

2024-2025 学年上海市浦东新区周浦实验学校八年级（下）月考

数学试卷（5 月份）

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象不经过的象限是（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质，则 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的 $k = 2 > 0$ ， $b = -3 < 0$ ，得出经过的象限是第一、三、四象限，即可作答．

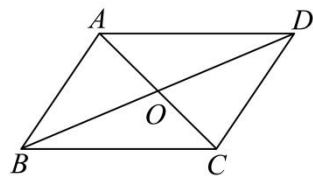
【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 的 $k = 2 > 0$ ， $b = -3 < 0$

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象经过第一、三、四象限

$\therefore$ 不经过的象限是第二象限

故选：B

2. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，则下列结论一定正确的是（ ）



- A. $AB = BC$ B. $AD = BC$ C. $OA = OB$ D. $AC \perp BD$

【答案】B

【解析】

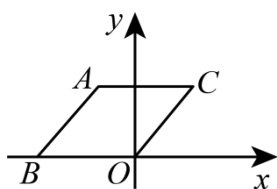
【分析】 本题主要考查平行四边形的性质，掌握平行四边形的对边平行且相等，对角线互相平分是解题的关键．

【详解】 解： $\because ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD$ ， $AD = BC$ ， $AO = OC$ ， $BO = OD$ ，

故选 B．

3. 如图， O 是坐标原点，菱形 $ABOC$ 的顶点 B 在 x 轴的负半轴上，顶点 C 的坐标为 $(3, 4)$ ，则顶点 A 的坐标为（ ）



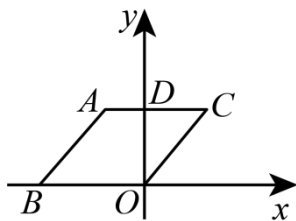
- A. $(-4, 2)$ B. $(-\sqrt{3}, 4)$ C. $(-2, 4)$ D. $(-4, \sqrt{3})$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查平面直角坐标系内两点间的距离公式，菱形的性质，坐标与图形. 结合菱形的性质求出 $AC = OC = 5$ 是解题关键. 由两点间的距离公式结合菱形的性质可求出 $AC = OC = 5$ ，从而可求出 $AD = 2$ ，即得出顶点 A 的坐标为 $(-2, 4)$.

【详解】解：如图，



$\because$ 点 C 的坐标为 $(3, 4)$,

$$\therefore OC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$\because$ 四边形 $ABOC$ 为菱形,

$$\therefore AC = OC = 5,$$

$$\therefore AD = AC - CD = AC - x_C = 5 - 3 = 2,$$

$\therefore$ 顶点 A 的坐标为 $(-2, 4)$.

故选 C.

4. 甲乙两人各自加工 120 个零件，甲由于个人原因没有和乙同时进行，乙先加工 30 分钟后，甲开始加工. 甲为了追赶上乙的进度，加工的速度是乙的 1.2 倍，最后两人同时完成. 求乙每小时加工零件多少个？设乙每小时加工 x 个零件. 可列方程为 ()

A. $\frac{120}{1.2x} - \frac{120}{x} = 30$

B. $\frac{120}{x} - \frac{120}{1.2x} = 30$

C. $\frac{120}{1.2x} - \frac{120}{x} = \frac{30}{60}$

D. $\frac{120}{x} - \frac{120}{1.2x} = \frac{30}{60}$

【答案】D

【解析】

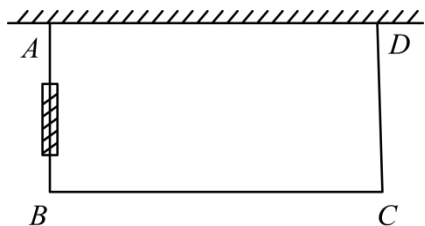
【分析】 本题主要考查了分式方程的实际应用，设乙每小时加工 x 个零件，则甲每小时加工 $1.2x$ 个零件，再根据时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率结合甲的工作时间比乙的工作时间少 30 分钟列出方程即可.

【详解】 解：设乙每小时加工 x 个零件，则甲每小时加工 $1.2x$ 个零件，

由题意得 $\frac{120}{x} - \frac{120}{1.2x} = \frac{30}{60}$,

故选：D.

5. 如图，小程的爸爸用一段 10m 长的铁丝网围成一个一边靠墙（墙长 5.5m）的矩形鸭舍，其面积为 15m^2 ，在鸭舍侧面中间位置留一个 1m 宽的门（由其它材料制成），则 BC 长为（ ）



A. 5m 或 6m

B. 2.5m 或 3m

C. 5m

D. 3m

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了列一元二次方程解实际问题的运用，矩形的面积公式的运用，正确寻找题目的等量关系是解题的关键. 设矩形场地垂直于墙一边长为 x m，可以得出平行于墙的一边的长为 $(10 - 2x + 1)$ m. 根据矩形的面积公式建立方程即可.

【详解】 解：设矩形场地垂直于墙一边长为 x m，

则平行于墙的一边的长为 $(10 - 2x + 1)$ m，

由题意得 $x(10 - 2x + 1) = 15$ ，

解得： $x_1 = 3$ ， $x_2 = \frac{5}{2}$ ，

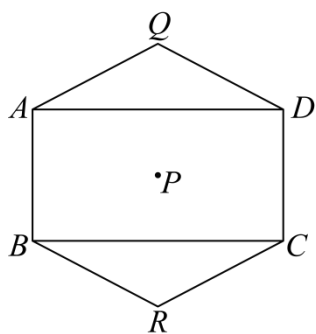
当 $x = 3$ 时，平行于墙的一边的长为 $10 - 2 \times 3 + 1 = 5 < 5.5$ ；

当 $x = \frac{5}{2}$ 时，平行于墙的一边的长为 $10 - 2 \times \frac{5}{2} + 1 = 6 > 5.5$ ，不符合题意；

$\therefore$ 该矩形场地 BC 长为 5 米，

故选 C.

