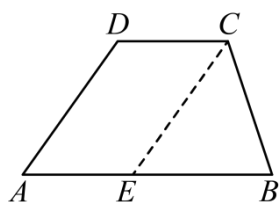
【分析】 本题考查平行四边形的判定及性质, 函数的关系式, 等边对等角, 在 AB 上截取 $AE = CD$, 可知四边形 $ADCE$ 是平行四边形, 得 $AD \parallel CE$, 则 $\angle A = \angle BEC = x^\circ$, 再结合 $BC + CD = AB$, 可得 $BC = BE$, 进而可知 $\angle BCE = \angle BEC = x^\circ$, 再根据三角形内角和定理即可求解.

【详解】 解: 在 AB 上截取 $AE = CD$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel CE$, 则 $\angle A = \angle BEC = x^\circ$,



$\therefore BC + CD = AB$, $AE + BE = AB$,

$\therefore BC = BE$,

$\therefore \angle BCE = \angle BEC = x^\circ$,

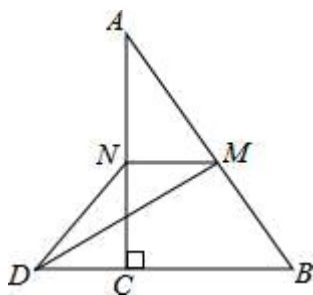
由三角形内角和定理可得: $\angle BEC + \angle BCE + \angle B = 180^\circ$,

即: $x + x + y = 180$,

$\therefore y = 180 - 2x$,

故答案为: $y = 180 - 2x$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点, 延长 BC 至点 D , 使 $BC = 2CD$, 连接 DM 、 DN 、 MN . 若 $AB = 6$, 则 $DN =$ _____.

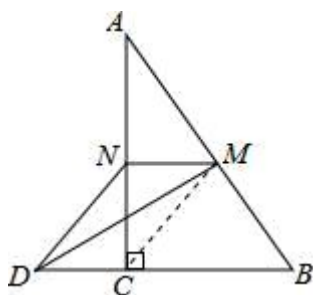


【答案】3

【解析】

【分析】连接 CM ，根据直角三角形的性质求出 CM ，证明四边形 $DCMN$ 是平行四边形，根据平行四边形的性质解答.

【详解】解：连接 CM ，



$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， M 是 AB 的中点，

$$\therefore CM = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$\because M$ 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点，

$$\therefore MN = \frac{1}{2} BC, \quad MN \parallel BC,$$

$$\because BC = 2CD,$$

$$\therefore MN = CD, \quad \text{又 } MN \parallel BC,$$

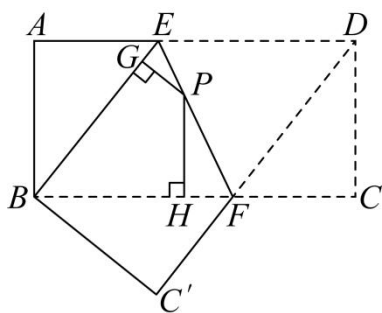
$\therefore$ 四边形 $DCMN$ 是平行四边形，

$$\therefore DN = CM = 3,$$

故答案为 3.

【点睛】本题考查的是三角形中位线定理、直角三角形的性质，掌握三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半是解题的关键.

18. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 D 落在点 B 上，点 C 落在点 C' 处，点 P 为折痕 EF 上的任一点，过点 P 作 $PG \perp BE$ 、 $PH \perp BC$ ，垂足分别为 G 、 H ，如果 $AD = 8$ ， $CF = 3$ ，那么 $PG + PH$ 的值为 _____.



