

2024 学年第二学期初二数学阶段练习

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 得分_____

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{x^2-x}{x} = \sqrt{2}$ 是无理方程

B. $x^2 - x = 0$ 是二项方程

C. $\frac{x^2-x}{3} = 2$ 是分式方程

D. $x^2 + y = \sqrt{2}$ 是二元二次方程

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了无理方程、高次方程、分式方程、二项方程的定义, 解题的关键是熟悉这些方程的定义. 利用无理方程、高次方程、分式方程、二项方程的定义分别进行判断即可得到答案.

【详解】解: A、是分式方程, 不是无理方程, 原说法错误, 不符合题意;

B、是一元二次方程, 不是二项方程, 原说法错误, 不符合题意;

C、是整式方程, 不是分式方程, 原说法错误, 不符合题意;

D、是二元二次方程, 原说法正确, 符合题意;

故选 D.

2. 一次函数 $y = -2(x-3) + 2$ 在 y 轴上的截距是 ()

A. 2

B. -6

C. 6

D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一次函数与坐标轴的交点问题, 熟知一次函数图象在 y 轴上的截距是一次函数图象与 y 轴交点的纵坐标是解答的关键. 据此求得该一次函数图象与 y 轴的交点坐标即可求解.

【详解】解: 当 $x = 0$ 时, $y = -2(0-3) + 2 = 8$,

$\therefore$ 该一次函数图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, 8)$,

故该一次函数图象在 y 轴上的截距是 8,

故选: D.

3. 直线 $y = \left(\frac{1}{2}k - 1\right)x + 2(1 - k)$ 的图像经过第一、二、四象限, 那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 1$ B. $k < 2$ C. $k < 1$ D. $1 < k < 2$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图像与系数的关系, 熟练掌握一次函数的图像与系数的关系是解题的关键. 根据已知条件, 结合一次函数的图像与系数的关系, 列不等式组, 求解即可.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = \left(\frac{1}{2}k - 1\right)x + 2(1 - k)$ 的图像经过第一、二、四象限,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}k - 1 < 0 \\ 2(1 - k) > 0 \end{cases},$$

解得, $k < 1$

故选: C.

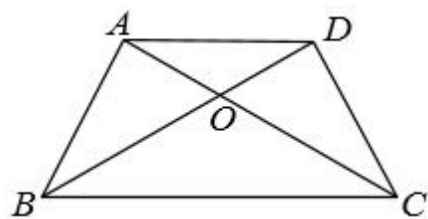
4. 已知四边形 $ABCD$ 中, AB 与 CD 不平行, AC 与 BD 相交于点 O , 那么下列条件中能判定四边形 $ABCD$ 是等腰梯形的是 ()

- A. $AC=BD=BC$ B. $AB=AD=CD$ C. $OB=OC, AB=CD$ D. $OB=OC, OA=OD$

【答案】D

【解析】

【详解】 解: 如图,



A、 $AC=BD=BC$, 不能证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 错误;

B、 $AB=AD=CD$, 不能证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 错误;

C、 $OB=OC, AB=CD$, 不能证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 错误;

D、 $\because OB=OC, OA=OD$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB, \angle OAD = \angle ODA$,

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 中,

$OA=OD, \angle AOB = \angle DOC, OB=OC$,

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ABO = \angle DCO, AB = CD,$$

$$\text{同理: } \angle OAB = \angle ODC,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DCB + \angle CDA + \angle BAD = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形,

$$\therefore AB = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

故选 D

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定、全等三角形的判定和性质以及等腰梯形的应用，解此题的关键是求出 $AD \parallel BC$ ，题目的综合性较强，难度中等.

5. 在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $\angle ABD = 30^\circ$ ， $AC \perp BC$ ， $AB = 24$ 厘米，则 $\triangle COD$ 的面积为（ ）平方厘米

A. $12\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $9\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了等腰梯形的性质，直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

作 $CE \perp AB$ ， $DF \perp AB$ ，得到四边形 $CDFE$ 是矩形，推出 $EF = CD$ 证明 $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (SAS)，得到

$$\angle BAC = \angle ABD = 30^\circ, \text{ 求出 } BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 24 = 12 \text{ 厘米}, \angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 60^\circ, \text{ 继而得到}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 12\sqrt{3} \text{ 厘米}, \text{ 求出 } OC = 4\sqrt{3} \text{ 厘米}, \text{ 得到}$$

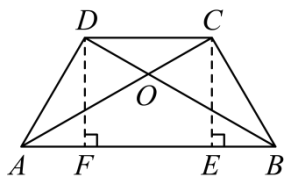
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 12 = 72\sqrt{3} \text{ (平方厘米)},$$

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = 24\sqrt{3} \text{ (平方厘米)}$$

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOC} = 48\sqrt{3} \text{ (平方厘米)}, \text{ 求出}$$

$$S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CE = \frac{1}{2}(24 + 12) \times 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3} \quad (\text{平方厘米}), \text{ 计算即可得到答案.}$$

【详解】解：如图，作 $CE \perp AB, DF \perp AB$



$\because$ 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,

$\therefore AD = BC$, $\angle DAB = \angle CBA$, 四边形 $CDFE$ 是矩形,

$\therefore EF = CD$

$\because AB = AB$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BAC$ (SAS),

$\therefore \angle BAC = \angle ABD = 30^\circ$, $\angle BDA = \angle ACB$

$\because AC \perp BC$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ = \angle BDA$,

$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 24 = 12$, $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 30^\circ$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 12\sqrt{3}$ (厘米)

$\therefore OB = 2OC$,

$\because OB^2 = OC^2 + BC^2$,

$\therefore 4OC^2 = OC^2 + 144$,

$\therefore OC = 4\sqrt{3}$ (厘米),

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 12 = 72\sqrt{3}$ (平方厘米),

$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = 24\sqrt{3}$ (平方厘米)