6. 如图， P 点为矩形 $ABCD$ 两对角线的交点，将 P 点分别以 AD 、 BC 为对称轴画出对称点 Q 、 R ，形成六边形 $QABRCD$. 若 $AB = 2$ ， $AD = 4$ ，则六边形 $QABRCD$ 的周长为（ ）



A. 12

B. $4+2\sqrt{6}$

C. $4+4\sqrt{3}$

D. $4+4\sqrt{5}$

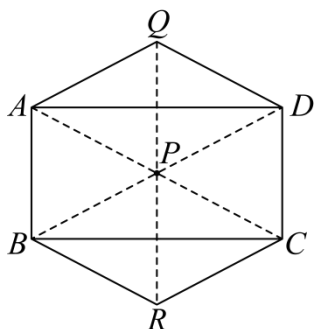
【答案】D

【解析】

【分析】先连接 AC, BD, QR ，可得 AC, BD, QR 的交点为 P ，再进一步求解即可.

本题考查的是矩形的性质，轴对称的性质，勾股定理的应用，解题的关键是：熟练掌握矩形的性质及勾股定理.

【详解】解：如图，连接 AC, BD, QR ，



$\therefore P$ 点为矩形 $ABCD$ 两对角线的交点，分别以 AD 、 BC 为对称轴画出 P 的对称点 Q 、 R .

$\therefore AC, BD, QR$ 的交点为 P ， $AB = CD = 2$ ， $AD = BC = 4$ ， $\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$AP = AQ$ ， $DP = DQ$ ， $BP = BR$ ， $CP = CR$ ，

$\therefore AC = BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 六边形 $QABRCD$ 的周长为： $AB + CD + AQ + DQ + BR + CR$

$= 4 + AC + BD$

$= 4 + 4\sqrt{5}$ ；

故选：D.

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分.

7. 将直线 $y = 2x$ 向上平移 3 个单位长度后经过点 $(1, m)$ ，则 m 的值为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的平移和一次函数图象上点坐标特点，正确得出平移后的直线解析式是关键；先根据一次函数的平移规律：上加下减得出平移后的直线解析式为 $y = 2x + 3$ ，再把点 $(1, m)$ 代入求解即可.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = 2x$ 向上平移 3 个单位长度，

$\therefore$ 平移后的直线解析式为 $y = 2x + 3$ ，

$\because$ 直线 $y = 2x + 3$ 经过点 $(1, m)$ ，

$\therefore m = 2 \times 1 + 3 = 5$ ；

故答案为： 5.

8. 点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 在直线 $y = -6x + 5$ 的上，则 y_1 _____ y_2 (用 “<”， “=” 或 “>” 填空).

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查比较一次函数的函数值大小，根据一次函数的增减性进行判断即可.

【详解】 解： $\because y = -6x + 5$ ， $-6 < 0$ ，

$\therefore y$ 随着 x 的增大而减小，

$\because$ 点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 在直线 $y = -6x + 5$ 的上，且 $1 < 2$ ，

$\therefore y_1 > y_2$ ；

故答案为： >.

9. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x+2} + \frac{m}{2+x} = 3$ 有增根，那么 m 的值是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的增根，解题的关键是熟练掌握增根的概念，可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②让最简公分母为 0 确定增根；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值，据此解答即可.

【详解】 解： 去分母得： $x + m = 3(2 + x)$ ，

$$\because \frac{x}{x+2} + \frac{m}{2+x} = 3 \text{ 有增根,}$$

当 $x+2=0$ 时, 可得增根为 $x=-2$,

$$\therefore -2+m=3(2-2),$$

解得: $m=2$,

故答案为: 2.

10. 方程 $\sqrt{x+6} = -x$ 的解为_____

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 将方程两边同时平方, 再解方程得出 x 的值, 检验即可得出答案.

【详解】 解: 两边平方得: $x+6=x^2$,

移项得: $x^2-x-6=0$,

解得: $x_1=-2$, $x_2=3$,

经检验, $x=-2$ 是原方程的解,

故答案为: -2.

11. 一项工程, 若甲、乙两个工程队合作 8 天可以完成, 甲工程队单独做 24 天可以完成, 则乙工程队单独做需要_____天可以完成.

【答案】 12

【解析】

【分析】 本题主要考查了利用分式方程解实际工程问题, 解题的关键是找准等量关系.

设乙工程队单独做需要 x 天完成, 按照两队合作关系列出方程, 求解即可.

【详解】 解: 设乙工程队单独做需要 x 天完成, 根据题意得,

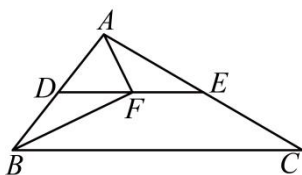
$$8 \times \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{x} \right) = 1,$$

解得 $x=12$,

经检验, $x=12$ 是分式方程的解, 并符合题意,

故答案为: 12.

12. 如图, DE 为 ABC 的中位线, 点 F 在 DE 上, 且 $\angle AFB = 90^\circ$, 若 $AB = 5$, $BC = 10$, 则 EF 的长为_____.



【答案】 2.5

【解析】

【分析】 本题考查中位线的性质、线段的和与差等知识，根据三角形中位线定理求出 DE ，根据直角三角形的性质求出 DF ，结合图形计算，得到答案.