【答案】4

【解析】

【分析】先证 $BE = BF$ ，过点 E 作 $EQ \perp BF$ ，垂足为 Q ，证四边形 $EQHR$ 是矩形，得 $RH = EQ = 4$ ，根据角平分线的性质得到 $PG = PR$ 求出 $PG + PH = RH = 4$ 。

【详解】解：过点 E 作 $EQ \perp BC$ ，垂足为 Q ，如图，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD = BC$ ， $\angle C = \angle ADC = 90^\circ$ 。

$\because AD = 8$ ， $CF = 3$ ，

$\therefore BF = BC - CF = AD - CF = 5$ 。

由折叠可得： $DF = BF$ ， $\angle BEF = \angle DEF$ 。

$\therefore DF = 5$ 。

$\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore DC = \sqrt{DF^2 - CF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 。

$\because EQ \perp BC$ ， $\angle C = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EQC = 90^\circ = \angle C = \angle ADC$ ，

$\therefore$ 四边形 $EQCD$ 是矩形，

$\therefore EQ = DC = 4$ 。

延长 HP 交 AD 于点 R ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DRH = \angle RHB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ERH = 90^\circ = \angle RHQ = \angle EQH$ ，

$\therefore$ 四边形 $EQHR$ 是矩形，

$\therefore RH = EQ = 4$

【详解】解： $ax-1=4x-2$,

$$(4-a)x=1,$$

当 $4-a \neq 0$ 时, $x = \frac{1}{4-a}$,

当 $4-a=0$ 时, 方程无解.

21. 解方程: $\frac{7x}{x^2-5x-6} = \frac{1}{x+1} + 2.$

【答案】 $x=9$.

【解析】

【分析】 此题考查了解分式方程, 熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 然后检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: $\frac{7x}{x^2-5x-6} = \frac{1}{x+1} + 2$

$$\frac{7x}{(x+1)(x-6)} = \frac{1}{x+1} + 2$$

$$7x = x-6 + 2(x+1)(x-6)$$

$$7x = x-6 + 2(x^2-5x-6)$$

$$7x = x-6 + 2x^2-10x-12$$

$$-2x^2 + 7x - x + 10x + 18 = 0$$

$$-2x^2 + 16x + 18 = 0$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0,$$

解得: $x_1 = 9$, $x_2 = -1$,

经检验: $x=9$ 是原分式方程的解,

$\therefore$ 原分式方程的解为 $x=9$.

22. 解方程: $2\sqrt{x+5} + 10 = x.$

【答案】 $x=20$

【解析】

【分析】 根据二次根式和乘方的性质, 得一元二次方程、一元一次不等式, 通过求解即可得到答案.

【详解】 $\because 2\sqrt{x+5}+10=x$

$\therefore 2\sqrt{x+5}=x-10$

$\therefore 4(x+5)=(x-10)^2$, 且 $x+5 \geq 0$, $x-10 \geq 0$

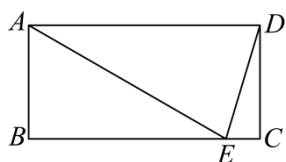
$\therefore (x-4)(x-20)=0$, $x \geq -5$, $x \geq 10$

$\therefore x_1=4$, $x_2=20$, $x \geq -5$, $x \geq 10$

$\therefore x=20$ 为方程的解.

【点睛】本题考查了二次根式、乘方、一元二次方程、一元一次不等式的知识；解题的关键是熟练掌握二次根式、乘方、一元二次方程、一元一次不等式的性质，从而完成求解.

23. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$, 边 BC 上有一点 E , 连接 AE , DE , $AE=AD$.



(1) 求 EC 的长;

(2) 求 $\angle CDE$ 的度数.

【答案】(1) $(8-4\sqrt{3})\text{cm}$;

(2) 15° .

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 熟练掌握矩形的性质是解题的关键.

(1) 根据矩形的性质得到 $AD=BC$, $\angle B=90^\circ$, 根据勾股定理即可得到结论;

(2) 根据直角三角形的性质得到 $\angle AEB=30^\circ$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle ADE=\angle AED$, 根据平行线的性质得到 $\angle ADE=\angle DEC$, 求得 $\angle AED=\angle DEC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AEB)=75^\circ$, 根据三角形的内角和定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD=BC=8\text{cm}$, $\angle B=90^\circ$.