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOC} = 48\sqrt{3}$ (平方厘米),

$\because \angle CEB = \angle DFA = 90^\circ$, $\angle BDA = \angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADF = \angle BCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$\therefore AF = BE = \frac{1}{2}BC = 6$ 厘米,

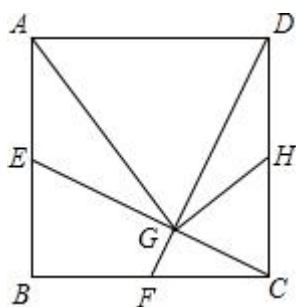
$$\therefore CD = EF = AB - AF - CE = 12 \text{ 厘米}, \quad CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 6\sqrt{3} \text{ 厘米}$$

$$S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CE = \frac{1}{2}(24 + 12) \times 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3} \text{ (平方厘米)}$$

$$\therefore S_{\triangle COD} = S_{\text{梯形}ABCD} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOD} = 12\sqrt{3} \text{ (平方厘米)},$$

故选：A.

6. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 的中点， CE 、 DF 交于 G ，连接 AG 、 HG 。下列结论：① $CE \perp DF$ ；② $AG = AD$ ；③ $\angle CHG = \angle DAG$ ；④ $HG = \frac{1}{2}AD$ ，其中正确的有（ ）



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】连接 AH ，由四边形 $ABCD$ 是正方形与点 E 、 F 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 的中点，易证得 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$ 与 $\triangle ADH \cong \triangle DCF$ ，根据全等三角形的性质，易证得 $CE \perp DF$ 与 $AH \perp DF$ ，根据垂直平分线的性质，即可证得 $AG = AD$ ，由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即可证得 $HG = \frac{1}{2}AD$ ，根据等腰三角形的性质，即可得 $\angle CHG = \angle DAG$ ，则问题得解。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = BC = CD = AD, \quad \angle B = \angle BCD = 90^\circ,$$

∵ 点 E 、 F 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 的中点，

$$\therefore BE = CF,$$

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BE = CF \\ \angle B = \angle DCF, \\ BC = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ECB = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD + \angle CDF = 90^\circ,$$

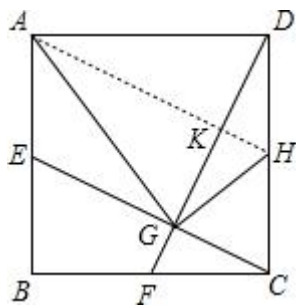
$$\therefore \angle CGD = 90^\circ,$$

$\therefore CE \perp DF$ ，故①正确；

在 $Rt\triangle CGD$ 中， H 是 CD 边的中点，

$$\therefore HG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AD, \text{ 故④正确；}$$

如图，连接 AH ，



同理可得： $AH \perp DF$ ，

$$\therefore HG = HD = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore DK = GK,$$

$\therefore AH$ 垂直平分 DG ，

$\therefore AG = AD$ ，故②正确；

$$\therefore \angle DAG = 2\angle DAH,$$

同理： $\triangle ADH \cong \triangle DCF$ ，

$$\therefore \angle DAH = \angle CDF,$$

$$\therefore GH = DH,$$

$$\therefore \angle HDG = \angle HGD,$$

$$\therefore \angle GHC = \angle HDG + \angle HGD = 2\angle CDF,$$

$$\therefore \angle CHG = \angle DAG, \text{ 故③正确.}$$

故选：D.

【点睛】此题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质以及垂直平分线的性质等知识．此题综合性很强，难度较大，解题的关键是注意数形结合思想的应用．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 方程 $\frac{1}{3}x^3 + 9 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】根据立方根的含义和求法，求出方程 $\frac{1}{3}x^3+9=0$ 的解是多少即可.

【详解】解： $\because \frac{1}{3}x^3+9=0$,

$$\therefore x^3=-27,$$

解得 $x=-3$.

故答案为： $x=-3$.

【点睛】此题主要考查了立方根的含义和求法，要熟练掌握，如果一个数 x 的立方等于 a ，即 x 的三次方等于 a ($x^3=a$)，那么这个数 x 就叫做 a 的立方根，也叫做三次方根. 读作“三次根号 a ”其中， a 叫做被开方数，3 叫做根指数.

8. 点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 是一次函数 $y = -4x + b$ 图象上的两个点. 则 $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$ _____ 0.

【答案】 <

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图象和性质，根据一次函数的增减性，分 $x_1 < x_2$ 和 $x_1 > x_2$ 两种情况，进行讨论求解即可.

【详解】解： $\because y = -4x + b$ ， $-4 < 0$ ，

$\therefore y$ 随着 x 的增大而减小，

$\because$ 点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 是一次函数 $y = -4x + b$ 图象上的两个点，

$\therefore$ ①当 $x_1 < x_2$ 时， 则： $y_1 > y_2$ ，

$$\therefore (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0;$$

②当 $x_1 > x_2$ 时， 则： $y_1 < y_2$ ，

$$\therefore (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0,$$

综上： $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ ；

故答案为： <.

9. 一次函数 $y = (2m - 1)x + m - 7$ 的图像不经过第二象限， 则 m 的取值范围是 ____.

【答案】 $\frac{1}{2} \leq m \leq 7$

【解析】

【分析】一次函数图象与系数的关系得到关于 m 的不等式组，然后解不等式组即可.

【详解】解：根据题意，得 $\begin{cases} 2m-1 \geq 0 \\ m-7 \leq 0 \end{cases}$ ，

解得 $\frac{1}{2} \leq m \leq 7$.

