

2024-2025 学年八年级数学下学期第三次月考卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版八年级数学下册第 20~22.6 章。
5. 难度系数: 0.65。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 若点 $A(2, a)$ 、 $B(3, b)$ 在直线 $y = -x + 1$ 图像上, 则 ()

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. 不能确定

【答案】A

【详解】解: $\because k = -1 < 0$,

$\therefore y$ 将随 x 的增大而减小,

$\because 2 < 3$,

$\therefore a > b$.

故选: A.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. $\frac{x^2-1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 是分式方程 B. $x^2 + 3y = 1$ 是二元二次方程
C. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 是无理方程 D. $x^2 - 2x = 0$ 是二项方程

【答案】B

【详解】解: A、 $\frac{x^2-1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 为一元二次方程, 所以 A 选项的说法错误;

B、 $x^2 + 3y = 1$ 为二元二次方程, 所以 B 选项的说法正确;

C、 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 是一元二次方程, 所以 C 选项的说法错误;

D、 $x^2 - 2x = 0$ 是一元二次方程，所以 D 选项的说法错误.

故选: B.

3. 若 $ac < 0, ab > 0$, 则一次函数 $y = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$ 的图象不经过第 () 象限

A. 一

B. 二

C. 三

D. 四

【答案】A

【详解】解: $\because ac < 0, ab > 0$,

$\therefore a, c$ 异号, a, b 同号,

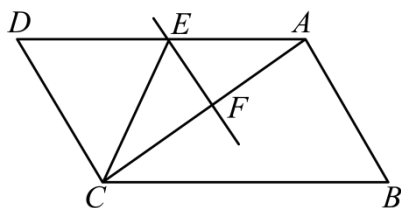
$\therefore b, c$ 异号,

$\therefore \frac{a}{c} < 0, \frac{b}{c} < 0$,

$\therefore y = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$ 的图象经过第二、三、四象限, 不过第一象限,

故选: A.

4. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 10$, AC 的垂直平分线交 AD 于点 E , 则 $\triangle CDE$ 的周长是 ()



A. 9

B. 10

C. 13

D. 14

【答案】D

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = 4$, $BC = 10$,

$\therefore CD = AB = 4$, $AD = BC = 10$,

$\because AC$ 的垂直平分线交 AD 于点 E ,

$\therefore CE = AE$,

$\therefore DE + CE = DE + AE = AD = 10$,

$\therefore CD + DE + CE = 4 + 10 = 14$,

$\therefore \triangle CDE$ 的周长是 14,

故选: D.

5. 下列方程中, 在实数范围内有解的是 ()

A. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

B. $\sqrt{x-1} + 2 = 0$

C. $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = 1$

D. $\sqrt{x-1} = -x$

【答案】C

【详解】解： $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$,

方程两边同乘以 $(x-1)$ ，得 $x=1$ ，

经检验， $x=1$ 不是分式方程的解，

所以方程无解，选项 A 不符合题意；

$\sqrt{x-1} + 2 = 0$ ，

移项，得 $\sqrt{x-1} = -2$ ，

两边平方，得 $x-1=4$ ，

解得 $x=5$ ，

经检验，当 $x=5$ 时， $\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{5-1} + 2 = 4 \neq 0$ ，

所以方程无解，选项 B 不符合题意；

$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = 1$ ，

方程两边同乘以 $(x+1)(x-1)$ ，得 $2(x+1) - 3(x-1) = (x+1)(x-1)$ ，

去括号，得 $2x+2-3x+3 = x^2-1$ ，

移项、合并同类项，得 $x^2+x-6=0$ ，

因式分解，得 $(x-2)(x+3)=0$ ，

解得 $x=2$ 或 $x=-3$ ，

经检验， $x=2$ 和 $x=-3$ 都是分式方程的解，选项 C 符合题意；

$\sqrt{x-1} = -x$ ，

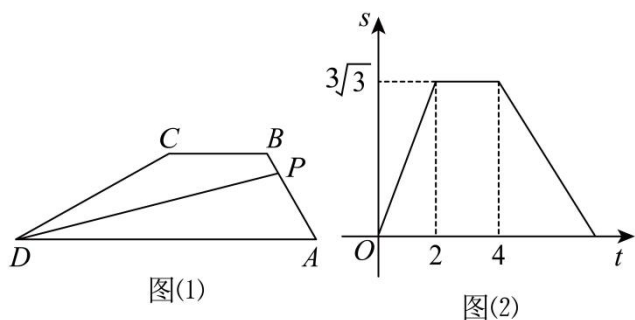
两边平方，得 $x-1=x^2$ ，

移项，得 $x^2-x+1=0$ ，这个方程根的判别式为 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ，方程没有实数根，

所以原方程无解，选项 D 不符合题意；

故选：C.