【详解】 解： $\because DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFB$ 中， D 是 AB 的中点，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AB = 2.5,$$

$$\therefore EF = DE - DF = 2.5,$$

故答案为： 2.5 .

13. 一个正 n 边形的一个外角为 60° ，则它的边数 $n =$ _____.

【答案】 6

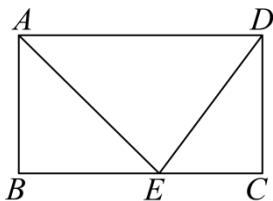
【解析】

【分析】 本题考查正多边形的外角问题，根据正多边形的每个外角都相等，外角和为 360 度，进行求解即可.

【详解】 解： $n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6;$

故答案为： 6.

14. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ， AE 平分 $\angle BAD$ ，则 DE 的长为 _____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质，等腰三角形的判定，勾股定理，熟练掌握矩形的性质是解题的关键.

根据矩形的性质 $CD = AB = 4$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，再根据平行线的性质与角平分线定义得出 $\angle BAE = \angle AEB$ ，从而得出 $BE = AB = 4$ ，继而得出 $CE = 3$ ，再利用勾股定理求解.

【详解】解：∵矩形 $ABCD$ ，

$$\therefore CD = AB = 4, \quad AD \parallel BC, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB$$

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB,$$

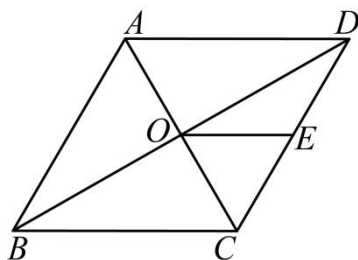
$$\therefore BE = AB = 4,$$

$$\therefore CE = BC - BE = 7 - 4 = 3,$$

$$\therefore DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

故答案为：5

15. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 交于点 O ， E 为 DC 的中点，若 $OE = 2$ ，则菱形的周长为_____.



【答案】16

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质、三角形的中位线定理. 根据菱形的性质可得 O 为 BD 的中点，由 E 为 DC 的中点可得 OE 为 $\triangle BCD$ 的中位线，从而可得 $BC = 2OE = 4$ ，即可得到菱形的周长.

【详解】解：∵菱形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 交于点 O ，

$$\therefore O \text{ 为 } BD \text{ 的中点},$$

$$\therefore E \text{ 为 } DC \text{ 的中点},$$

$$\therefore OE \text{ 为 } \triangle BCD \text{ 的中位线},$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore OE = 2,$$

$$\therefore BC = 2OE = 4,$$

$$\therefore \text{菱形的周长为 } 4 \times 4 = 16,$$

故答案为：16.

16. 在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 的边 AD 在 y 轴正半轴上，边 BC 在第一象限，且点 $A(0,3)$ 、

$B(5,3)$ ，将正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ ，若点 B 的对应点 B' 恰好落在坐标轴上，则点 C 的对应点 C' 的坐标为_____.

【答案】 $(7,4)$ 或 $(5,-2)$ 或 $(-1,-4)$

【解析】

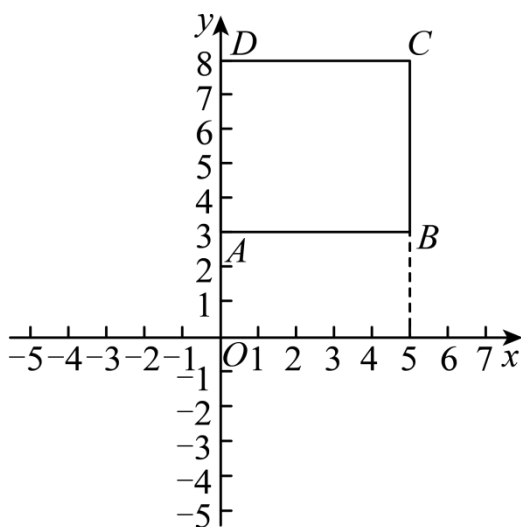
【分析】 根据题意画出图形，分 3 种情况进行讨论：①点 B 的对应点 B' 恰好落在 x 轴正半轴上时，②点 B 的对应点 B' 恰好落在 y 轴负半轴上时，③点 B 的对应点 B' 恰好落在 x 轴负半轴上时，根据旋转的性质，利用全等三角形的判定与性质可得点 C 的对应点 C' 的坐标.

【详解】 解：因为正方形 $ABCD$ 的边 AD 在 y 轴正半轴上，边 BC 在第一象限，且点 $A(0,3)$ 、 $B(5,3)$ ，
则： $AB = 5$ ，

$\therefore AD = AB = BC = CD = 5$ ，

$\therefore D(0,8)$ ，

画图如下：

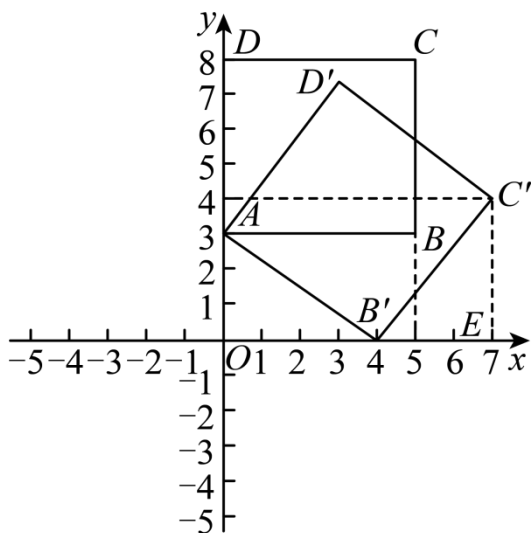


当正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ ，

①点 B 的对应点 B' 恰好落在 x 轴正半轴上时，如图，作 $C'E \perp x$ 轴，

$\therefore AB' = AB = 5$ ， $OA = 3$ ，

$\therefore OB' = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，



$$\because \angle AB'O + \angle OAB' = 90^\circ, \quad \angle AB'O + \angle C'B'E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB' = \angle C'B'E,$$