故答案是： $\frac{1}{2} \leq m \leq 7$.

【点睛】本题考查了一次函数图象与系数的关系：一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 为常数， $k \neq 0$) 是一条直线，当 $k > 0$ ， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ ， y 随 x 的增大而减小；图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, b)$.

10. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$ 时，如果设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 3 = 0$ ；

【解析】

【分析】如果设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$ ，原方程变为： $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$ ，方程两边乘最简公分母 y ，可以把分式方程转化为整式方程.

【详解】解：设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，

原方程变为 $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$ ，

方程两边都乘 y 得 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故答案为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

【点睛】本题考查用换元法使分式方程简便. 换元后再在方程两边乘最简公分母可以把分式方程转化为整式方程. 应注意换元后的字母系数.

11. 一个多边形从一个顶点出发有七条对角线，那么这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 1440

【解析】

【分析】本题考查了多边形的内角和定理，多边形对角线有 7 条，据此求出多边形的边数，再根据多边形的内角和定理即可求解，掌握多边形的内角和定理是解题的关键.

【详解】解：设这个多边形是 n 边形，由题意得：

$$n-3=7,$$

$$\therefore n=10,$$

$$\therefore \text{这个多边形的内角和} = (10-2) \times 180^\circ = 1440^\circ,$$

故答案为: 1440.

12. 在矩形 $ABCD$ 中, 点 O 为对角线的交点, $\angle AOD = 120^\circ$, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , 则 $\angle AEO$ 的度数是_____.

【答案】 30° ##30 度

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质, 等边三角形的判定和性质, 根据矩形的性质, 推出 AOB 为等边三角形, 得到 $AB = OB$, $\angle ABO = 60^\circ$, 角平分线求出 $\angle BAE = 45^\circ$, 得到 $AB = BE$, 进而得到 $OB = BE$, 等边对等角结合角的和差关系, 求出 $\angle AEO$ 的度数即可.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OA = OB = OC = OD, \angle BAD = 90^\circ, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because \angle AOD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore AOB$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ, AB = OB,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle ABC - \angle ABO = 30^\circ,$$

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E ,

$$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ,$$

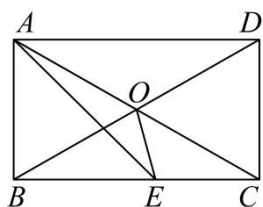
$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AB = BE, \angle BEA = 45^\circ,$$

$$\therefore OB = BE,$$

$$\therefore \angle BEO = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle OBE) = 75^\circ,$$

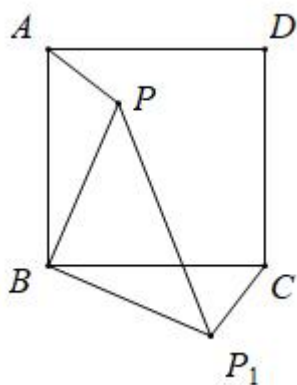
$$\therefore \angle AEO = \angle BEO - \angle AEB = 30^\circ;$$



故答案为: 30° .

13. 如图, P 是正方形 $ABCD$ 内一点, 将 $\triangle ABP$ 绕点 B 顺时针方向旋转, 能与 $\triangle CBP_1$ 重合, 若 $PB = 5$, 则

$PP_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据旋转角相等可得 $\angle PBP_1 = \angle ABC = 90^\circ$, 进而勾股定理求解即可

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$

$\because$ 将 $\triangle ABP$ 绕点 B 顺时针方向旋转, 能与 $\triangle CBP_1$ 重合,

$\therefore \angle PBP_1 = \angle ABC = 90^\circ$, $PB = P_1B = 5$

$\therefore PP_1 = \sqrt{PB^2 + P_1B^2} = 5\sqrt{2}$

故答案为: $5\sqrt{2}$

【点睛】 本题考查了旋转的性质, 勾股定理, 求得旋转角相等且等于 90° 是解题的关键.

14. 若菱形周长为 20cm , 两对角线之和为 12cm , 则菱形面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 11

【解析】

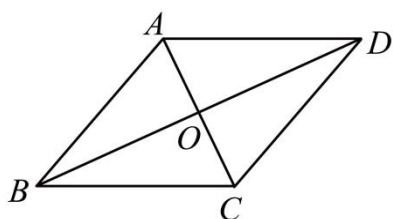
【分析】 本题主要考查了菱形的性质, 勾股定理, 先求出菱形的边长为 5cm , 再由菱形的性质得到

$OA = \frac{1}{2}AC$, $OB = \frac{1}{2}BD$, $AC \perp BD$, 根据题意可得 $OA + OB = 6\text{cm}$, 设 $OA = a\text{cm}$, $OB = b\text{cm}$, 则 $a + b = 6$, 由勾股定理得 $a^2 + b^2 = 5^2 = 25$, 据此根据完全平方公式的变形求出 ab 的值即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 菱形周长为 20cm ,

$\therefore$ 菱形的边长为 5cm ,

如图所示, 菱形 $ABCD$ 的对角线交于点 O , 则 $OA = \frac{1}{2}AC$, $OB = \frac{1}{2}BD$, $AC \perp BD$,



$\therefore$ 两对角线之和为 12cm ,

$\therefore AC + BD = 12\text{cm}$,

$\therefore OA + OB = 6\text{cm}$,

设 $OA = a\text{cm}$, $OB = b\text{cm}$,

$\therefore a + b = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由勾股定理得 $AB^2 = OA^2 + OB^2$,

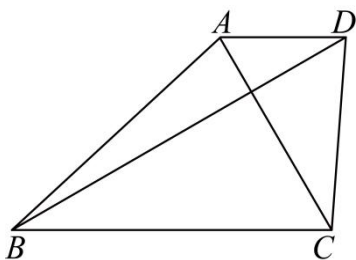
$\therefore a^2 + b^2 = 5^2 = 25$,

$\therefore ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{11}{2}$,

$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 11$,

故答案为: 11.