6. 如图(1)在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，动点 P 从 A 点出发，以 1cm/s 的速度沿着 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的方向不停移动，直到点 P 到达点 D 后才停止. 已知 $\triangle PAD$ 的面积 S (单位： cm^2) 与点 P 移动的时间 t (单位： s) 的函数关系如图 (2) 所示，则点 P 从开始移动到停止移动一共用了 () s .



A. 6

B. 7

C. $4+3\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】D

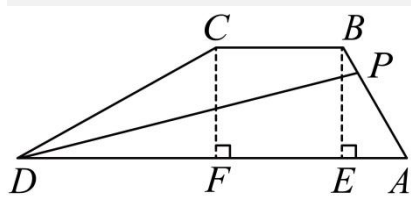
【详解】解：由图（2）可知， t 在2到4秒时， $\triangle PAD$ 的面积不发生变化，

$\therefore$ 在 AB 上运动的时间是2秒，在 BC 上运动的时间是 $4-2=2$ （秒），

$\therefore$ 动点 P 的运动速度是 1cm/s ，

$\therefore AB=2\text{cm}$ ， $BC=2\text{cm}$ ，

如图，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F ，



$\therefore \angle BEF = \angle CFE = \angle BEA = \angle DFC = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BEF + \angle CBE = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BEF = \angle CFE = \angle CBE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是矩形，

$\therefore BE = CF$ ， $BC = EF = 2\text{cm}$ ，

$\therefore \angle A = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE = 30^\circ$ ，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 1\text{cm}$ ，

$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}(\text{cm})$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times AD \times BE = 3\sqrt{3}$ ，即 $\frac{1}{2} \times AD \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore AD = 6\text{cm}$ ，

$$\therefore DF = AD - AE - EF = 6 - 1 - 2 = 3(\text{cm}),$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDF \text{ 中, } CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore \text{动点 } P \text{ 运动的总路程为 } AB + BC + CD = 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore \text{动点 } P \text{ 的运动速度是 } 1\text{cm/s},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 从开始移动到停止移动一共用了 } (4 + 2\sqrt{3}) \div 1 = 4 + 2\sqrt{3} \text{ (秒)},$$

故选: D.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 方程 $\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{2x-1} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{1}{2}$

【详解】解: 由题意得,
$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } x \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{2x-1} = 0,$$

$$\therefore 1+x=0 \text{ 或 } 2x-1=0,$$

$$\text{解得: } x=-1 \text{ (舍去) 或 } x=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{方程的解是 } x=\frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } x=\frac{1}{2}.$$

8. 如果方程 $\frac{3-x}{x-2} = \frac{m}{x-2}$ 有增根, 那么 m 的值等于_____.

【答案】 1

【详解】方程两边都乘 $(x-2)$, 得 $3-x=m$,

$\therefore$ 原方程有增根, .

$$\therefore \text{最简公分母 } x-2=0, \text{ 解得 } x=2, .$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } m=1. .$$

故答案为 1.

9. 用换元法解分式方程 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} = 7$, 若设 $\frac{1}{x} + x = y$, 则方程可化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $y^2 - 3y - 9 = 0$

【详解】解: $\because \frac{1}{x} + x = y$,

$$\therefore \left(\frac{1}{x} + x\right)^2 = \frac{1}{x^2} + x^2 + 2 = y,$$

$$\therefore \frac{1}{x^2} + x^2 = y^2 - 2,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 7,$$

$\therefore$ 方程可化为 $y^2 - 3y - 2 = 7$, 即: $y^2 - 3y - 9 = 0$;

故答案为: $y^2 - 3y - 9 = 0$.

10. 一次函数 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 的图象与坐标轴所围成的图形的面积是_____.

【答案】 6

【详解】解: 一次函数的关系式是 $y = -\frac{3}{4}x + 3$, 当 $x = 0$ 时, $y = 3$;

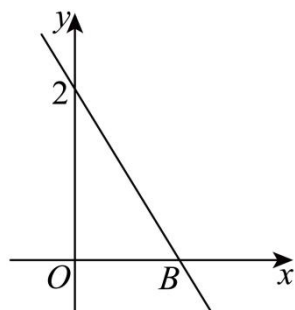
$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } -\frac{3}{4}x + 3 = 0,$$

解得: $x = 4$,

其图象与坐标轴围成的三角形面积是: $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

故答案为 6.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图像如图所示, 那么关于 x 的一元一次不等式 $kx + b < 2$ 的解集是_____.



