

2024-2025 学年上海市杨浦区兰生中学八年级（下）月考数学试卷（3 月份）

一、填空题：（3*12=36 分）

1. 若关于 x 的函数 $y = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1$ 是一次函数，则 m 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的定义，掌握一次函数的一次项系数不能为 0 成为解题的关键.

由于函数 $y = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1$ 是一次函数，则二次项系数为 0 且一次项系数不为 0，据此列不等式组求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的函数 $y = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1$ 是一次函数，

$$\therefore \begin{cases} m^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ m + \frac{1}{2} \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得: } m = \frac{1}{2},$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

2. 若关于 x 的一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $(2, -1)$ ，并平行于直线 $y = -\frac{2}{3}x + 11$ ，那么函数 $y = \frac{b}{kx}$ 解析式为_____.

【答案】 $y = -\frac{1}{2x}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数解析式，一次函数图像的平移问题，两平行直线解析式中的一次项系数相同，据此可得 k 的值，再利用待定系数法求出 b 的值即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -\frac{2}{3}x + 11$ ，

$$\therefore k = -\frac{2}{3},$$

$\because$ 直线 $y = kx + b$ 的图像经过点 $(2, -1)$ ，

$$\therefore -\frac{2}{3} \times 2 + b = -1,$$

$$\therefore b = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{函数 } y = \frac{b}{kx} \text{ 解析式为 } y = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}x} = -\frac{1}{2x},$$

$$\text{故答案为: } y = -\frac{1}{2x}.$$

3. 已知: 关于 x 的函数 $y = (2m-3)x + (1-m)$, y 随 x 的增大而减少, 并且与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $1 < m < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 根据一次函数 $y = kx + b$ 的图象在坐标平面内的位置以及性质, 得到关于 k 、 b 的一元一次不等式组, 解不等式组即可.

【详解】 解: $\because y = (2m-3)x + (1-m)$, y 随 x 的增大而减少, 并且与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴,

$$\therefore \begin{cases} 2m-3 < 0 \\ 1-m < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得, } 1 < m < \frac{3}{2},$$

$$\text{故答案为: } 1 < m < \frac{3}{2}.$$

4. 当 $x > m$ 时, 函数 $y = \frac{2}{3}x + 1$ 的图像都在 x 的上方, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数图象上点的坐标特征, 先求出函数的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-\frac{3}{2}, 0)$, 再根据函数的性质即可得出答案.

【详解】 解: 当 $y = 0$ 时, 即 $0 = \frac{2}{3}x + 1$,

$$\text{解得: } x = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{函数的图象与 } x \text{ 轴的交点坐标为 } \left(-\frac{3}{2}, 0\right),$$

$\therefore$ 当 $x > m$ 时, 函数 $y = \frac{2}{3}x + 1$ 的图象都在 x 的上方,

$$\therefore m \geq -\frac{3}{2}.$$

故答案为: $m \geq -\frac{3}{2}$.

5. 若关于 x 的方程 $(k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + \frac{1}{4} = 0$ 无实根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq -1$ 或 $-1 \geq k$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式的应用, 分类讨论是解题关键.

分两种情况讨论: 当 $k^2 - 1 = 0$ 时, 方程为一元一次方程; 当 $k^2 - 1 \neq 0$ 时, 方程是一元二次方程, 分别求出 k 的取值范围即可.

【详解】 解: 当 $k^2 - 1 = 0$ 且 $k + 1 \neq 0$ 时, 即 $k = 1$ 时, 原方程化为 $2x + \frac{1}{4} = 0$, 这是一元一次方程, 有实数根;

当 $k = -1$ 时, 原方程无实数根,

当 $k^2 - 1 = 0$ 且 $k + 1 = 0$ 时, 即 $k = -1$ 时, 原方程化为 $\frac{1}{4} = 0$, 此等式不成立, 方程无解, 但这种情况不属于一元二次方程的无实根情况;

当 $k^2 - 1 \neq 0$, 即 $k \neq \pm 1$ 时, 原方程 $(k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + \frac{1}{4} = 0$ 是一元二次方程,

因为方程无实根, 所以 $\Delta = (k + 1)^2 - 4 \times (k^2 - 1) \times \frac{1}{4} < 0$, 即 $\Delta = 2k + 2 < 0$,

解得: $k < -1$;

综上, k 的取值范围是 $k \leq -1$,

故答案为: $k \leq -1$.

6. 已知直线 l 经过 $(2, 0)$ 和 $(0, -3)$, 把直线 l 沿 x 轴向左平移 2 个单位, 再向下平移一个单位得到直线 l' , 则直线 l' 的解析式为_____.

【答案】 $y = \frac{3}{2}x - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 一次函数的平移, 先求出直线 l 的解析式, 再根据一次函数平移规律即可解答.