15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AC \perp DB$, $AC = 5$, $\angle DBC = 30^\circ$, 则梯形 $ABCD$ 的面积是



【答案】 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

【解析】

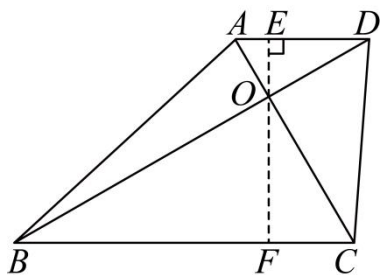
【分析】 本题考查了含 30° 角的直角三角形的性质，掌握其计算方法是关键.

如图所示，设 AC, BD 交于点 O ，过点 O 作 $OE \perp AD$ 于点 E ，延长 EO 交 BC 于点 F ，设 $AE = x$ ，则

$OA = 2x$ ， $OC = AC - AO = 5 - 2x$ ，根据含 30° 角的直角三角形的计算得到

$AD = 4x, BC = 10 - 4x, EF = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，结合梯形面积的计算即可求解.

【详解】 解：如图所示，设 AC, BD 交于点 O ，过点 O 作 $OE \perp AD$ 于点 E ，延长 EO 交 BC 于点 F ，



$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore OF \perp BC$ ，

$\because \angle DBC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BOF = 60^\circ = \angle DOE$ ，

$\because AC \perp BD$ ，

$\therefore \angle COF = 30^\circ = \angle AOE$ ，则 $\angle OCF = 60^\circ$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DBC = \angle ADB = 30^\circ, \angle ACB = \angle DAC = 60^\circ$ ，

设 $AE = x$ ，则 $OA = 2x$ ， $OC = AC - AO = 5 - 2x$ ，

在 $Rt\triangle AOE$ 中， $OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{3}x$ ，

同理， $ED = \sqrt{3}OE = \sqrt{3} \times \sqrt{3}x = 3x$ ，

$\therefore AD = AE + ED = x + 3x = 4x$ ，

同理， $Rt\triangle COF$ 中， $CF = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2} \times (5 - 2x) = \frac{5}{2} - x$ ，则 $OF = \sqrt{3}CF = \sqrt{3} \times \left(\frac{5}{2} - x\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x$ ，

$\therefore EF = OE + OF = \sqrt{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

$$\because AD = 1, AB = \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2,$$

$$\because \angle A = \angle ABC = \angle BGD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是矩形,

$$\therefore DG = AB = \sqrt{3}, BG = AD = 1,$$

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore CD = 2DG = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = 3,$$

$$\therefore BC = CG + BG = 4,$$

$$\because BD^2 + CD^2 = 16 = BC^2,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 60^\circ,$$

由折叠性质得 $\angle DBF = \angle CBF = \frac{1}{2} \angle CBD = 30^\circ$,

$$\therefore DF = \frac{1}{2} BF,$$

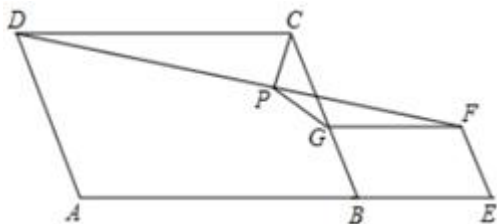
在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中, 则 $BF^2 - DF^2 = \frac{3}{4} BF^2 = BD^2 = 4$,

$$\therefore BF = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (负值舍去)},$$

故答案为: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

17. 如图, 在 $\square ABCD$ 和 $\square BEFG$ 中, $AB = AD$, $BG = BE$, 点 A 、 B 、 E 在同一直线上, P 是线段 DF 的中点,

联结 PG , PC . 若 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$, 则 $\frac{PC}{PG} = \underline{\hspace{2cm}}$.

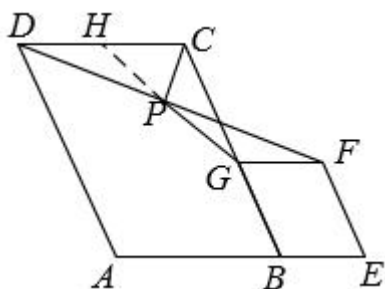


【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 延长 GP 交 CD 于点 H ，根据 $AB = AD$ ， $BG = BE$ ，得出四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 都是菱形，由菱形的性质证明 $\triangle DPH \cong \triangle FPG$ ，得出 $DH = GF$ ，进而得出 $\triangle CHG$ 为等腰三角形，利用等腰三角形的性质得出 $CP \perp HG$ ， $\angle PCG = 60^\circ$ ，再利用直角三角形的性质，即可求解.

【详解】 解：如图，延长 GP 交 CD 于点 H ，



在 $\square ABCD$ 和 $\square BEFG$ 中， $AB = AD$ ， $BG = BE$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 都是菱形，

$\therefore CD = CB$ ， $GF = GB$ ， $CD \parallel AE$ ， $GF \parallel AE$ ，

$\therefore CD \parallel GF$ ，

$\therefore \angle DHP = \angle FGP$ ，

$\because \angle DPH = \angle FPG$ ， $DP = FP$ ，

$\therefore \triangle DPH \cong \triangle FPG$ (AAS)，

$\therefore DH = GF$ ， $PH = PG$ ，

$\therefore DH = GB$ ，

$\therefore CH = CG$ ，

$\therefore CP \perp PG$ ，

$\therefore \angle HCG = 2\angle PCG$ ，

$\because \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle HCG = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle PCG = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CGP = 30^\circ$ ，

$\therefore CG = 2PC$ ，

$$\therefore PG = \sqrt{CG^2 - PC^2} = \sqrt{3}PC,$$

$$\frac{PC}{PG} = \frac{PC}{\sqrt{3}PC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题考查了菱形的判定与性质，全等三角形的判定与性质等知识，掌握全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，直角三角形的性质是解决问题的关键.