【答案】 $x > 0$

【详解】解: 关于 x 的一元一次不等式 $kx + b < 2$ 表示的是一次函数 $y = kx + b$ 的函数值小于 2,

由函数图像可知, 当一次函数 $y = kx + b$ 的函数值小于 2 时, $x > 0$,

即关于 x 的一元一次不等式 $kx+b < 2$ 的解集是 $x > 0$,

故答案为: $x > 0$.

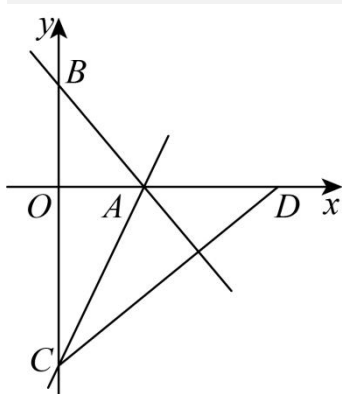
12. 在平面直角坐标系中, 已知直线 $y = -\frac{3}{4}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 点 C 是 y 轴负半轴上一点, 点 B 关于直线 AC 的对称点 D 落在 x 轴上, 则点 D 的坐标是_____

【答案】 $(12, 0)$

【详解】解: 把 $x = 0$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + 4$ 得 $y = 4$,

把 $y = 0$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + 4$ 得: $-\frac{3}{4}x + 4 = 0$,

解得: $x = \frac{16}{3}$,



$$\therefore A\left(\frac{16}{3}, 0\right), B(0, 4),$$

$$\therefore OA = \frac{16}{3}, OB = 4,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{20}{3},$$

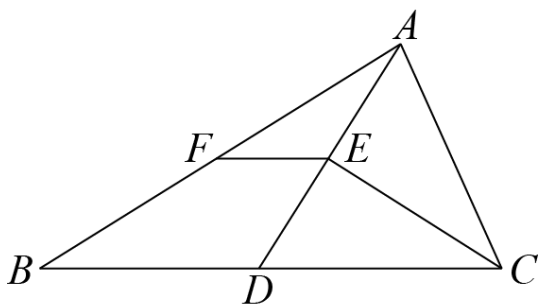
由折叠得: $AD = AB = \frac{20}{3},$

$$\therefore OD = OA + AD = \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 12,$$

$$\therefore \text{点 } D(12, 0),$$

故答案为: $(12, 0)$.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $AC = CD$, $CE \perp AD$, F 是边 AB 的中点, 联结 EF . 如果 $AD = 12$, $CE = 8$, $BC = 18$, 那么 $EF =$ _____.



【答案】 4

【详解】解： $\because AC = CD$ ， $CE \perp AD$ ，

$$\therefore DE = AE, \quad \angle DEC = 90^\circ.$$

$$\because AD = 12, \quad CE = 8,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

$$\therefore CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

$$\because BC = 18,$$

$$\therefore BD = BC - CD = 18 - 10 = 8.$$

$$\because DE = AE,$$

$\therefore E$ 是 AD 的中点.

$\because F$ 是边 AB 的中点,

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 8 = 4.$$

故答案为： 4.

14. 已知菱形一组对角的和为 240° ，较短的一条对角线的长度为 4，那么这个菱形的面积为_____.

【答案】 $8\sqrt{3}$

【详解】解：由题意得， $\angle BAD = \frac{1}{2} \times 240^\circ = 120^\circ$ ， $AC = 4$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore BA = BC, \quad AD \parallel BC, \quad AC \perp BD, \quad AO = \frac{1}{2}AC = 2, \quad BO = DO = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

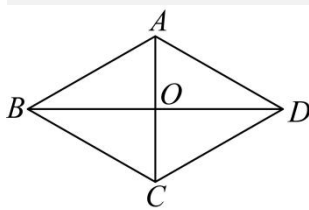
$$\therefore AB = AC = 4,$$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

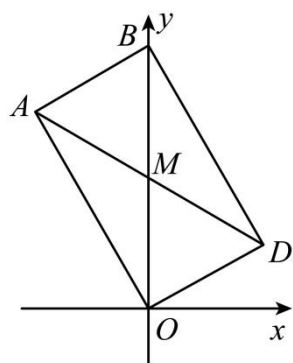
$$\therefore BD = 2BO = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

故答案为: $8\sqrt{3}$.