【详解】 解: 设直线 l 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$\therefore$ 直线 l 经过 $(2,0)$ 和 $(0,-3)$, 则 $\begin{cases} 0 = 2k + b \\ -3 = b \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ b = -3 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x - 3$,

把直线 l 沿 x 轴向左平移 2 个单位, 再向下平移一个单位得到直线 l' ,

则直线 l' 的解析式为 $y = \frac{3}{2}(x+2) - 3 - 1 = \frac{3}{2}x - 1$,

故答案为: $y = \frac{3}{2}x - 1$.

7. 若关于 x 的一次函数 $y = (m-1)x + m - 5$ 不经过第二象限, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $1 < m \leq 5$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与系数的关系, 根据一次函数 $y = (m-1)x + m - 5$ 的图象不经过第二象限, 可得 $m-1 > 0$ 且 $m-5 \leq 0$, 进一步求解即可确定 m 的取值范围.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = (m-1)x + m - 5$ 的图象不经过第二象限,

$\therefore m-1 > 0$ 且 $m-5 \leq 0$,

解得 $1 < m \leq 5$.

故答案为: $1 < m \leq 5$.

8. 设等腰三角形周长为 a , 则它的底边长 y 与腰长 x 之间的函数解析式为_____, 定义域是_____.

【答案】 ①. $y = a - 2x$ ②. $\frac{a}{4} < x < \frac{a}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的定义以及函数关系式, 一元一次不等式组的解法, 正确求得函数关系式是关键. 根据周长等于三边之和可得出 y 和 x 的关系式.

【详解】 解: 由题意得: $a = 2x + y$

可得: $y = a - 2x$,

$$\therefore \begin{cases} x > 0 \\ a - 2x > 0 \\ 2x > a - 2x \\ a > 0 \end{cases},$$

解得: $\frac{a}{4} < x < \frac{a}{2}$,

故答案为: $y = a - 2x$, $\frac{a}{4} < x < \frac{a}{2}$.

9. 方程 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 0$ 或 $x = -\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了求解较复杂的分式方程, 观察方程两边的特点, 先变形再将方程通分转化为整式方程求解, 最后检验即可.

【详解】 解: 原方程可化为: $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{x-3}{x+3} - \frac{x-4}{x+4}$,

通分得: $\frac{(x-1)(x+2) - (x+1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-3)(x+4) - (x+3)(x-4)}{(x+3)(x+4)}$,

化简得: $\frac{2x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x}{(x+3)(x+4)}$,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, 方程两边都为 0, 等式成立,

当 $x \neq 0$ 时, $(x+1)(x+2) = (x+3)(x+4)$,

去括号得: $x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12$,

解得: $x = -\frac{5}{2}$,

经检验, $x = 0$, $x = -\frac{5}{2}$ 都是原方程的解,

故答案为: $x = 0$ 或 $x = -\frac{5}{2}$.

10. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2} = 3$ 的解是正数, 则 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m > -6$ 且 $m \neq -4$

【解析】

【分析】 先解分式方程得到方程的根为: $x = m + 6$, 再根据方程的解为正数及分母不为 0, 列不等式组, 从而可得答案.

【详解】解： $\because \frac{2x+m}{x-2}=3,$

$$\therefore 2x+m=3x-6,$$

解得： $x=m+6,$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2}=3$ 的解是正数,

$$\therefore m+6>0 \text{ 且 } m+6 \neq 2,$$

解得： $m>-6$ 且 $m \neq -4.$

故答案为： $m>-6$ 且 $m \neq -4.$

【点睛】 本题考查的是根据分式方程的解的情况求解参数的取值范围，易错点是不注意分式方程产生增根时字母参数的取值要排除.

11. 方程 $\frac{19x-x^2}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$ 的解是_____.

【答案】 $x_1=3, x_2=4, x_3=6-\sqrt{29}, x_4=6+\sqrt{29}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，令 $y=\frac{19-x}{x+1}$ ，则可推出 $xy(x+y)=84$ ，再求出 $x+y+xy=19$ ，

则可解方程得到 $xy=12$ 或 $xy=7$ ， $x+y=7$ 或 $x+y=12$ ，据此得到关于 x 的分式方程，解方程即可得到答案.