18. 已知直角梯形的一条底边长为 8，一条腰长为 $3\sqrt{2}$ ，且它与底边的夹角是 45° ，那么另一条底边的长为 _____.

【答案】 5 或 11

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质与判定，等腰直角三角形的性质与判定，勾股定理，分解析图中两种情况，每种图又分 $AD=8$ 和 $BC=8$ 这两种情况，分别计算求解即可.

【详解】 解： 如图所示，当 $AB=3\sqrt{2}$ ， $BC=8$ ， $\angle B=45^\circ$ 时，

过点 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ，则四边形 $ADCM$ 是矩形，

$$\therefore CM = AD,$$

$$\because AM \perp BC, \angle B = 45^\circ,$$

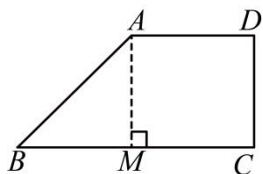
$\therefore \triangle ABM$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore AM = BM,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{2}BM = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore BM = 3,$$

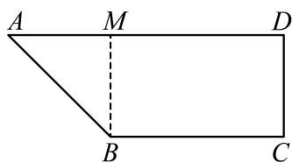
$$\therefore AD = CM = 5;$$



当 $AB=3\sqrt{2}$ ， $AD=8$ ， $\angle B=45^\circ$ 时，则 $BC=BM+CM=11$ ；

如图所示，当 $AB=3\sqrt{2}$ ， $BC=8$ ， $\angle B=45^\circ$ 时，

同理可得 $DM=BC=8$ ， $AM=3$ ，则 $AD=AM+DM=11$ ；



当 $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 8$, $\angle B = 45^\circ$ 时, 同理可得 $BC = 5$;

综上所述, 另一条底边的长为 5 或 11,

故答案为: 5 或 11.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 6 分, 共 24 分)

19. 解方程: $b(x+2) = 4(x+1)$.

【答案】 $x = \frac{4-2b}{b-4}$

【解析】

【分析】 本题考查了解参数方程.

先去括号, 再移项, 然后提取公因式 x , 最后求解即可.

【详解】 $b(x+2) = 4(x+1)$

去括号得 $bx + 2b = 4x + 4$

移项得 $bx - 4x = 4 - 2b$

提取公因式 x 得 $(b-4)x = 4-2b$

解得 $x = \frac{4-2b}{b-4}$

20. 解方程: $\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} = 1$.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程, 掌握分式方程的求解步骤是解题的关键.

先将分式方程化成整式方程求解, 然后再检验即可.

【详解】 解: $\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} = 1$

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x-1} = 1,$$

$$3 - (x+2) = (x-1)(x+2)$$

$$3 - x - 2 = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$(x+3)(x-1) = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 1,$$

检验：当 $x_1 = -3$ 时， $(x-1)(x+2) = (-3-1)(-3+2) = 4$ ，符合题意；

当 $x_2 = 1$ 时， $(x-1)(x+2) = (1-1)(1+2) = 0$ ，不符合题意；

所以该分式方程的解为 $x = -3$ 。

21. 解方程： $\sqrt{x+7} - \sqrt{3-x} = 2$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程，掌握解无理方程的步骤是解题的关键。

先将无理方程化成整式方程求解，然后再检验即可解答。

【详解】 解： $\sqrt{x+7} - \sqrt{3-x} = 2$

$$\sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{3-x}$$

$$(\sqrt{x+7})^2 = (2 + \sqrt{3-x})^2$$

$$x+7 = 4+3-x+4\sqrt{3-x}$$

$$2x = 4\sqrt{3-x}$$

$$x = 2\sqrt{3-x}$$

$$x^2 = 4(3-x)$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

$$(x+6)(x-2) = 0,$$

所以 $x = -6$ 或 $x = 2$ ；

检验，当 $x = -6$ 时，左边 $= \sqrt{-6+7} - \sqrt{3-(-6)} = 1-3 = -2 \neq 2$ ，不合题意，舍弃；

当 $x = 2$ 时，左边 $= \sqrt{2+7} - \sqrt{3-2} = 3-1 = 2$ ，符合题意；

所以该方程的解为 $x = 2$ 。

22. 解方程组: $\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 = 9 \\ x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x = \frac{18}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x = -\frac{18}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 首先把方程组的每个方程降次，然后根据二元一次方程的求解方法，求出原方程组的解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 = 9 \textcircled{1} \\ x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \textcircled{2} \end{cases}$

由①可得 $(2x + y)^2 = 9$ ，则: $2x + y = \pm 3$,

由②可得 $(x + 6y)(x - y) = 0$ ，则: $x = -6y$ 或 $x = y$,

(1) 把 $x = -6y$ 代入 $2x + y = \pm 3$,

解得 $\begin{cases} x = \frac{18}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{18}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases}$.

(2) 把 $x = y$ 代入 $2x + y = \pm 3$,

解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x = \frac{18}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x = -\frac{18}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

【点睛】 此题主要考查了高次方程的求解方法，要熟练掌握，解高次方程一般要降次，即把它转化成二次方程或一次方程. 也有的通过因式分解来解.