15. 如图: 在直角坐标系里点 $B(0,4)$, 已知 $ABDO$ 为矩形, $\angle DBO = 30^\circ$, 则点 A 坐标为_____.



【答案】 $(-\sqrt{3}, 3)$

【详解】解: 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C ,

$$\because B(0, 4),$$

$$\therefore OB = 4.$$

$\because$ 四边形 $ABDO$ 为矩形

$$\therefore AM = BM = DM = \frac{1}{2} OB = 2,$$

$$\therefore \angle BDM = \angle DBO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle BDM + \angle DBO = 60^\circ$$

$\therefore \triangle ABM$ 是等边三角形.

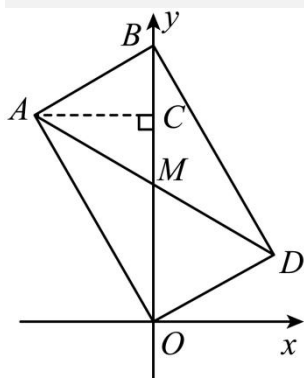
又 $\because AC \perp y$ 轴,

$$\therefore CM = \frac{1}{2} BM = 1,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AM^2 - CM^2} = \sqrt{3}, CO = CM + OM = 3,$$

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(-\sqrt{3}, 3)$.

故答案为: $(-\sqrt{3}, 3)$.



16. 一个多边形截去一个角后, 形成的另一个多边形的内角和是 1260° , 则原多边形的边数为_____.

【答案】 8 或 9 或 10

【详解】 解: 设截去一个角后, 多边形的边数为 n ,

由题意得 $(n-2) \times 180^\circ = 1260^\circ$,

解得 $n = 9$.

因为多边形截去一角后边数可能不变, 可能增加 1, 可能减小 1,

$\therefore$ 原多边形可能为 8 或 9 或 10.

故答案为: 8 或 9 或 10.

17. 我们把对角线与一边垂直的平行四边形叫做“优美平行四边形”. 如果一个“优美平行四边形”的一组邻边长为 $2\sqrt{2}$ 和 4, 那么它的较长的对角线长为_____.

【答案】 $2\sqrt{10}$

【详解】 如图, $\square ABCD$ 中, $AC \perp AB$, $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 4$,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2\sqrt{2}$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

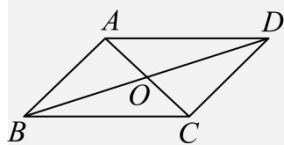
$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$, $BD = 2OB$,

$\because OB = \sqrt{AB^2 + AO^2} = \sqrt{10}$,

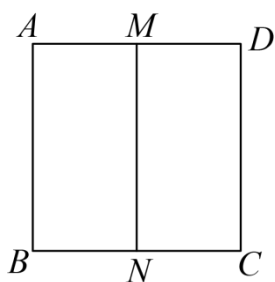
$\therefore BD = 2OB = 2\sqrt{10}$,

$\therefore$ 平行四边形的较长的对角线长为 $2\sqrt{10}$,

故答案为： $2\sqrt{10}$.

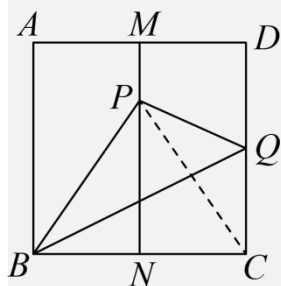


18. 如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 的中点， Q 是边 CD 上的一点，连接 MN 、 BQ ，将 $\triangle BCQ$ 沿着直线 BQ 翻折，若点 C 恰好与线段 MN 上的点 P 重合，则 PQ 的长等于_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【详解】解：根据题意，画图如下：



在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 的中点，

$\therefore BC = PB = 6$ ， MN 垂直平分 BC ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore BC = PB = CP$ ，

$\therefore \triangle BCP$ 是等边三角形，

$\therefore \angle PBC = 60^\circ$ ，

由折叠的性质可得： $\angle PBQ = \angle CBQ = \frac{1}{2} \angle PBC = 30^\circ$ ， $\angle BPQ = \angle BCD = 90^\circ$

设 $PQ = x (x > 0)$ ，则 $BQ = 2x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BPQ$ 中， $PB^2 + PQ^2 = BQ^2$ ，即 $6^2 + x^2 = (2x)^2$ ，

解得： $x = 2\sqrt{3}$ ，

即: $PQ = 2\sqrt{3}$.