【详解】 解： 令 $y=\frac{19-x}{x+1},$

$$\therefore \frac{19x-x^2}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84,$$

$$\therefore \frac{x(19-x)}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84,$$

$$\therefore xy(x+y)=84,$$

$$\therefore x+y+xy=\frac{19x-x^2}{x+1}+x+\frac{19-x}{x+1}=\frac{19x-x^2+x^2+x+19-x}{x+1}=19,$$

$$\therefore xy(19-xy)=84,$$

$$\therefore (xy-12)(xy-7)=0,$$

$$\therefore xy = 12 \text{ 或 } xy = 7,$$

$$\therefore x + y = 7 \text{ 或 } x + y = 12,$$

$$\therefore x + \frac{19-x}{x+1} = 7 \text{ 或 } x + \frac{19-x}{x+1} = 12,$$

$$\therefore x^2 + x + 19 - x = 7x + 7 \text{ 或 } x^2 + x + 19 - x = 12x + 12,$$

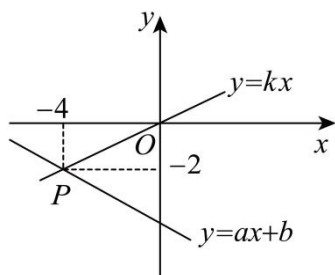
$$\therefore x^2 - 7x + 12 = 0 \text{ 或 } x^2 - 12x + 7 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6 - \sqrt{29}, x_4 = 6 + \sqrt{29},$$

经检验, $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6 - \sqrt{29}, x_4 = 6 + \sqrt{29}$ 是原方程的解, 且符合题意,

故答案为: $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6 - \sqrt{29}, x_4 = 6 + \sqrt{29}$.

12. 如图, 函数 $y = ax + b$ 和 $y = kx$ 的图像交于点 P , 则不等式 $(k - a)x > b$ 的解集是_____.



【答案】 $x > -4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与一元一次不等式的关系, 利用数形结合思想解答是解题的关键. 根据两函数的交点坐标, 结合图象即可确定出所求不等式的解集.

【详解】 解: 由图象可知函数 $y = ax + b$ 和 $y = kx$ 的图像交点 $P(-4, -2)$,

$$\therefore (k - a)x > b,$$

$$\therefore kx > ax + b,$$

观察图像得: 当 $x > -4$ 时, 函数 $y = kx$ 的图像位于函数 $y = ax + b$ 的图像的上方,

$\therefore$ 不等式 $kx > ax + b$ 的解集是 $x > -4$, 即不等式 $(k - a)x > b$ 的解集是 $x > -4$,

故答案为: $x > -4$.

二、选择题 (3*4=12 分)

13. 一次函数 $y = kx + 2$ 经过点 $(1, 1)$, 那么这个一次函数 ()

A. y 随 x 的增大而增大

B. 图像与 y 轴交点在 x 轴的下方

C. 图像与 x 轴交点在 y 轴的左侧

D. 图像不经过第三象限

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与坐标轴的交点问题，一次函数的增减性，求一次函数解析式，一次函数图像与其系数的关系，先利用待定系数法求出一次函数解析式，进而可判断增减性和经过的象限，再求出与坐标轴的交点坐标即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = kx + 2$ 经过点 $(1, 1)$,

$$\therefore k + 2 = 1,$$

$$\therefore k = -1,$$

$$\therefore \text{原一次函数解析式为 } y = -x + 2,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，图像经过第一、二、四象限，不经过第三象限，故 A 说法错误，不符合题意；D 说法正确，符合题意；

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 2, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } x = 2,$$

$$\therefore \text{一次函数 } y = -x + 2 \text{ 与 } x \text{ 轴, } y \text{ 轴分别交于 } (2, 0), (0, 2),$$

$\therefore$ 图像与 y 轴交点在 x 轴的上方，图像与 x 轴交点在 y 轴的右侧，故 B、C 说法错误，不符合题意；
故选：D.

14. 关于 x 的方程 $ax^4 + bx^2 + c = 0 (a \neq 0)$ 有解的条件是 ()

A. $b^2 - 4ac \geq 0$, 且 a 、 b 异号

B. a 、 b 同号, 且 a 、 c 异号

C. $b^2 - 4ac \geq 0$, 且 a 、 b 、 c 同为正数或同为负数

D. $b^2 - 4ac \geq 0$, 且 a 、 b 、 c 不同为正数或不同为负数

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了高次方程的解，解题时要能熟练掌握并能转化为一元二次方程进行分析是关键.

依据题意，令 $t = x^2$ ，从而方程 $ax^4 + bx^2 + c = 0$ 可化为 $at^2 + bt + c = 0$ ，又 $t = x^2 \geq 0$ ，故关于 t 的方程 $at^2 + bt + c = 0$ 有非负解，进而可以判断得解.