在 $\triangle AB'O$ 和 $\triangle B'C'E$ 中,

$$\begin{cases} \angle AOB' = \angle B'EC' = 90^\circ \\ \angle OAB' = \angle EB'C' \\ AB' = B'C' \end{cases},$$

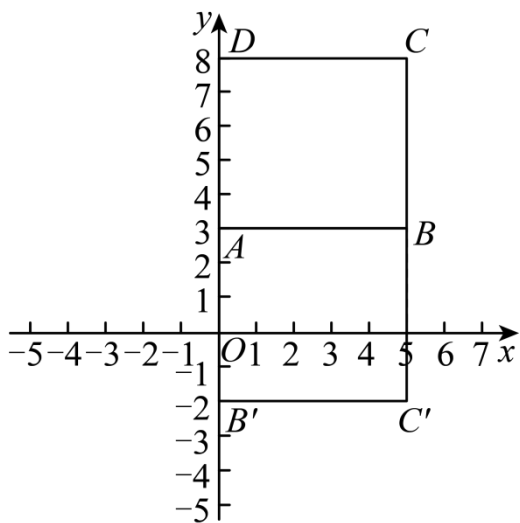
$$\therefore \triangle AB'O \cong \triangle B'C'E \text{ (AAS)},$$

$$\therefore B'E = OA = 3, \quad EC' = OB' = 4,$$

$$\therefore OE = OB' + B'E = 4 + 3 = 7,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的对应点 } C' \text{ 的坐标为 } (7, 4);$$

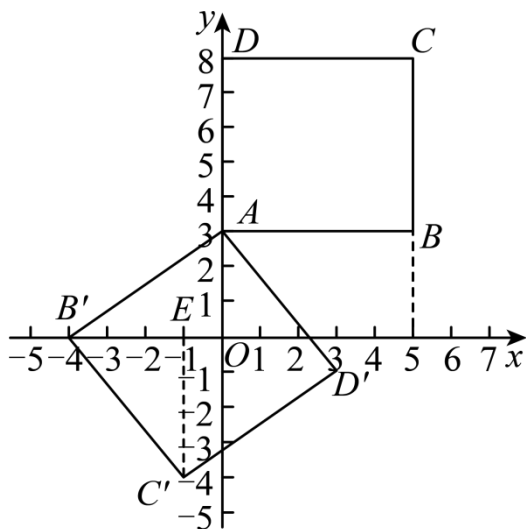
②点 B 的对应点 B' 恰好落在 y 轴负半轴上时, 如图,



$$B'C' = AB = BC' = 5,$$

$\therefore$ 点 C 的对应点 C' 的坐标为 $(5, -2)$;

③点 B 的对应点 B' 恰好落在 x 轴负半轴上时, 如图,



同①可知:

$$\triangle AB'O \cong \triangle B'C'E \text{ (AAS)},$$

$$\therefore B'E = OA = 3, \quad EC' = OB' = 4, \quad B'(-4, 0),$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 横坐标为 } -4 + 3 = -1,$$

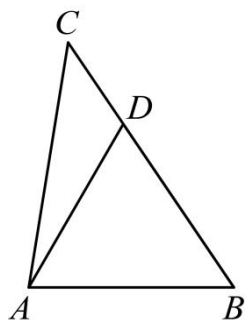
$$\therefore \text{点 } C \text{ 的对应点 } C' \text{ 的坐标为 } (-1, -4);$$

综上所述: 点 C 的对应点 C' 的坐标为 $(7, 4)$ 或 $(5, -2)$ 或 $(-1, -4)$.

故答案为: $(7, 4)$ 或 $(5, -2)$ 或 $(-1, -4)$.

【点睛】 本题属于四边形的综合题, 考查了正方形的性质、旋转的性质、坐标与图形的变化、全等三角形的判定与性质, 解决本题的关键是综合运用以上知识.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 上, $BD = 2CD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AC} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【答案】 $\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的线性运算，熟练掌握向量的加减法是解题的关键.

先表示 $\overrightarrow{BD}$ ，再由 $BD=2CD$ 表示 $\overrightarrow{BC}$ ，最后由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ 即可求解.

【详解】 解： $\because \overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a},$$

$$\because BD=2CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{3}{2}(\vec{b}-\vec{a}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{3}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a},$$

故答案为： $\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

18. 正方形 $ABCD$ 的边长是 8cm ，点 M 在边上，且 $MC=2\text{cm}$ ， P 是正方形边上的一个动点，连接 PB ，当 $PB=AM$ 时， PC 的长是_____.

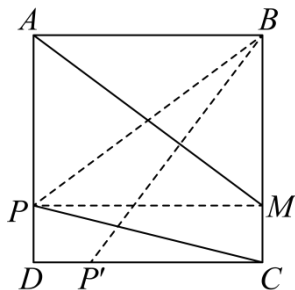
【答案】 $2\sqrt{17}\text{cm}$ 或 6cm

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，矩形的判定与性质，勾股定理，解决本题的关键是得到 P 在以 B 为圆心， 10cm 为半径的圆上.

根据题意可得 P 在以 B 为圆心， 10cm 为半径的圆上，分两种情况讨论：如图中的 P 和 P' ，①证明四边形 $APMB$ 是矩形，即可求出结果；②根据勾股定理可得结果.