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (8 分) 解下列关于 x 的方程:

$$(1) ax^2 - 2 = x^2 + 1 \quad (a \neq 1)$$

$$(2) \frac{4x}{x^2 + 3x - 4} + \frac{1}{x + 4} = 1$$

$$(3) 2x^2 - 4 - \frac{5}{2x^2 + 3x} = -3x$$

$$(4) x - \sqrt{x - 2} = 4$$

【详解】(1) 解: $ax^2 - 2 = x^2 + 1$,

$$\therefore ax^2 - x^2 = 1 + 2,$$

$$\therefore (a - 1)x^2 = 3,$$

$$\therefore x^2 = \frac{3}{a - 1},$$

解得: $x_1 = \sqrt{\frac{3}{a - 1}}, x_2 = -\sqrt{\frac{3}{a - 1}}; \dots\dots (2 \text{ 分})$

$$(2) \text{ 解: } \frac{4x}{x^2 + 3x - 4} + \frac{1}{x + 4} = 1,$$

$$\therefore \frac{4x}{(x - 1)(x + 4)} + \frac{1}{x + 4} = 1,$$

$$\therefore 4x + x - 1 = x^2 + 3x - 4,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore (x - 3)(x + 1) = 0,$$

解得: $x_1 = 3, x_2 = -1$,

经检验, $x_1 = 3, x_2 = -1$ 是原方程的解,

$\therefore$ 原方程的解是 $x_1 = 3, x_2 = -1; \dots\dots (2 \text{ 分})$

$$(3) \text{ 解: } 2x^2 - 4 - \frac{5}{2x^2 + 3x} = -3x,$$

$$\therefore 2x^2 + 3x - 4 = \frac{5}{2x^2 + 3x},$$

令 $y = 2x^2 + 3x$,

$$\therefore y - 4 = \frac{5}{y},$$

$$\therefore y^2 - 4y - 5 = 0,$$

$$\therefore (y - 5)(y + 1) = 0,$$

解得: $y_1 = 5, y_2 = -1$,

当 $y = 5$ 时, $2x^2 + 3x = 5$,

$$\therefore 2x^2 + 3x - 5 = 0,$$

$$\therefore (2x+5)(x-1) = 0,$$

解得: $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1$,

当 $y = -1$ 时, $2x^2 + 3x = -1$,

$$\therefore 2x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$\therefore (2x+1)(x+1) = 0,$$

解得: $x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1$,

经检验, $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1$ 是原方程的解,

$\therefore$ 方程的解是 $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1$; (2 分)

(4) 解: $x - \sqrt{x-2} = 4$,

$$\therefore x - 4 = \sqrt{x-2},$$

$$\therefore x^2 - 8x + 16 = x - 2,$$

$$\therefore x^2 - 9x + 18 = 0,$$

$$\therefore (x-3)(x-6) = 0,$$

解得: $x_1 = 3, x_2 = 6$,

经检验, $x_1 = 3$ 是增根, $x_2 = 6$ 是原方程的解,

$\therefore$ 方程的解为 $x = 6$ (2 分)

20. (3 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0 \end{cases}$$

【详解】解:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \text{①} \\ (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0 \text{②} \end{cases}$$

由①得, $(x+y)^2 = 9$,

解得: $x+y = 3$ 或 $x+y = -3$,

由②得, $(x-y-1)(x-y-2)=0$,

解得: $x-y=1$ 或 $x-y=2$, …… (2分)

当 $x+y=3$, $x-y=1$ 时, 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$;

当 $x+y=3$, $x-y=2$ 时, 解得 $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$;

当 $x+y=-3$, $x-y=1$ 时, 解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$;

当 $x+y=-3$, $x-y=2$ 时, 解得 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$;

∴ 综上所述, 方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$. …… (2分)

21. (6分) 有一项工程, 甲、乙两人合作 20 天后, 还需由乙单独做 7 天才能完成. 如果甲每天比原来多做 10%, 乙每天比原来多做 26%, 那么全部工程两人合作 20 天就能完成, 求原来甲和乙单独完成这项工程各需多少天?

【详解】解: 设甲原来度量完成这项工程需要 x 天, 乙原来度量完成这项工程需要 y 天, …… (1分)

由题意得: $\begin{cases} 20\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1 \\ 20\left[\frac{1}{x} \cdot (1+10\%) + \frac{1}{y} (1+26\%) \right] = 1 \end{cases}$, …… (2分)

整理得: $\begin{cases} \frac{20}{x} + \frac{27}{y} = 1 \\ \frac{22}{x} + \frac{25.2}{y} = 1 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x=50 \\ y=45 \end{cases}$,

经检验, $\begin{cases} x=50 \\ y=45 \end{cases}$ 是原方程的解, 且符合题意; …… (2分)

答: 甲原来度量完成这项工程需要 50 天, 乙原来度量完成这项工程需要 45 天. …… (1分)

22. (6分) 直线 $y=x+b$ 与直线 $y=kx$ 的图像交于点 $A(2,-4)$,

(1)求这两条直线的函数关系式；

(2)求这两条直线与 x 轴围成的三角形的面积.