【详解】解：由题意，令 $t = x^2$ ，

$\therefore$ 方程 $ax^4 + bx^2 + c = 0$ 可化为 $at^2 + bt + c = 0$ ，

又 $\because t = x^2 \geq 0$ ，

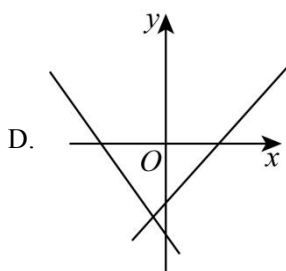
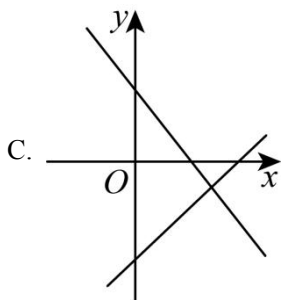
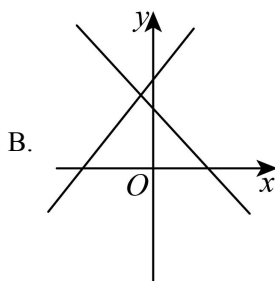
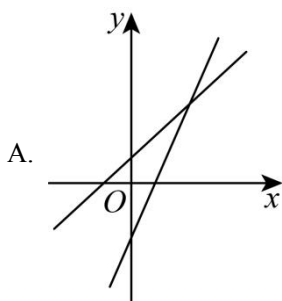
$\therefore$ 关于 t 的方程 $at^2 + bt + c = 0$ 有非负解，

又 $\because t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}$ ， $t_1 t_2 = \frac{c}{a}$ ，

$\therefore b^2 - 4ac \geq 0$ ，且 a 、 b 、 c 不同为正数或不同为负数，

故选：D.

15. 函数 $y=ax+b$ 与 $y=bx+a$ 的图象在同一坐标系内的大致位置正确的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据 a 、 b 的符号进行判断，两函数图象能共存于同一坐标系的即为正确答案.

【详解】解：分四种情况：

①当 $a > 0$ ， $b > 0$ 时， $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、三象限， $y=bx+a$ 的图象经过第一、二、三象限，无选项符合；

②当 $a > 0$ ， $b < 0$ 时， $y=ax+b$ 的图象经过第一、三、四象限； $y=bx+a$ 的图象经过第一、二、四象限，C 选项符合；

③当 $a < 0$ ， $b > 0$ 时， $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限； $y=bx+a$ 的图象经过第一、三、四象限，C 选项符合；

④当 $a < 0$, $b < 0$ 时, $y = ax + b$ 的图象经过第二、三、四象限; $y = bx + a$ 的图象经过第二、三、四象限, 无选项符合.

故选 C.

【点睛】一次函数 $y = kx + b$ 的图象有四种情况:

- ①当 $k > 0$, $b > 0$, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、三象限;
- ②当 $k > 0$, $b < 0$, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、三、四象限;
- ③当 $k < 0$, $b > 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限;
- ④当 $k < 0$, $b < 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限.

16. 在下列方程中, 无实数根的方程的个数是 ()

① $\sqrt{x+4} = \sqrt{x}$;

② $\sqrt{2x-5} - \sqrt{2-x} = 0$;

③ $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$;

④ $\sqrt{1-3x} = x-1$;

⑤ $\sqrt{x+4} = -x$.

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了无理方程, 分式方程, 熟知相关方程的解法是解题的关键.

分别根据无理方程, 分式方程的求解方法求解判断即可.

【详解】解: ① $\sqrt{x+4} = \sqrt{x}$, 两边同时平方得 $x+4 = x$, 移项后 $4 = 0$, 此等式不成立, 所以方程①无实数根, 符合题意;

② $\sqrt{2x-5} - \sqrt{2-x} = 0$, 即 $\sqrt{2x-5} = \sqrt{2-x}$, 两边同时平方得 $2x-5 = 2-x$, 解得 $x = \frac{7}{3}$, 检验: 当 $x = \frac{7}{3}$ 时, $2x-5 = 2 \times \frac{7}{3} - 5 = \frac{14}{3} - 5 = -\frac{1}{3} < 0$, $\sqrt{2x-5}$ 无意义, 所以方程②无实数根, 符合题意;

③ $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, 方程两边同乘 $(x-1)$ 得 $x = 1$, 检验: 当 $x = 1$ 时, 分母 $x-1 = 0$, 所以 $x = 1$ 是增根, 方程③无实数根, 符合题意;

④ $\sqrt{1-3x} = x-1$, 两边同时平方得 $1-3x = (x-1)^2$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, 检验: 当 $x = 0$ 时, $\sqrt{1-3 \times 0} = 1$,

$0-1=-1$, $1 \neq -1$; 当 $x=-1$ 时, $\sqrt{1-3 \times (-1)}=2$, $-1-1=-2$, $2 \neq -2$, 所以方程④无实数根, 符合题意;

⑤ $\sqrt{x+4}=-x$, 两边同时平方得 $x+4=x^2$, 移项化为一元二次方程的一般形式 $x^2-x-4=0$, 根据求根

公式 $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$, 检验: 当 $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ 时, $\sqrt{x+4}>0$, $-x=-\frac{1+\sqrt{17}}{2}<0$, 不满足等

式; 当 $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ 时, $\sqrt{x+4}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{17}}{2}+4}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}$, $-x=-\frac{1-\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$, 满足等式, 所

以方程⑤有实数根, 不符合题意.

综上, 无实数根的方程有①②③④, 共 4 个,

故选: C.