$\because AE=AD$,

$\therefore AE=8\text{cm}$,

$\therefore BE=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}(\text{cm})$,

$$\therefore CE = BC - BE = (8 - 4\sqrt{3})\text{cm};$$

【小问2详解】

解: $\because \angle B = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $AE = 8\text{cm}$,

$$\therefore \angle AEB = 30^\circ.$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

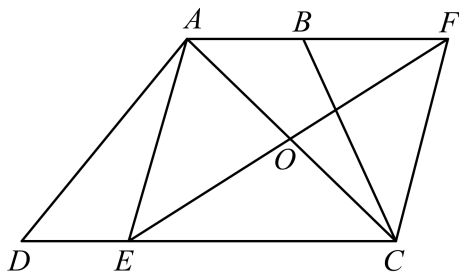
$$\therefore \angle ADE = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle DEC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle AEB) = 75^\circ.$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

24. 如图,已知四边形ABCD中,点E是CD上的点(不与CD的中点重合), $DE=AB$, $\angle BAC=\angle D$, $AD=AC$



(1)求证:四边形AECB是等腰梯形;

(2)点F是AB边延长线上一点,且 $BC=CF$.联结CF、EF,若 $AC \perp EF$ 求证: 四边形AECF是菱形.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 由 $AD=AC$, 证得 $\angle D = \angle ACD$, 由 $\angle BAC = \angle D$, 推出 $\angle ACD = \angle BAC$, 由平行线的判定推出 $AB \parallel DC$, 根据全等三角形的判定证得 $\triangle ADE \cong \triangle CAB$, 即可证得 $AE=BC$, 由等腰梯形的判定即可证得结论;

(2) 首先证明 $\triangle AEC \cong \triangle CFA$, 通过全等三角形的性质得到 $AF=CE$, 推出四边形AECF是平行四边形, 然后由菱形的判定定理即可得到结论.

【详解】证明: (1) $\because AD=AC$,

$$\therefore \angle D = \angle ACD,$$

$$\because \angle BAC = \angle D,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BAC,$$

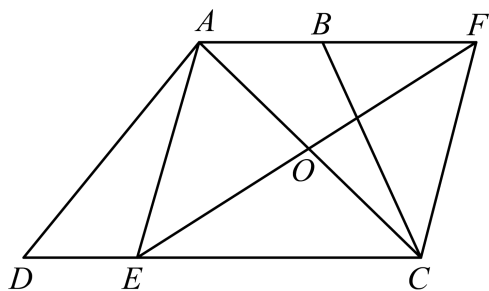
$\therefore AB \parallel DC$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CAB$ 中,
$$\begin{cases} DE = AB \\ \angle D = \angle BAC \\ AD = AC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CAB$ (SAS),

$\therefore AE = BC$,

$\therefore$ 四边形 AECB 是等腰梯形;



(2) 由 (1) 得 $AE = BC$, $\angle AEC = \angle BCE$, $AB \parallel EC$,

$\therefore \angle FBC = \angle BCE$, $\angle FAC = \angle ACE$

$\therefore BC = CF$,

$\therefore AE = CF$, $\angle FBC = \angle BFC$,

$\therefore \angle BFC = \angle AEC$,

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle CFA$ 中,
$$\begin{cases} \angle AEC = \angle AFC \\ \angle ACE = \angle FAC \\ AE = CF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle CFA$ (AAS),

$\therefore AF = CE$,

$\therefore$ 四边形 AECF 是平行四边形,

$\therefore AC \perp EF$,

$\therefore$ 平行四边形 AECF 是菱形.

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 等腰梯形的判定和性质, 平行四边形的判定和性质, 菱形的判定, 熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

25. 已知: 直线 l_1 经过点 $A(-5, -6)$ 且与直线 $l_2: y = -\frac{3}{2}x + 6$ 平行, 直线 l_2 与 x 轴、 y 轴分别交于点 B , C

(1) 求直线 l_1 的表达式及其与 x 轴的交点 D 的坐标;

(2) 判断四边形 $ABCD$ 是什么四边形? 并证明你的结论:

(3)若点 E 是直线 AB 上一点,平面内存在一点 F,使得四边形 CBEF 是正方形,求点 E 的坐标. 请直接写出答案.

【答案】 (1) 直线 l_1 的表达式: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{27}{2}$, D 的坐标为: $(-9, 0)$; (2) 四边形 ABCD 是矩形, 证明见解析; (3) $E_1(-2, -4)$, $E_2(10, 4)$.