【详解】 解：根据题意画图如下：



$$\because AB=BC=8\text{cm}, \quad MC=2\text{cm},$$

$$\therefore BM=BC-MC=6\text{cm},$$

$$\therefore AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=10\text{cm},$$

$$\therefore PB = AM = 10\text{cm},$$

$\therefore P$ 在以 B 为圆心, 10cm 为半径的圆上, 如图中的 P 和 P' ,

$$\textcircled{1} \because PB = 10\text{cm}, AB = 8\text{cm},$$

$$\therefore AP = 6\text{cm},$$

$\therefore AP$ 平行且等于 BM ,

$\therefore$ 四边形 $APMB$ 是矩形,

$$\therefore PM = AB = 8\text{cm},$$

$$\therefore PC = \sqrt{PM^2 + CM^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}(\text{cm});$$

$$\textcircled{2} \because P'B = 10\text{cm}, BC = 8\text{cm},$$

$$\therefore P'C = \sqrt{P'B^2 - BC^2} = 6\text{cm}.$$

综上所述: PC 的长是 $2\sqrt{17}\text{cm}$ 或 6cm .

故答案为: $2\sqrt{17}\text{cm}$ 或 6cm .

三、解答题: 本题共 7 小题, 共 56 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

$$19. \text{解方程: } \sqrt{x+1} = x-1.$$

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程, 解题的关键是把无理方程两边平方化为有理方程.

两边平方化为有理方程, 解得 x 的值后再检验即可.

【详解】 解: 两边平方得: $x+1 = x^2 - 2x + 1$,

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 3$;

经检验, $x_1 = 0$ 为原方程的增根, $x_2 = 3$ 是原方程的解,

$$\therefore x = 3.$$

$$20. \text{解方程组: } \begin{cases} x+2y=5 \\ x^2-4y^2=15 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x=4 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了高次方程，解决本题的关键是将高次方程降次，转化成二元一次方程解答. 利用平方差公式将二次方程分解为 $(x+2y)(x-2y)=15$ ，得： $x-2y=3$ ，可得方程组： $\begin{cases} x+2y=5 \textcircled{3} \\ x-2y=3 \textcircled{4} \end{cases}$ ，再用加减法解二元一次方程组即可.

【详解】 解：由方程组 $\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2-4y^2=15 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x+2y=5 \textcircled{1} \\ (x+2y)(x-2y)=15 \textcircled{2} \end{cases}$ ，

将①代入②得： $x-2y=3$ ，

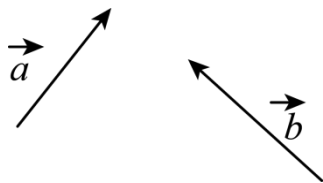
可得新方程组： $\begin{cases} x+2y=5 \textcircled{3} \\ x-2y=3 \textcircled{4} \end{cases}$ ，

③+④得： $2x=8$ ，解得 $x=4$ ，

将 $x=4$ 代入①得： $y=\frac{1}{2}$ ，

方程组的解是： $\begin{cases} x=4 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

21. 如图，已知两个不平行的向量 $\vec{a}$ 和向量 $\vec{b}$ ，分别用两种不同的方法作出： $\vec{a} + \vec{b}$.

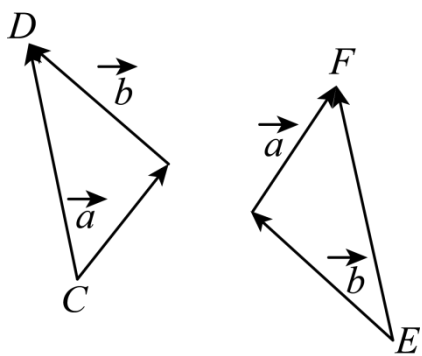


【答案】 画图见解析

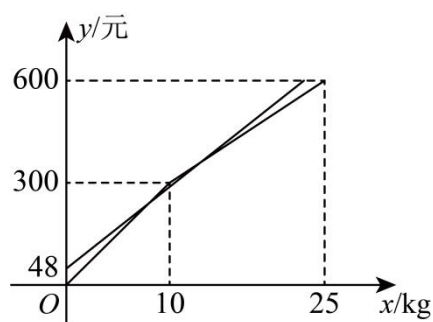
【解析】

【分析】 本题考查平面向量，解题的关键是掌握三角形法则. 利用三角形法则画出图形即可.

【详解】 解：如图， $\overrightarrow{CD}$ ， $\overrightarrow{EF}$ 即为所求.



22. 4月中旬的某一天，小明和小强准备去双阳奢岭葡萄采摘园采摘葡萄，甲采摘园的优惠方案：游客进园需购买门票，采摘的所有葡萄按 24 元/千克；乙采摘园的优惠方案：游客无需买票，采摘葡萄超过一定数量后，超过的部分打折销售．活动期间，某游客的葡萄采摘量为 x 千克，若在甲采摘园所需总费用为 $y_{\text{甲}}$ 元，若在乙采摘园所需总费用为 $y_{\text{乙}}$ 元， $y_{\text{甲}}$ 、 $y_{\text{乙}}$ 与 x 之间的函数图象如图所示．



- (1) 甲采摘园的门票费用是_____元；
- (2) 求 $y_{\text{乙}}$ (元) 与采摘葡萄数量 x (千克) 之间的函数关系式；
- (3) 若在甲、乙采摘园所花相同的钱数采摘相同的数量，需采摘葡萄多少千克？

【答案】 (1) 48 (2) $y_{\text{乙}} = \begin{cases} 30x & (0 \leq x \leq 10) \\ 20x + 100 & (x > 10) \end{cases}$

- (3) 8 千克或 13 千克

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质和数形结合的思想解答；

- (1) 根据图象，可得出甲采摘园的门票费用，
- (2) 分 $0 \leq x \leq 10$ 和 $x > 10$ 用待定系数法可求得；
- (3) 先求出 $y_{\text{甲}}$ 的解析式，然后分 2 段，分别令 $y_{\text{甲}} = y_{\text{乙}}$ 即可．

【小问 1 详解】

解：在甲采摘园的费用函数图象中，当采摘量 $x = 0$ 时，费用 $y_{\text{甲}}$ 的值就是门票费用．从图象可知，当 $x = 0$

时, $y_{\text{甲}} = 48$ 元,

$\therefore$ 甲采摘园的门票费用是 48 元.