【详解】(1) 解: $\because$ 直线 $y = x + b$ 与直线 $y = kx$ 的图像交于点 $A(2, -4)$,

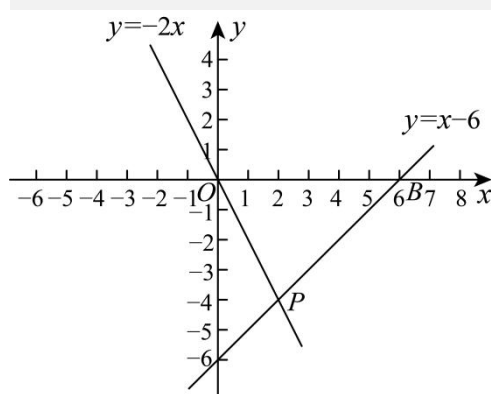
$\therefore$ 将点 $A(2, -4)$ 代入直线 $y = x + b$ 与直线 $y = kx$ 中, 得:

$$2 + b = -4, \quad 2k = -4,$$

解得: $b = -6, \quad k = -2,$

$\therefore$ 这两条直线的函数关系式为 $y = x - 6, \quad y = -2x$; $\cdots\cdots$ (3 分)

(2) 解: 如图所示, 设直线 $y = x - 6$ 与 x 轴的交点为 B , 两直线交点为 P ,



联立两直线
$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -2x \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases},$$

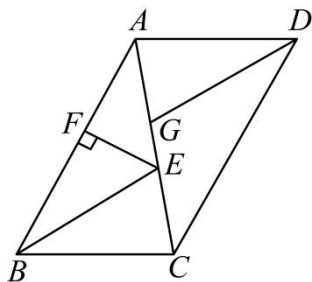
$\therefore$ 交点 $P(2, -4)$,

在直线 $y = x - 6$ 中, 令 $y = 0$, 得 $x = 6$,

$\therefore B(6, 0)$,

$\therefore$ 这两条直线与 x 轴围成的三角形的面积 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$. $\cdots\cdots$ (3 分)

23. (8 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, BE 、 DG 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ADC$, 交 AC 于点 E 、 G .



(1)求证: $\triangle AGD \cong \triangle CEB$;

(2)过点 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F . 若平行四边形 $ABCD$ 的周长为 48, $EF = 8$, 求 $\square ABCD$ 的面积.

【详解】(1) 证明: $\because BE, DG$ 分别平分 $\angle ABC, \angle ADC$, 交 AC 于点 E, G ,

$$\therefore \angle ADG = \frac{1}{2} \angle ADC, \quad \angle CBE = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle ADC = \angle ABC, \quad AD \parallel CB, \quad AD = CB,$$

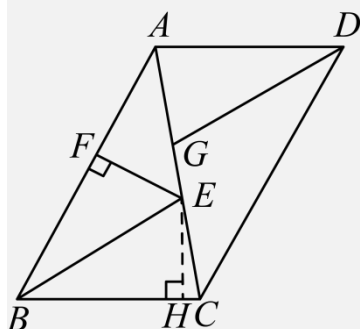
$$\therefore \angle ADG = \angle CBE, \quad \angle DAG = \angle BCE,$$

在 $\triangle AGD$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADG = \angle CBE \\ AD = CB \\ \angle DAG = \angle BCE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AGD \cong \triangle CEB (\text{ASA}); \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

(2) 解: 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H , 如图所示:



$\because BE$ 分别平分 $\angle ABC$, $EF \perp AB$ 于点 F ,

$$\therefore EH = EF = 8,$$

$\because AB = CD, BC = DA$, 且平行四边形 $ABCD$ 的周长为 48,

$$\therefore 2AB + 2BC = 48,$$

$$\therefore AB + BC = 24,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} AB \times EF + \frac{1}{2} BC \times EH = \frac{1}{2} \times 8 (AB + BC) = \frac{1}{2} \times 8 \times 24 = 96,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中,

$$\begin{cases} AB = CD \\ BC = DA \\ AC = CA \end{cases},$$

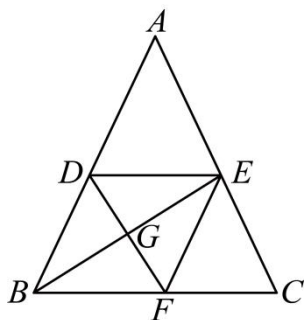
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (SSS), (3 分)

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDA} = 96$,

$\therefore S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA} = 96 + 96 = 192$,

$\therefore \square ABCD$ 的面积是 192. (1 分)

24. (8 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D, E 分别为边 AB, AC 上的点, $DE \parallel BC$, 连接 BE , 点 G 为 BE 的中点, 连接 DG , 并延长交边 BC 于 F .