【解析】

【分析】 (1) 根据直线 l_1 与直线 l_2 平行, 可设直线 l_1 的表达式为: $y = -\frac{3}{2}x + b$, 代入 A $(-5, -6)$ 求出直线 l_1 的表达式和点 D 的坐标即可;

(2) 首先根据题意求出点 B、C 的坐标, 利用两点间距离公式求出 AD, BC, AB, BD, 根据 $AD = BC$, $AD \parallel BC$ 先判定四边形 ABCD 是平行四边形, 再利用勾股定理逆定理证明 $\angle DAB = 90^\circ$ 即可;

(3) 求出直线 AB 的解析式, 根据正方形的性质可得 $EB = BC = 2\sqrt{13}$, 根据两点间距离公式列方程求解, 即可得到相应的点 E 的坐标.

【详解】 解: (1) 设直线 l_1 的表达式为: $y = -\frac{3}{2}x + b$,

$\because$ 直线 l_1 经过点 A $(-5, -6)$,

$$\therefore -6 = -\frac{3}{2} \times (-5) + b, \text{ 解得 } b = -\frac{27}{2},$$

$$\text{即直线 } l_1 \text{ 的表达式是 } y = -\frac{3}{2}x - \frac{27}{2},$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } 0 = -\frac{3}{2}x - \frac{27}{2}, \text{ 解得 } x = -9,$$

即点 D 的坐标为 $(-9, 0)$;

(2) 四边形 ABCD 是矩形,

证明: $\because$ 直线 $l_2: y = -\frac{3}{2}x + 6$, 直线 l_2 与 x 轴、y 轴分别交于点 B、C 两点,

$\therefore$ 点 B $(4, 0)$, 点 C $(0, 6)$,

$\because$ 点 A $(-5, -6)$, 点 D $(-9, 0)$,

$$\therefore AD = \sqrt{[-5 - (-9)]^2 + (-6 - 0)^2} = 2\sqrt{13}, \quad BC = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 6)^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore AB = \sqrt{(-5 - 4)^2 + (-6 - 0)^2} = 3\sqrt{13}, \quad BD = 4 - (-9) = 13, \quad AD = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore AB^2 + AD^2 = (3\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{13})^2 = 13^2 = BD^2,$$

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ,$$

∴ 平行四边形 ABCD 是矩形;

(3) $E_1(-2, -4)$, $E_2(10, 4)$,

∴ 点 A $(-5, -6)$, 点 B $(4, 0)$,

设直线 A、B 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则 } \begin{cases} -5k + b = -6 \\ 4k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

即直线 AB 的解析式为 $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$,

∴ 点 E 在直线 AB 上,

∴ 设点 E 的坐标为 $(a, \frac{2}{3}a - \frac{8}{3})$,

∴ 四边形 CBEF 是正方形, 点 B $(4, 0)$, 点 C $(0, 6)$,

∴ $EB = BC = 2\sqrt{13}$,

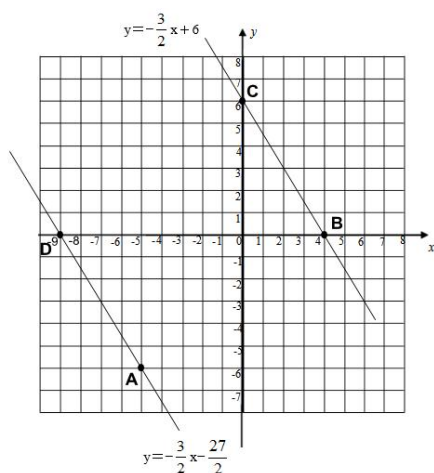
$$\therefore \sqrt{(a-4)^2 + (\frac{2}{3}a - \frac{8}{3} - 0)^2} = 2\sqrt{13},$$

解得: $a = -2$ 或 $a = 10$,

当 $a = -2$ 时, $\frac{2}{3}a - \frac{8}{3} = -4$,

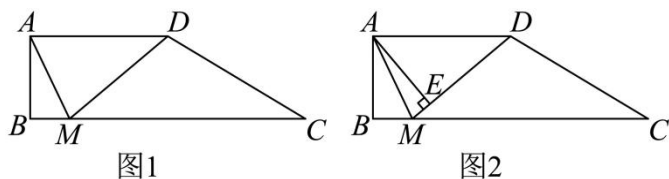
当 $a = 10$ 时, $\frac{2}{3}a - \frac{8}{3} = 4$,

∴ 点 $E_1(-2, -4)$, $E_2(10, 4)$.