三、计算题

17. 解关于 x 的方程: $a^2(x-2)-3a=x+1$.

【答案】 $x=\frac{2a+1}{a-1}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程, 因式分解, 按照去括号, 移项, 合并同类项, 系数化为 1 的步骤解方程即可.

【详解】 解: $a^2(x-2)-3a=x+1$

去括号得: $a^2x-2a^2-3a=x+1$,

移项得: $a^2x-x=2a^2+3a+1$,

合并同类项得: $(a^2-1)x=(2a+1)(a+1)$,

系数化为 1 得: $x=\frac{2a+1}{a-1}$.

18. 解方程: $3x^4+4x^3-9x^2+4x+3=0$.

【答案】 $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解高次方程, 先把原方程两边同时除以 x^2 , 则可把原方程变形为

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 9 = 0, \text{ 设 } x + \frac{1}{x} = m, \text{ 则 } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = m^2, \text{ 则进一步可把原方程化为}$$

$3m^2 + 4m - 15 = 0$, 解方程求出 m 的值, 进而得到关于 x 的分式方程, 解方程即可得到答案.

【详解】解: $\because 3x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 4x + 3 = 0$,

$\therefore$ 当 $x = 0$, 原方程左边 $= 3 \neq$ 原方程右边,

$\therefore x \neq 0$,

把原方程两边同时除以 x^2 得 $3x^2 + 4x - 9 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$,

$$\therefore 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 9 = 0,$$

设 $x + \frac{1}{x} = m$, 则 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = m^2$,

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = m^2,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2,$$

$$\therefore 3(m^2 - 2) + 4m - 9 = 0,$$

$$\therefore 3m^2 + 4m - 15 = 0,$$

解得 $(3m - 5)(m + 3) = 0$,

$$\therefore m_1 = \frac{5}{3}, m_2 = -3,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{5}{3} \text{ 或 } x + \frac{1}{x} = -3,$$

$$\therefore x^2 - \frac{5}{3}x + 1 = 0 \text{ ① 或 } x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ ②},$$

由判别式可知方程①无解, 解方程②得 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$,

经检验, $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的解, 且符合题意,

$$\therefore \text{原方程的解为 } x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

19. 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+1} = 5 \\ xy + x - 3y = \frac{19}{6} \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解二元二次方程组，解分式方程，先把方程①左边通分，再把方程②代入方程③中求出 x 、 y 的关系式，再代入②中解方程即可得到答案.

【详解】 解:
$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+1} = 5 \text{①} \\ xy + x - 3y = \frac{19}{6} \text{②} \end{cases}$$

由①得 $\frac{x-3+y+1}{xy-3y+x-3} = 5 \text{③},$

把②代入③得: $\frac{x-3+y+1}{\frac{19}{6}-3} = 5,$

$\therefore x-3+y+1 = \frac{5}{6},$

$\therefore y = \frac{17}{6} - x,$

$\therefore x\left(\frac{17}{6} - x\right) + x - 3\left(\frac{17}{6} - x\right) = \frac{19}{6},$

$\therefore \frac{17}{6}x - x^2 + x - \frac{17}{2} + 3x = \frac{19}{6},$

$\therefore 6x^2 - 41x + 70 = 0,$

$\therefore (2x-7)(3x-10) = 0,$

解得 $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{10}{3},$

当 $x = \frac{7}{2}$ 时, $y = -\frac{2}{3},$ 当 $x = \frac{10}{3}$ 时, $y = -\frac{1}{2},$

经检验, $\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 都是原方程的解, 且符合题意,

$\therefore$ 原方程的解为 $\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

20. 解方程: $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$.

【答案】 $x = 8$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程, 先把原方程变形为 $\sqrt{2x+9} = \sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}$, 再把方程两边同时平方并化简得到 $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+1} = 6$, 则 $(x-4)(x+1) = 36$, 据此解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because \sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$,

$$\therefore \sqrt{2x+9} = \sqrt{x-4} + \sqrt{x+1},$$

$$\therefore 2x+9 = x-4 + x+1 + 2\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+1},$$

$$\therefore \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+1} = 6,$$

$$\therefore (x-4)(x+1) = 36,$$

$$\therefore x^2 - 4x + x - 4 = 36,$$

$$\therefore x^2 - 3x - 40 = 0,$$

$$\therefore (x-8)(x+5) = 0,$$

解得 $x = 8$ 或 $x = -5$,

$$\because x-4 \geq 0, \quad x+1 \geq 0, \quad 2x+9 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq 4,$$

$$\therefore x = 8.$$

四、解答题 (4+6+6+6+6+8=36)

21. 已知函数 $y-b = k(x+1) (k \neq 0)$ 的图像过点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 且与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{9}{4}$, 求此函数

的解析式.