故答案为: 48;

【小问 2 详解】

当 $0 \leq x \leq 10$ 时:

设 $y_{\text{乙}} = k_1 x$,

把 $(10, 300)$ 代入 $y_{\text{乙}} = k_1 x$, 得 $300 = 10k_1$,

解得 $k_1 = 30$,

$\therefore y_{\text{乙}} = 30x$.

当 $x > 10$ 时:

设 $y_{\text{乙}} = k_2 x + b$, 把 $(10, 300)$ 和 $(25, 600)$ 代入 $y_{\text{乙}} = k_2 x + b$, 得

$$\begin{cases} 10k_2 + b = 300 \\ 25k_2 + b = 600 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = 20 \\ b = 100 \end{cases}$$

$\therefore y_{\text{乙}} = 20x + 100$

$$\text{综上, } y_{\text{乙}} = \begin{cases} 30x & (0 \leq x \leq 10) \\ 20x + 100 & (x > 10) \end{cases}$$

【小问 3 详解】

$\therefore$ 采摘的所有葡萄按 24 元/千克, 根据题意得

甲采摘园的费用函数为 $y_{\text{甲}} = 24x + 48$.

分情况讨论:

当 $0 \leq x \leq 10$ 时, 令 $24x + 48 = 30x$,

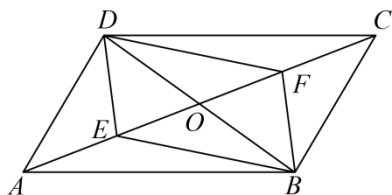
解得 $x = 8$,

当 $x > 10$ 时, 令 $24x + 48 = 20x + 100$,

解得 $x = 13$,

$\therefore$ 甲、乙采摘园所花相同的钱数采摘相同的数量, 需采摘葡萄 8 千克或 13 千克.

23. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AC , BD 相交于点 O , E , F 分别是 OA , OC 的中点.



(1) 求证：四边形 $DEBF$ 为平行四边形；

(2) 当线段 AC 与 BD 满足怎样的关系时，四边形 $DEBF$ 是矩形？请直接写出合适的关系，不需要说明理由。

【答案】(1) 证明见解析；

(2) 当 $AC = 2BD$ 时，四边形 $DEBF$ 是矩形。

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质、矩形的判定定理，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解题的关键。

(1) 由平行四边形的性质可得 $OB = OD$ ， $OA = OC$ ，结合题意得出 $OE = OF$ ，即可得证；

(2) 由题意结合平行四边形的性质可得 $EF = OE + OF = \frac{1}{2}AC$ ，结合当 $EF = BD$ 时，四边形 $DEBF$ 是矩形，即可得解。

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OB = OD, OA = OC,$$

∵ E, F 分别是 OA, OC 的中点，

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA, OF = \frac{1}{2}OC,$$

$$\therefore OE = OF,$$

∴ 四边形 $DEBF$ 为平行四边形；

【小问 2 详解】

解：当 $AC = 2BD$ 时，四边形 $DEBF$ 是矩形，理由：

∵ E, F 分别是 OA, OC 的中点，

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA, OF = \frac{1}{2}OC,$$

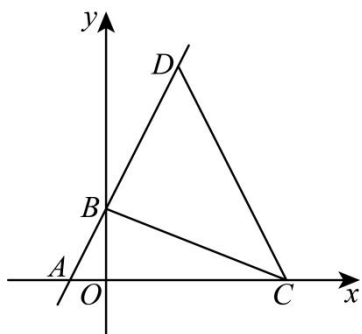
$$\therefore EF = OE + OF = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}(OA + OC) = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore AC = 2BD,$$

$$\therefore EF = BD,$$

∴ 四边形 $DEBF$ 是矩形。

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 2)$, 点 C 在 x 轴的正半轴上, 且 $OC = 5OA$.



- (1) 求直线 AB 的表达式;
- (2) 点 D 在第一象限且在直线 AB 上, 当 $S_{\triangle BCD} = 2S_{\triangle ABC}$ 时, 求点 D 的坐标;
- (3) 在 (2) 的条件下, 分别在线段 AD 、 CD 上取点 M 、 N , 在 x 轴上取点 P , 且满足 $MN \parallel x$ 轴, $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形. 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $y = 2x + 2$

(2) $D(2, 6)$

(3) 点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 或 $(0, 2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数图象与几何图形的综合, 掌握一次函数与坐标交点的计算方法, 待定系数求一次函数解析式, 等腰直角三角形的判定和性质, 两点之间距离的计算方法是解题的关键.