【点睛】 本题考查一次函数的性质、正方形的性质、勾股定理、两直线平行的特点以及两点间距离公式, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用数形结合的思想解答.

26. 已知, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 10$, $AD = 5$, M 是 BC 边上的任意一点, 连接 DM , 连接 AM .



- (1) 若 AM 平分 $\angle BMD$, 求 BM 的长;
 (2) 过点 A 作 $AE \perp DM$, 交 DM 所在直线于点 E .

① 设 $BM = x$, $AE = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式;

② 连接 BE , 当点 E 是 DM 的中点时, 求 BE 的长.

【答案】 (1) 满足条件的 BM 的值为 1 或 9;

(2) ① $y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34}$; ② $BE = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

【解析】

【分析】 (1) 作 $DH \perp BC$ 于 H , 则四边形 $ABHD$ 是矩形, 则 $AD = BH = 5$, $AB = DH = 3$, 分两种情形求解即可解决问题;

(1) ① 作 $MH \perp AD$ 于 H 利用面积法构建函数关系式即可;

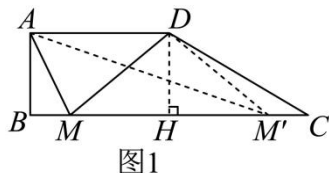
② 延长 AE 交 BC 于点 N , 证 $\triangle ADE \cong \triangle NME$, 得 $MN = AD = 5$, 再由 AE 垂直平分 DM , 知

$AM = AD = 5$, 又 $AB = 3$, 则 $BM = 4$, 据此得 $BN = 9$, $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = 3\sqrt{10}$, 根据 $BE = \frac{1}{2}AN$

可得答案.

【小问 1 详解】

解: 如图 1 中, 作 $DH \perp BC$ 于 H , 则四边形 $ABHD$ 是矩形,



$$\therefore AD = BH = 5, AB = DH = 3,$$

当 MA 平分 $\angle DMB$ 时,

$$\therefore \angle AMB = \angle AMD = \angle DAM,$$

$$\therefore DA = DM = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle DMH$ 中, $DM = AD = 5$, $DH = 3$,

$$\therefore MH = \sqrt{DM^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BM = BH - MH = 1;$$

当 AM' 平分 $\angle BM'D$ 时, 同法可证: $DA = DM'$, $HM' = 4$,

$$\therefore BM' = BH + HM' = 9;$$

综上所述, 满足条件的 BM 的值为 1 或 9;

【小问 2 详解】

解: ① 如图 2 中, 作 $MH \perp AD$ 于 H ,

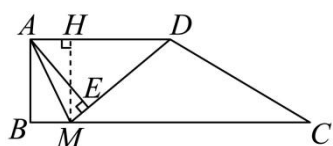


图2

在 $\text{Rt}\triangle DMH$ 中, $DM = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 34}$,

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot AE,$$

$$\therefore 5 \times 3 = y \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 34},$$

$$\therefore y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34};$$

② 如图 3, 延长 AE 交 BC 于点 N ,

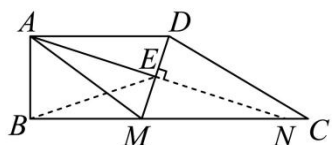


图3

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle MNE, \quad \angle ADE = \angle NME,$$

$\therefore E$ 是 DM 中点,

$$\therefore DE = ME,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle NME \text{ (AAS)},$$

$$\therefore MN = AD = 5,$$

$\therefore AE$ 垂直平分 DM ,

$$\therefore AM = AD = 5,$$

$$\because AB = 3,$$

$$\therefore BM = 4,$$

$$\therefore BN = 9,$$

$$\therefore AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AN = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定和性质，勾股定理，三角形的面积，函数解析式，垂直平分线的性质，全等三角形的判定与性质等知识，正确添加常用辅助线，构造直角三角形及掌握知识点的应用是解题的关键.