四、解答题 (23-24 每题 8 分，25-26 每题 12 分，共 40 分)

23. 上海首条中运量公交线路 71 路已正式开通. 该线路西起沪青平公路申昆路，东至延安东路中山东一路，全长 17.5 千米. 71 路车行驶于专设的公交车道，又配以专用的公交信号灯. 经测试，早晚高峰时段 71 路车在专用车道内行驶的平均速度比在非专用车道每小时快 6 千米，因此单程可节省时间 22.5 分钟. 求早晚高峰时段 71 路车在专用车道内行驶的平均车速.

【答案】20 千米/时.

【解析】

【分析】设早晚高峰时段 71 路在专用车道内行驶的平均车速 x 千米/时. 则非专用车道内行驶的平均速度是 $(x-6)$ 千米/时, 根据“单程可节省时间 22.5 分钟”列出方程并解答.

【详解】解: 设早晚高峰时段 71 路在专用车道内行驶的平均车速 x 千米/时.

根据题意, 可列方程 $\frac{17.5}{x-6} - \frac{17.5}{x} = \frac{22.5}{60}$.

整理得 $x^2 - 6x - 280 = 0$.

解得 $x_1 = 20$, $x_2 = -14$.

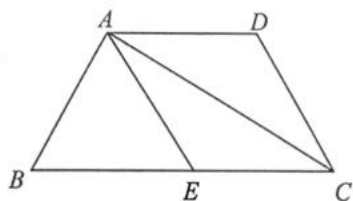
经检验 $x_1 = 20$, $x_2 = -14$ 都是原方程的解.

因为速度不能负数, 所以取 $x = 20$.

答: 71 路在专用车道内行驶的平均车速 20 千米/时.

【点睛】本题考查了分式方程的应用, 根据题意找到合适的等量关系是解题的关键.

24. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 E 为 BC 的中点.



(1) 求证: 四边形 $AECD$ 是菱形;

(2) 联结 BD , 如果 BD 平分 $\angle ABC$, $AD = 2$, 求 BD 的长.

【答案】(1) 见解析; (2) $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据菱形的判定方法有三种: ①定义: 一组邻边相等的平行四边形是菱形; ②四边相等; ③对角线互相垂直平分的四边形是菱形, 据此判断即可.

(2) 此题有两种解决方法, 方法一: 证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 方法二: 证明 $\angle BDC$ 为直角.

【详解】(1) 证明: $\because \angle BAC = 90^\circ$, 点 E 为 BC 的中点, $\therefore AE = EC = \frac{1}{2}BC$

$\because BC = 2AD$, $\therefore AD = \frac{1}{2}BC$, $\therefore AD = EC$,

又 $\because AD \parallel BC$, $\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形

$\therefore AE = EC$, $\therefore$ 四边形 $AECD$ 是菱形

(2) 解:方法一: $\because AD \parallel BC, AD < BC \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形.

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC, \therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\because AD \parallel BC, \therefore \angle ADB = \angle DBC, \therefore \angle ABD = \angle ADB, \therefore AB = AD$$

四边形 $AECD$ 是菱形, $\therefore AD = DC = 2$.

$$\therefore AB = DC = 2$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $\therefore AC = BD$

$$\therefore BC = 2AD = 4, \therefore BD = AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{方法二: } \because BD \text{ 平分 } \angle ABC, \therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\because AD \parallel BC, \therefore \angle ADB = \angle DBC, \therefore \angle ABD = \angle ADB, \therefore AB = AD$$

$$\therefore BC = 2AD = 2AB = 4, \therefore \angle ACB = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB = 60^\circ, \text{ 即 } \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\because \text{四边形 } AECD \text{ 是菱形, } \therefore AD = DC = 2, \therefore \angle DAC = \angle DCA$$

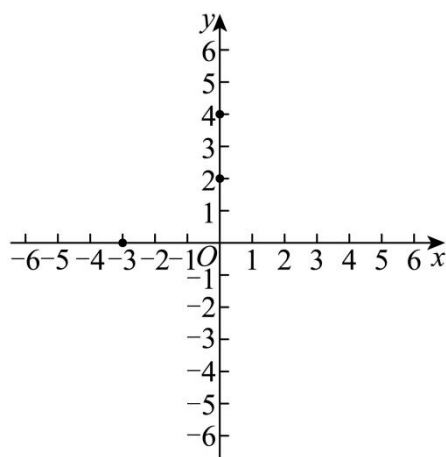
$$\because AD \parallel BC, \therefore \angle DAC = \angle ACB, \text{ 即 } \angle DCA = \angle DAC = \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle DCA - \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

【点睛】 此题考查菱形的判定与性质, 解题关键在于结合题意运用菱形的判定与性质即可.

25. 如图, 直线 AB 经过点 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, 2)$, 经过点 $D(0, 4)$ 并且与 y 轴垂直的直线 CD 与直线 AB 交于第一象限内点 C .



- (1) 求直线 AB 的表达式;
- (2) 在 x 轴上有一点 Q , 若 $\triangle AQC$ 的面积为 8, 求点 Q 的坐标;
- (3) 点 P 在 x 轴上, 在平面内是否存在点 H , 使得以点 A 、 C 、 P 、 H 为顶点的四边形是矩形, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = \frac{2}{3}x + 2$

(2) Q 坐标为 $(1, 0)$ 或 $(-7, 0)$

(3) $\left(\frac{17}{3}, 0\right)$ 或 $(3, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 设直线 AB 解析式为 $y = kx + b$, 把 A 与 B 坐标代入求出 k 与 b 的值, 即可确定出直线 AB 解析式;

(2) 设 $Q(q, 0)$, 过 C 作 $CM \perp AQ$, 表示出 AQ , 由直线 AB 解析式求出 C 坐标, 求出 CM 的长, 根据三角形 AQC 面积为 8 求出 q 的值, 确定出满足题意 Q 的坐标即可;

(3) 分当 AP 为对角线时和当 AP 为边时两种情况求解即可.