- (1) 根据待定系数法求解;
- (2) 根据题意可求出 $S_{\triangle ABC}$ 的面积, 由此可确定 $S_{\triangle ADC}$ 的面积, 如图所示, 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E , 根据三角形面积的计算方法即可求解;
- (3) 根据题意, 先求出 CD 所在直线的解析式, 设 $M(m, 2m + 2)$, 则 $N(4 - m, 2m + 2)$, 图形结合, 分类讨论: ① $\angle PMN = 90^\circ$, $MN = MP$; ② $\angle PNM = 90^\circ$, $NM = NP$; ③ $\angle MPN = 90^\circ$, $PM = PN$; 根据等腰直角三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} -k+b=0 \\ b=2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=2 \\ b=2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=2x+2$ 。

【小问 2 详解】

解：解：由 (1) 可知， $A(-1,0)$ ， $B(0,2)$ ，

$$\therefore OA=1, OB=2,$$

$$\because OC=5OA,$$

$$\therefore OC=5, \text{ 则 } C(5,0),$$

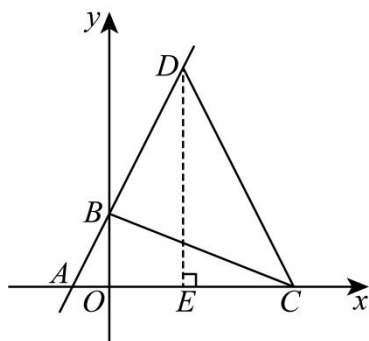
$$\therefore AC=5-(-1)=6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot OB = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6,$$

$$\because S_{\triangle BCD} = 2S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = 3S_{\triangle ABC} = 3 \times 6 = 18,$$

如图所示，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E ，



$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DE = 18, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 6DE = 18,$$

解得， $DE=6$ ，即点 D 的纵坐标为 6，

$\because$ 点 D 是一次函数 $y=2x+2$ 的图象在 x 轴上方的一点，

$$\therefore 2x+2=6, \text{ 解得 } x=2,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(2,6)$ 。

【小问 3 详解】

解：存在点 M 使得 $\triangle MNP$ 为等腰直角三角形，点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 或 $(0, 2)$ ，理由如下：

已知 $C(5,0)$, $D(2,6)$,

设 CD 所在直线的解析式为 $y = k'x + b' (k' \neq 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 5k' + b' = 0 \\ 2k' + b' = 6 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} k' = -2 \\ b' = 10 \end{cases},$$

$\therefore CD$ 所在直线的解析式为 $y = -2x + 10$,

$\because$ 点 M, N 在线段 AD, CD 上, $MN \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 设 $M(m, 2m+2)$, 则点 N 的纵坐标为 $2m+2$,

把 $y = 2m+2$ 代入函数 $y = -2x + 10$, 得

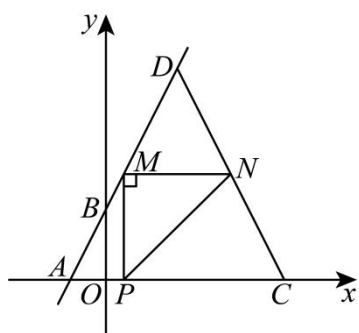
$$-2x + 10 = 2m + 2, \text{ 解得: } x = 4 - m,$$

$$\therefore N(4-m, 2m+2),$$

$$\therefore MN = (4-m) - m = 4 - 2m.$$

分三种情况讨论:

①如图所示, $\angle PMN = 90^\circ$, $MN = MP$, 即 $\triangle MNP$ 是等腰直角三角形,



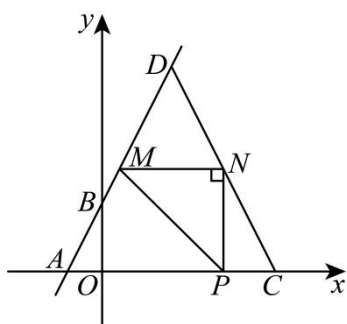
$\therefore$ 点 $P(m,0)$, 则 $MP = 2m+2$, 且 $MN = 4-2m$,

$\therefore$ 由 $MN = MP$ 得, $2m+2 = 4-2m$,

$$\text{解得, } m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{1}{2}, 3\right);$$

②如图所示, $\angle PNM = 90^\circ$, $NM = NP$, 即 $\triangle MNP$ 是等腰直角三角形,



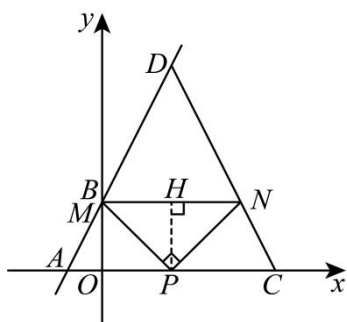
$\therefore P(4-m, 0)$, 则 $NP = 2m + 2$, 且 $MN = 4 - 2m$,

$\therefore$ 由 $NM = NP$ 得, $4 - 2m = 2m + 2$,

解得, $m = \frac{1}{2}$,

$\therefore M\left(\frac{1}{2}, 3\right)$;

③如图所示, $\angle MPN = 90^\circ$, $PM = PN$, 即 $\triangle MNP$ 是等腰直角三角形, 过点 P 作 $PH \perp MN$ 于点 H ,



$\therefore H$ 是 MN 的中点, 且 $HP = HM = HN$,

又 $\because M(m, 2m + 2)$, $N(4 - m, 2m + 2)$,

$\therefore$ 点 H 的横坐标为 $\frac{m + 4 - m}{2} = 2$, 纵坐标为 $2m + 2$, 即 $H(2, 2m + 2)$,

$\therefore HM = 2 - m$, $HP = 2m + 2$,

$\therefore 2 - m = 2m + 2$,

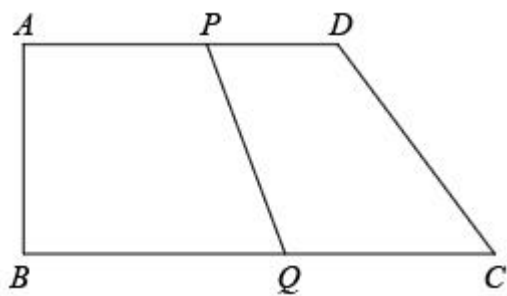
解得, $m = 0$,

$\therefore M(0, 2)$;

综上所述, 存在点 M 使得 $\triangle MNP$ 为等腰直角三角形, 点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 或 $(0, 2)$.

25. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, 且 $AD = 12\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$, $DC = 10\text{cm}$, 若动点 P 从 A 点出发, 以每秒 2cm 的速度沿线段 AD 向点 D 运动; 动点 Q 从 C 点出发以每秒 3cm 的速度沿

CB 向 B 点运动, 当 P 点到达 D 点时, 动点 P 、 Q 同时停止运动, 设点 P 、 Q 同时出发, 并运动了 t 秒, 回答下列问题:



- (1) $BC =$ _____ cm;
- (2) 当 $t =$ _____ 秒时, 四边形 $PQBA$ 成为矩形.
- (3) 当 t 为多少时, $PQ = CD$?

【答案】 (1) 18 (2) $\frac{18}{5}$

(3) $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 作 $DE \perp BC$ 于 E , 则四边形 $ABED$ 为矩形. 在直角 $\triangle CDE$ 中, 已知 DC 、 DE 的长, 根据勾股定理可以计算 EC 的长度, 根据 $BC = BE + EC$ 即可求出 BC 的长度;

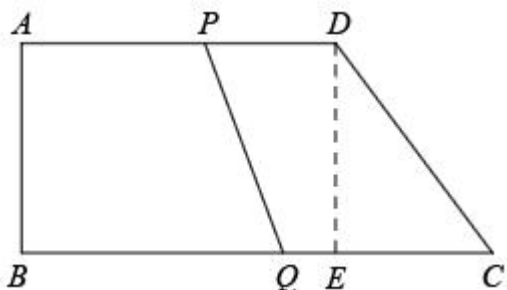
(2) 当 $PA = BQ$ 时, 四边形 $PQBA$ 为矩形, 根据 $PA = QB$ 列出关于 t 的方程, 解方程即可;

(3) 分两种情况: 当 $P'Q' \parallel CD$ 时, 四边形 $CDP'Q'$ 是平行四边形; 当梯形 $PDCQ$ 是等腰梯形时, $PQ = CD$, 可建立方程求解即可得出结论;

【小问 1 详解】

解: (1) 根据题意得: $PA = 2t$ cm, $CQ = 3t$ cm, 则 $PD = AD - PA = (12 - 2t)$ cm, $0 \leq t \leq 6$,

如图, 过 D 点作 $DE \perp BC$ 于 E ,



$\because AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ,$

$\therefore \angle A = 90^\circ,$

∴ 四边形 $ABED$ 为矩形,

∴ $DE=AB=8\text{cm}$, $AD=BE=12\text{cm}$,

在 $Rt\triangle CDE$ 中,

∵ $\angle CED=90^\circ$, $DC=10\text{cm}$, $DE=8\text{cm}$,

∴ $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2} = 6\text{cm}$,

∴ $BC=BE+EC=18\text{cm}$;

故答案为: 18

【小问 2 详解】

解: ∵ $AD \parallel BC$, $\angle B=90^\circ$

∴ 当 $PA=BQ$ 时, 四边形 $PQBA$ 为矩形,

即 $2t=18-3t$, 解得 $t=\frac{18}{5}$ 秒,

故当 $t=\frac{18}{5}$ 秒时, 四边形 $PQBA$ 为矩形;

故答案为: $\frac{18}{5}$

【小问 3 详解】

解: ①当 $P'Q' \parallel CD$ 时, 如图,

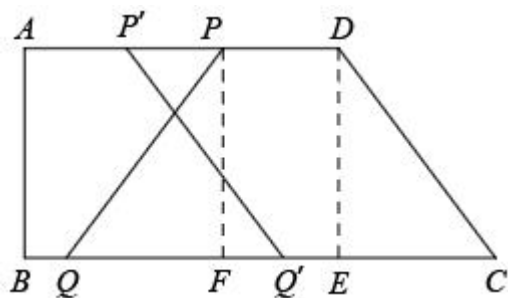
∵ $AD \parallel BC$,

∴ 四边形 $CDP'Q'$ 是平行四边形,

∴ $P'Q' = CD$, $DP' = CQ'$,

∴ $12-2t=3t$,

∴ $t=\frac{12}{5}$;



②如图, 梯形 $PDCQ$ 是等腰梯形时, $PQ=CD$,

过点 P 作 $PF \perp BC$ 于点 F , 则 $\angle PFE = \angle DEF = \angle PDE = 90^\circ$,

∴ 四边形 $PDEF$ 是矩形,

∴ $PF = DE$, $EF = DP = 12 - 2t$, $FQ = CE = 6\text{cm}$,

∴ $CQ = FQ + EF + CE = 6 + 12 - 2t + 6 = 3t$,

∴ $t = \frac{24}{5}$;

综上所述, 当 t 为 $\frac{12}{5}$ 秒或 $\frac{24}{5}$ 秒时, $PQ = CD$;

【点睛】 此题是四边形综合题, 主要考查了直角梯形的性质、矩形的判定、平行四边形和等腰梯形的判定与性质、勾股定理等知识, 掌握数形结合思想与方程思想的应用是解题的关键.