【答案】 $y = 2x - 3$ 或 $y = -2x + 3$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 数形结合根据三角形的面积公式求出 k 值是解题的关键.

先根据一次函数 $y - b = k(x + 1) (k \neq 0)$ 的图象过点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 求出 k 与 b 的关系, 再用 k 表示出函数与 y 轴的交点, 根据三角形的面积公式及绝对值的性质求出 k 的值即可求解.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y - b = k(x + 1) (k \neq 0)$ 的图象过点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,

$$\therefore 0 - b = k\left(\frac{3}{2} + 1\right), \quad b = -\frac{5}{2}k,$$

$$\therefore y - b = k(x + 1) \text{ 可化为 } y = k(x + 1) - \frac{5}{2}k,$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = -\frac{3}{2}k,$$

$\because$ 函数图象与坐标轴围成的三角形面积为 $\frac{9}{4}$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \left| -\frac{3}{2}k \right| = \frac{9}{4}, \text{ 解得 } k = \pm 2,$$

$\therefore$ 此函数的解析式为: $y = 2x + 2 - 5 = 2x - 3$ 或 $y = -2x - 2 + 5 = -2x + 3$.

22. 关于 x 整系数方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有实根 α, β , 且 $\alpha^2 + \beta^2 < 4$, 求 a, b 的值.

【答案】 $a = -1$ 或 $a = 0$ 或 $a = 1$, $b = -1$ 或 $b = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系, 根的判别式, 解一元一次不等式组, 先根据根与系数的关系得到 $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = b$, 再由 $\alpha^2 + \beta^2 < 4$ 得到 $a^2 - 2b < 4$, 由判别式得到 $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$, 据此求出 b 的取值范围, 再根据 a, b 为整数讨论求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 整系数方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有实根 α, β ,

$$\therefore \alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b,$$

$$\therefore (a + \beta)^2 = a^2,$$

$$\therefore a^2 + 2a\beta + \beta^2 = a^2,$$

$$\therefore a^2 + \beta^2 = a^2 - 2b,$$

$$\therefore a^2 + \beta^2 < 4,$$

$$\therefore a^2 - 2b < 4,$$

$\therefore$ 原方程有两个实数根,

$$\therefore \Delta = a^2 - 4b \geq 0,$$

$$\therefore 4b \leq a^2 < 4 + 2b \text{ 且 } 4 + 2b > 0$$

$$\therefore -2 < b < 2,$$

$\therefore a, b$ 都是整数,

$\therefore$ 当 $b = -1$ 时, $a^2 < 2$, 则此时 $a = -1$ 或 $a = 0$ 或 $a = 1$;

当 $b = 0$ 时, $a^2 < 4$, 则此时 $a = -1$ 或 $a = 0$ 或 $a = 1$;

当 $b = 1$ 时, $a^2 < 6$ 且 $a > 4$, 此时不存在 a 满足题意;

综上所述, $a = -1$ 或 $a = 0$ 或 $a = 1$, $b = -1$ 或 $b = 0$.

23. 已知直线 $y = 3x$ 和双曲线 $y = \frac{2}{x}$, 把直线向左平行移动 5 个单位.

(1) 求平移后所得的直线的函数解析式.

(2) 平移后所得的直线与已知双曲线是否相交? 如果相交, 求出交点的坐标, 如果不相交, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = 3x + 15$

(2) 平移后所得的直线与已知双曲线相交, 交点的坐标为 $\left(\frac{-15 + \sqrt{249}}{6}, \frac{15 + \sqrt{249}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{-15 - \sqrt{249}}{6}, \frac{15 - \sqrt{249}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的平移, 反比例函数与一次函数的交点问题, 求得平移后的解析式是解题的关键.

(1) 根据“左加右减”的原则即可求得;

(2) 联立方程，解方程组即可求得.

【小问 1 详解】

解：∵ 直线 $y = 3x$ 向左平行移动 5 个单位，

∴ 平移后所得的直线的函数解析式为 $y = 3(x + 5)$ ，即 $y = 3x + 15$.

【小问 2 详解】

解：平移后所得的直线与已知双曲线相交，理由如下，

把 $y = 3x + 15$ 代入 $y = \frac{2}{x}$ ，得 $3x + 15 = \frac{2}{x}$ ，整理得 $3x^2 + 15x - 2 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = 15^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 249 > 0,$$

∴ 平移后所得的直线与已知双曲线有两个交点，

$$\therefore x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{6} = \frac{-15 \pm \sqrt{249}}{6},$$

$$\text{当 } x = \frac{-15 + \sqrt{249}}{6} \text{ 时, } y = 3 \times \frac{-15 + \sqrt{249}}{6} + 15 = \frac{15 + \sqrt{249}}{2};$$

$$\text{当 } x = \frac{-15 - \sqrt{249}}{6} \text{ 时, } y = 3 \times \frac{-15 - \sqrt{249}}{6} + 15 = \frac{15 - \sqrt{249}}{2},$$

$$\therefore \text{交点坐标为 } \left(\frac{-15 + \sqrt{249}}{6}, \frac{15 + \sqrt{249}}{2} \right) \text{ 和 } \left(\frac{-15 - \sqrt{249}}{6}, \frac{15 - \sqrt{249}}{2} \right).$$