【小问 1 详解】

设直线 AB 解析式为 $y = kx + b$,

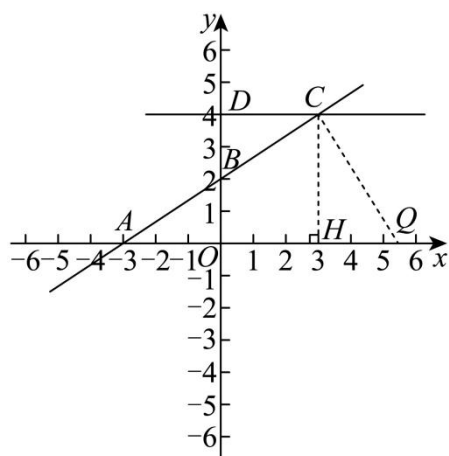
把 $A(-3, 0)$, $B(0, 2)$ 代入得 $\begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ b = 2 \end{cases}$,

则直线 AB 解析式为 $y = \frac{2}{3}x + 2$;

【小问 2 详解】

设 $Q(q, 0)$ ，过 C 作 $CH \perp AQ$ ，如图所示，



对于直线 AB 解析式 $y = \frac{2}{3}x + 2$ ，把 $y = 4$ 代入得： $x = 3$ ，即 $C(3, 4)$ ，

$$\therefore AQ = |q + 3|, \quad CH = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle AQC} = \frac{1}{2} AQ \cdot CH = 2|q + 3| = 8, \quad \text{即 } |q + 3| = 4,$$

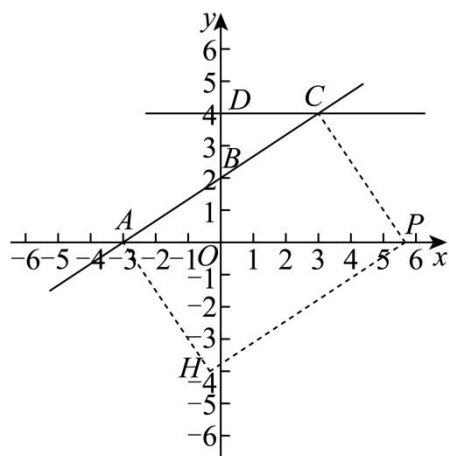
解得： $q = 1$ 或 $q = -7$ ，

则 Q 坐标为 $(1, 0)$ 或 $(-7, 0)$ ；

【小问 3 详解】

设 $P(m, 0)$ ，分两种情况考虑，

①当 AP 为对角线时，如图所示：



$\therefore$ 以点 A 、 C 、 P 、 H 为顶点的四边形是矩形，

$$\therefore \angle ACP = 90^\circ,$$

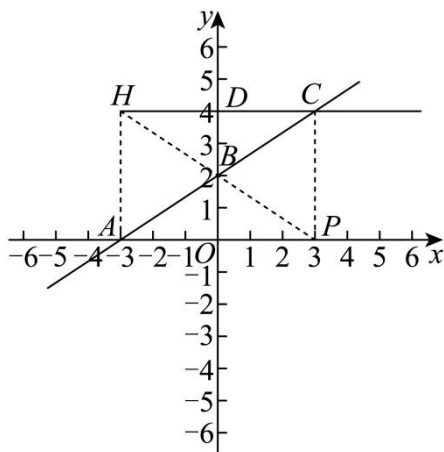
$$\therefore AC^2 + PC^2 = AP^2,$$

$$\therefore (-3-3)^2 + (0-4)^2 + (3-m)^2 + (4-0)^2 = (-3-m)^2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{17}{3},$$

$$\therefore P\left(\frac{17}{3}, 0\right).$$

②当 AP 为边时，如图所示：



$\therefore$ 以点 A 、 C 、 P 、 H 为顶点的四边形是矩形，

$$\therefore \angle APC = \angle HCP = 90^\circ,$$

$$\therefore m = 3,$$

$$\therefore P(3, 0).$$

综上所述，点 P 的坐标为 $\left(\frac{17}{3}, 0\right)$ 或 $(3, 0)$ 。

【点睛】此题考查了待定系数法求一次函数解析式，坐标与图形的性质，矩形的性质，勾股定理，数形结合是解本题的关键。

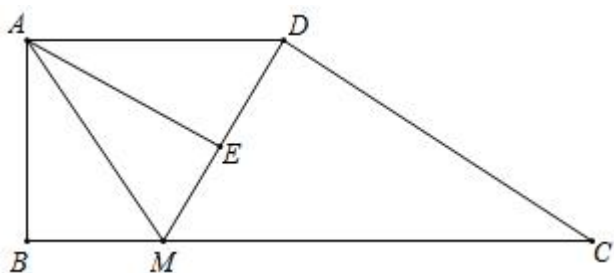
26. 已知，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 10$ ， $AD = 5$ ， M 是 BC 边上的任意一点，联结 DM ，联结 AM 。

(1) 若 AM 平分 $\angle BMD$ ，求 BM 的长；

(2) 过点 A 作 $AE \perp DM$ ，交 DM 所在直线于点 E 。

①设 $BM = x$ ， $AE = y$ 求 y 关于 x 的函数关系式；

②联结 BE ，当 $\triangle ABE$ 是以 AE 为腰的等腰三角形时，请直接写出 BM 的长。



【答案】(1) 1 或 9; (2) ① $y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34}$. ② 1 或 9 或 4.