(1) 求证: 四边形 $DBFE$ 是平行四边形;

(2) 如果 $\angle C = 2\angle BEF$, 求证: 四边形 $DBFE$ 是菱形.

【详解】 (1) 证明: $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \angle DEG = \angle FBG$, $\angle EDG = \angle BFG$, $DE \parallel FB$,

$\because$ 点 G 为 BE 的中点,

$\therefore EG = BG$,

在 $\triangle DEG$ 和 $\triangle FBG$ 中,
$$\begin{cases} \angle DEG = \angle FBG \\ \angle EDG = \angle BFG \\ EG = BG \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEG \cong \triangle FBG$ (AAS),

$\therefore DE = FB$,

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形; (4 分)

(2) 由 (1) 知四边形 $DBFE$ 是平行四边形,

$\therefore BD \parallel EF$,

$\therefore \angle ABC = \angle EFC$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle C$,

$$\therefore \angle EFC = \angle C,$$

$$\because \angle C = 2\angle BEF,$$

$$\therefore \angle EFC = 2\angle BEF = \angle BEF + \angle EBF,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle EBF,$$

$$\therefore BF = EF,$$

$\therefore$ 平行四边形 $DBFE$ 是菱形. $\cdots\cdots$ (4 分)

25. (9 分) 已知, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 10$, $AD = 5$, M 是 BC 边上的任意一点, 连接 DM , 连接 AM .

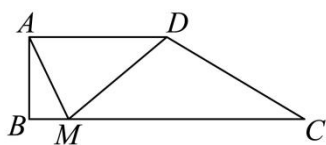


图1

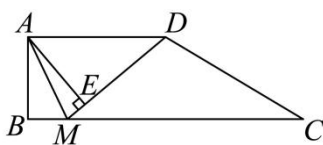


图2

(1) 若 AM 平分 $\angle BMD$, 求 BM 的长;

(2) 过点 A 作 $AE \perp DM$, 交 DM 所在直线于点 E .

① 设 $BM = x$, $AE = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式;

② 连接 BE , 当点 E 是 DM 的中点时, 求 BE 的长.

【详解】(1) 解: 如图1中, 作 $DH \perp BC$ 于 H , 则四边形 $ABHD$ 是矩形,

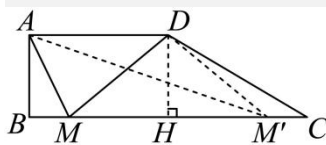


图1

$$\therefore AD = BH = 5, \quad AB = DH = 3,$$

当 MA 平分 $\angle DMB$ 时,

$$\therefore \angle AMB = \angle AMD = \angle DAM,$$

$$\therefore DA = DM = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle DMH$ 中, $DM = AD = 5$, $DH = 3$,

$$\therefore MH = \sqrt{DM^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

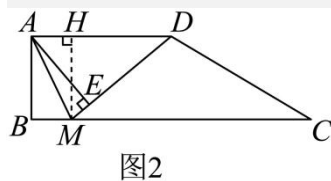
$$\therefore BM = BH - MH = 1;$$

当 AM' 平分 $\angle BM'D$ 时, 同法可证: $DA = DM'$, $HM' = 4$,

$$\therefore BM' = BH + HM' = 9;$$

综上所述，满足条件的 BM 的值为1或9；……（3分）

（2）解：①如图2中，作 $MH \perp AD$ 于 H ，



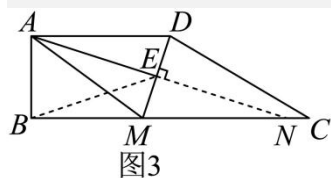
在 $\text{Rt}\triangle DMH$ 中， $DM = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 34}$ ，

$$\because S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot AE,$$

$$\therefore 5 \times 3 = y \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 34},$$

$$\therefore y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34}; \dots\dots (3 \text{ 分})$$

②如图3，延长 AE 交 BC 于点 N ，



$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle MNE, \quad \angle ADE = \angle NME,$$