24. 有一项工程，甲、乙两人合作 20 天后，还需由乙单独做 7 天才能完成. 如果甲每天比原来多做 10%，乙每天比原来多做 26%，那么全部工程两人合作 20 天就能完成，求原来甲和乙单独完成这项工程各需多少天？

【答案】甲原来度量完成这项工程需要 50 天，乙原来度量完成这项工程需要 45 天

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程组的实际应用，设甲原来度量完成这项工程需要 x 天，乙原来度量完成这项工程需要 y 天，把工作总量看做单位“1”，表示出变化前后甲、乙的工作效率，根据工作总量等于工作时间乘以工作效率建立方程组求解即可.

【详解】解：设甲原来度量完成这项工程需要 x 天，乙原来度量完成这项工程需要 y 天，

$$\text{由题意得: } \begin{cases} 20\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1 \\ 20\left[\frac{1}{x} \cdot (1+10\%) + \frac{1}{y} \cdot (1+26\%)\right] = 1 \end{cases},$$

$$\text{整理得: } \begin{cases} \frac{20}{x} + \frac{27}{y} = 1 \\ \frac{22}{x} + \frac{25.2}{y} = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 50 \\ y = 45 \end{cases},$$

经检验, $\begin{cases} x = 50 \\ y = 45 \end{cases}$ 是原方程的解, 且符合题意;

答: 甲原来度量完成这项工程需要 50 天, 乙原来度量完成这项工程需要 45 天.

25. 已知: 直线 $l_1: y = 2x$ 和点 $P(3, 2)$, 在直线 l_1 上求一点 Q 使得过 P 、 Q 两点的直线与直线 l_1 , 以及 x 轴在第一象限内围成的三角形的面积最小.

【答案】 $Q(2, 4)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与几何综合, 设出点 Q 的坐标, 利用待定系数法求出直线 PQ 解析式, 进而求出 $\therefore$ 直线 PQ 与 x 轴的交点坐标, 再根据三角形面积公式表示出围成的三角形面积, 最后利用完全平方公式的变形求出面积取得最小值时点 Q 的坐标即可.

【详解】 解: $\because$ 点 Q 在直线 $l_1: y = 2x$ 上,

$\therefore$ 可设 $Q(m, 2m)$,

设直线 PQ 解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 2 \\ km + b = 2m \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{2-2m}{3-m} \\ b = \frac{4m}{3-m} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 PQ 解析式为 $y = \frac{2-2m}{3-m}x + \frac{4m}{3-m}$,

在 $y = \frac{2-2m}{3-m}x + \frac{4m}{3-m}$ 中, 当 $y = \frac{2-2m}{3-m}x + \frac{4m}{3-m} = 0$ 时, $x = \frac{2m}{m-1}$,

$\therefore$ 直线 PQ 与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{2m}{m-1}, 0\right)$,

$\therefore$ 直线 PQ 与直线 l_1 , 以及 x 轴在第一象限内能围成三角形,

$\therefore$ 点 Q 一定要在点 P 的上方,

$\therefore 2m > 2$,

$\therefore m > 1$,

设围成的三角形面积为 S ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{2m}{m-1} = \frac{2m^2}{m-1} = \frac{2m^2 - 2 + 2}{m-1} = 2(m+1) + \frac{2}{m-1} = 2(m-1) + \frac{2}{m-1} + 4,$$

$$\therefore \left(m-1 - \frac{1}{m-1}\right)^2 = \left(m-1 + \frac{1}{m-1}\right)^2 - 4(m-1) \cdot \frac{1}{m-1} \geq 0,$$

$$\therefore \left(m-1 + \frac{1}{m-1}\right)^2 \geq 4(m-1) \cdot \frac{1}{m-1} = 4,$$

$$\therefore m-1 + \frac{1}{m-1} \geq 2,$$

$$\therefore S = 2\left(m-1 + \frac{1}{m-1}\right) + 4 \geq 8, \text{ 当且仅当 } m-1 = \frac{1}{m-1}, \text{ 即 } m = 2 \text{ 时等号成立,}$$

$\therefore Q(2, 4)$.

26. 一次函数 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 以 AB 为边在第二象限内作等边 ABC .

(1) 求直线 AC 的函数解析式;

(2) 在直线 AC 上有一点 $P\left(a, \frac{1}{3}\right)$, 求 $\triangle ABP$ 的面积.