【解析】

【分析】(1) 考虑 $\angle DMB$ 为锐角和钝角两种情况即可解答;

(2) ① 作 $MH \perp AD$ 于 H , 根据勾股定理, 用被开方式含 x 的二次根式表示 DM , 根据 $\triangle ADM$ 面积的两种算法建立等式, 即可求出 y 关于 x 的函数关系式; ② 分 $AB=AE$ 和 $EA=EB$ 两种情况讨论求解.

【详解】解: (1) 如图 1 中, 作 $DH \perp BC$ 于 H . 则四边形 $ABHD$ 是矩形, $AD=BH=5$, $AB=DH=3$.

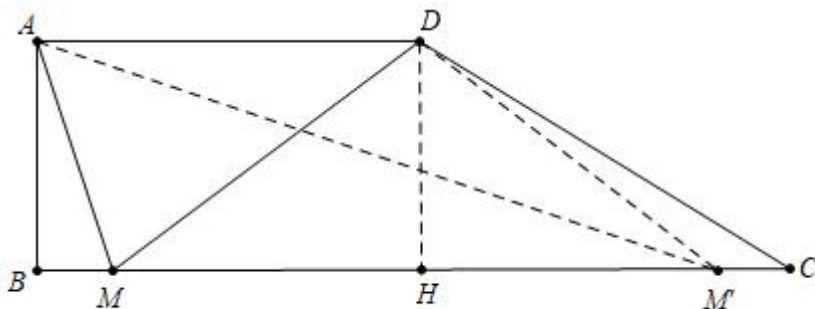


图1

当 MA 平分 $\angle DMB$ 时, 易证 $\angle AMB = \angle AMD = \angle DAM$, 可得 $DA = DM = 5$,

在 $Rt\triangle DMH$ 中, $DM = AD = 5$, $DH = 3$,

$$\therefore MH = \sqrt{DM^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BM = BH - MH = 1,$$

当 AM' 平分 $\angle BM'D$ 时, 同法可证: $DA = DM'$, $HM' = 4$,

$$\therefore BM' = BH + HM' = 9.$$

综上所述, 满足条件的 BM 的值为 1 或 9.

(2) ① 如图 2 中, 作 $MH \perp AD$ 于 H .

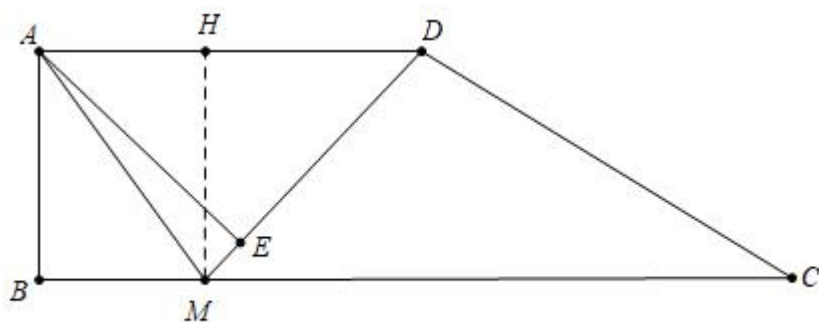


图2

在 $Rt\triangle DMH$ 中, $DM = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 34}$,

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot AE,$$

$$\therefore 5 \times 3 = y \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 34}$$

$$\therefore y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34}.$$

②如图 3 中, 当 $AB=AE$ 时, $y=3$, 此时 $5 \times 3 = 3\sqrt{x^2 - 10x + 34}$,

解得 $x=1$ 或 9 .

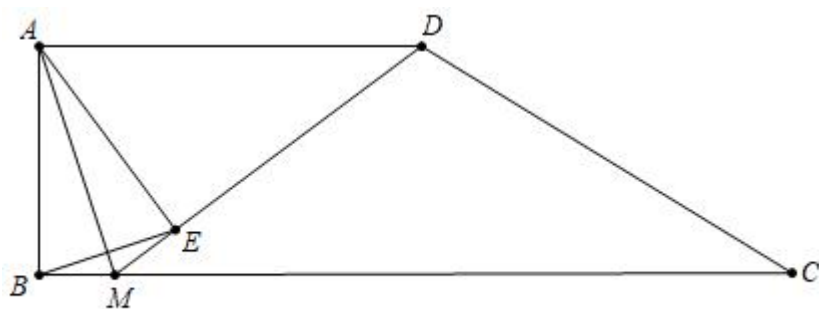


图3

如图 4 中, 当 $EA=EB$ 时, $DE=EM$,

$$\therefore AE \perp DM,$$

$$\therefore DA=AM=5,$$

在 $Rt\triangle ABM$ 中, $BM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

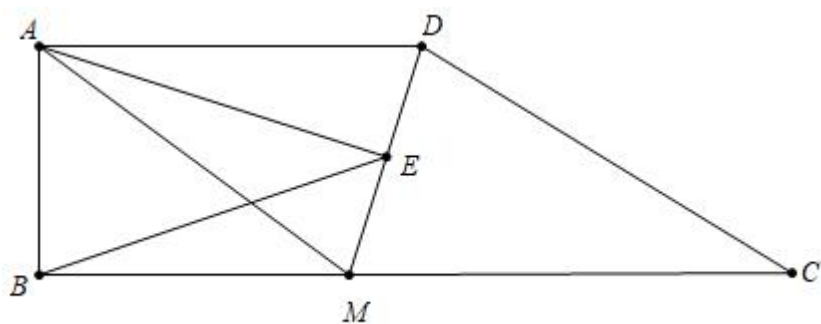


图4

综上所述，满足条件的 BM 的值为 1 或 9 或 4.

故答案为 (1) 1 或 9; (2) ① $y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34}$. ② 1 或 9 或 4.

【点睛】 本题考查了直角梯形的性质，矩形的判定与性质，勾股定理，无理方程，等腰三角形的性质.