$\therefore E$ 是 DM 中点，

$$\therefore DE = ME,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle NME \text{ (AAS)},$$

$$\therefore MN = AD = 5,$$

$\therefore AE$ 垂直平分 DM ，

$$\therefore AM = AD = 5,$$

$$\because AB = 3,$$

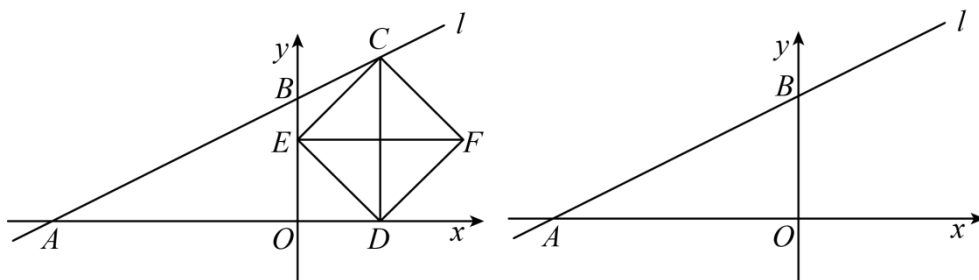
$$\therefore BM = 4,$$

$$\therefore BN = 9,$$

$$\therefore AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AN = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \dots\dots (3 \text{ 分})$$

26. (10分) 已知在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = kx + 3 (k \neq 0)$ 交 x 轴负半轴于点 A , 交 y 轴于点 B , 且 $AO = 2OB$.



备用图

(1) 求直线 l 的表达式;

(2) 已知点 C 在直线 l 上且在第一象限内, 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴, 垂足为点 D , 以线段 CD 为对角线作正方形 $CEDF$ (点 E 在点 F 的左侧).

① 如图, 当点 E 落在 y 轴上时, 求点 C 的坐标;

② 当 CE 的延长线经过点 O 时, 求正方形 $CEDF$ 的边长.

【详解】 (1) 解: 由 $y = kx + 3$, 当 $x = 0$, $y = 3$,

则 $B(0, 3)$,

$\therefore AO = 2OB$,

$\therefore OA = 6$,

$\therefore A$ 在 x 轴的负半轴,

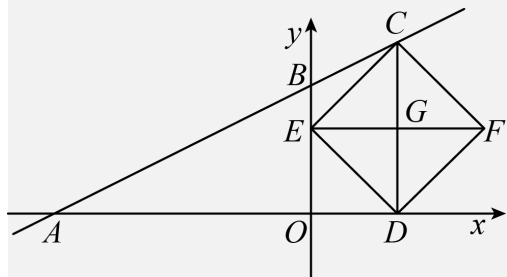
$\therefore A(-6, 0)$,

代入 $y = kx + 3$, 即 $0 = -6k + 3$,

解得: $k = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线 l 的表达式为: $y = \frac{1}{2}x + 3$; (4分)

(2) ① 设 CD, EF 交于点 G ,



设 C 的坐标为 $\left(m, \frac{1}{2}m + 3\right)$, 则 $G\left(m, \frac{1}{4}m + \frac{3}{2}\right)$

$\therefore CD \perp x$ 轴,

$\therefore D(m, 0)$,

$\therefore CD$ 为正方形 $CEDF$ 的对角线,

$\therefore EF \parallel x$ 轴, $\angle ODE = \angle EDG = 45^\circ$,

则 $OE = EG = GD$

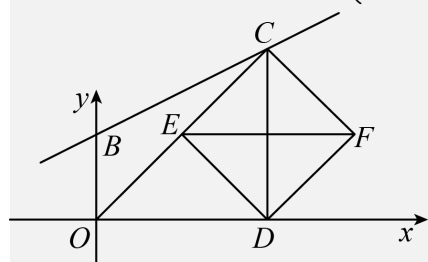
$\therefore E(0, m)$,

$$\therefore \frac{1}{4}m + \frac{3}{2} = m$$

解得: $m = 2$

$\therefore C(2, 4)$; (3 分)

②如图所示, 设 C 的坐标为 $\left(n, \frac{1}{2}n + 3\right)$, $D(n, 0)$,



$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是正方形, CD 是对角线,

$\therefore \angle DCE = 45^\circ$,

当 OE 经过点 O 时, $\triangle OCD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore CD = OC$,

$$\therefore \frac{1}{2}n + 3 = n,$$

解得: $n = 6$,

$\therefore CD = 6$,

$\therefore$ 边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 = 3\sqrt{2}$ (3 分)