(3) 在 x 轴上是否存在点 M , 使 $\triangle MAB$ 为等腰三角形? 若存在, 请写出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = -\sqrt{3}x - 2$

(2) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$$(3) \left(-2\sqrt{3}, 0\right) \text{ 或 } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

【解析】

【分析】(1) 首先令 $x=0, y=0$ ，解方程得到 $A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), B(0, 2)$ ，然后根据勾股定理求出 AB 的长，根据等边三角形的性质证明 $\triangle AOB \cong \triangle BGA$ ，得到点的坐标为 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ；设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$ ，解方程组即可得到结论；

$$(2) \text{ 求出 } P\left(-\frac{7\sqrt{3}}{9}, \frac{1}{3}\right), \text{ 过点 } P \text{ 作 } PH \perp x \text{ 轴于点 } H, \text{ 求出 } PH = \frac{1}{3}, OH = \frac{7\sqrt{3}}{9}, AH = OH - OA = \frac{\sqrt{3}}{9},$$

根据 $S_{\triangle ABP} = S_{\text{四边形}PHOB} - S_{\triangle APH} - S_{\triangle AOB}$ ，即可求解；

(3) 设出点 $M(m, 0)$ ，分 $BM = AM$ ， $BM = AB$ ， $AM = AB$ 三种情况，列方程即可得出结论。

【小问 1 详解】

解：将 $x=0$ 代入 $y=\sqrt{3}x+2$ ，则 $y=2$ ；

$$\text{令 } y=\sqrt{3}x+2=0, \text{ 解得: } x=-\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

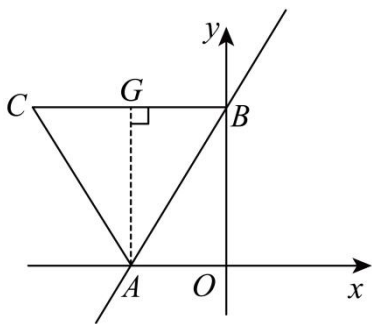
$$\therefore A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), B(0, 2),$$

$$\therefore AB = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = AC = BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \angle ABC = \angle BAC = 60^\circ,$$

过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ,



$$\text{则 } \angle BAG = \angle CAG = 30^\circ, BG = CG = \frac{1}{2}BC = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OA = BG,$$

$$\because \angle AGB = \angle AOB = 90^\circ, AB = AB,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BGA (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BAG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle ABO + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore BC \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore C \text{ 点纵坐标为 } 2,$$

$$\therefore C\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\right),$$

$$\text{设直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = kx + b,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 0 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}k + b \\ 2 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -\sqrt{3} \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\sqrt{3}x - 2;$$

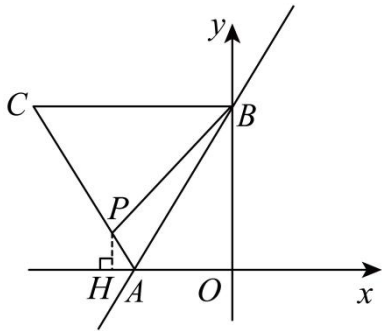
【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \text{点 } P\left(a, \frac{1}{3}\right) \text{ 在直线 } AC \text{ 上},$$

$$\text{则 } \frac{1}{3} = -\sqrt{3}a - 2, \text{ 解得: } a = -\frac{7\sqrt{3}}{9},$$

$$\therefore P\left(-\frac{7\sqrt{3}}{9}, \frac{1}{3}\right),$$

如图, 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H ,



$$\text{则 } PH = \frac{1}{3}, OH = \frac{7\sqrt{3}}{9},$$

$$\therefore AH = OH - OA = \frac{\sqrt{3}}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\text{四边形}PHOB} - S_{\triangle APH} - S_{\triangle AOB},$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + 2\right) \times \frac{7\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2$$

$$= \frac{49\sqrt{3}}{54} - \frac{\sqrt{3}}{54} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9};$$

【小问 3 详解】

解: 设 $M(m, 0)$,

$$\therefore A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), B(0, 2),$$

$$\therefore AM^2 = \left(m + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2, BM^2 = m^2 + (0 - 2)^2 = m^2 + 4, AB^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3},$$

当 $BM = AM$ 时, 即 $AM^2 = BM^2$,

$$\text{则 } \left(m + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = m^2 + 4,$$

解得: $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$;

当 $BM = AB$ 时, 即 $BM^2 = AB^2$,

则 $m^2 + 4 = \frac{16}{3}$,

解得: $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (与点 A 重合, 舍去),

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$;

当 $AM = AB$ 时, 即 $AM^2 = AB^2$,

则 $\left(m + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$,

解得: $m = -2\sqrt{3}$ 或 $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 0)$;

综上, 点 M 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 0)$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征、等边三角形的性质、三角形全等的判定与性质、勾股定理, 等腰三角形的性质, 要充分利用函数图象的性质是解决此题的关键.