

2024 学年第二学期初二年级数学过程性评价 2 试卷

时间：90 分钟 满分：100 分

(本次考试不得使用计算器，请将正确答案填写在答题纸上，写在试卷上无效)

一、选择 (每题 3 分，共 12 分)

1. 下列命题中正确的有 () 个.

①二元二次方程 $(x+2)(y-3)=0$ 有无数组解.

②某四边形面积等于两对角线乘积的一半，则这个四边形是菱形.

③“任意作一条直线，并作出它的中点”是必然事件.

④形如 $y = ax^2 + bx + c$ 的函数为二次函数.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】依次对每个命题，依据相关数学定义、性质判断正误，统计正确命题个数. 本题主要考查二元二次方程的解、四边形面积与对角线的关系、必然事件与不可能事件的判定、二次函数的定义，熟练掌握这些概念和性质是解题的关键.

【详解】解： $\because (x+2)(y-3)=0$,

$\therefore x+2=0$ 或 $y-3=0$ ，即 $x=-2$ 时 y 可取任意实数， $y=3$ 时 x 可取任意实数

$\therefore$ 方程有无数组解，故①正确，符合题意；

对角线互相垂直的四边形面积等于两对角线乘积的一半，菱形是对角线互相垂直的平行四边形，但仅面积满足此条件的四边形，对角线不一定互相平分，不一定是菱形（如对角线互相垂直的梯形），故②错误，不符合题意.

直线无限延伸，无长度，不存在中点，“任意作一条直线，并作出它的中点”是不可能事件，故③错误，不符合题意.

形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函数才是二次函数，当 $a=0$ 时是一次函数，故④错误，不符合题意.

综上，只有①正确，共1个，

故选：B.

2. 下列命题正确的是 ().

A. 任何事件发生的概率为 1

B. 随机事件发生的概率可以是任意实数

C. 可能性很小的事件在一次实验中有可能发生

D. 不可能事件在一次实验中也可能发生

【答案】C

【解析】

【分析】根据随机事件、不可能事件的定义和概率的性质判断各选项即可.

【详解】A 中, 只有必然事件概率才是 1, 错误;

B 中, 随机事件的概率 p 取值范围为: $0 < p < 1$, 错误;

C 中, 可能性很小的事件, 是有可能发生的, 正确;

D 中, 不可能事件一定不发生, 错误

故选: C

【点睛】本题考查事件的可能性, 注意, 任何事件的概率 P 一定在 0 至 1 之间.

3. 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, 那么下列结论中正确的是 ().

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

B. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是向量的线性运算, 熟记运算法则, 等腰梯形性质, 是解本题的关键.

根据等腰梯形对角线长度相等, 平面向量的定义与运算法则, 结合向量模长的定义, 即可判断各选项.

【详解】 $\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$ 且 $AB = CD$,

$\therefore$ 该梯形为等腰梯形.

A: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

向量相等需方向与大小均相同.

虽然 $AB = CD$, 但 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向不同 (如 $\overrightarrow{AB}$ 从 A 指向 B , $\overrightarrow{CD}$ 从 C 指向 D).

故 A 错误.

B: $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

$\because$ 等腰梯形 $ABCD$ 的对角线 $AC = BD$,

$\therefore |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

故 B 正确.

C: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

$\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 的终点是以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ 为边的平行四边形对角线终点,

而 $\overrightarrow{BD}$ 的终点为 D ,

$\therefore$ 两者不相等.

故 C 错误.

D: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

$\because \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$,

$\therefore$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 方向相反.

故 D 错误.

故选: B.

4. 面积为 S 的菱形一条对角线是另一条的 2 倍, 则其边长为 ()

A. $\frac{\sqrt{5S}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3S}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2S}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3S}}{3}$

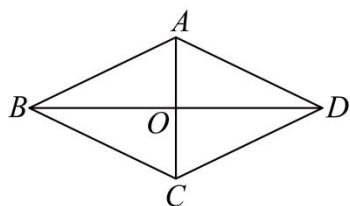
【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质, 勾股定理. 根据菱形的面积公式可得 $\frac{1}{2} AC \times 2AC = S$, 从而得到

$AC = \sqrt{S}$ ($BD = 2AC = 2\sqrt{S}$), 再由勾股定理解答即可.

【详解】解: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O , 且 $BD = 2AC$,



$\therefore \frac{1}{2} AC \times BD = S$,

$\therefore \frac{1}{2} AC \times 2AC = S$,

$\therefore AC = \sqrt{S}$ (负值舍去),

$$\therefore BD = 2AC = 2\sqrt{S},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore OB = \sqrt{S}, OA = \frac{\sqrt{S}}{2}, AC \perp BD,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{(\sqrt{S})^2 + \left(\frac{\sqrt{S}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5S}}{2},$$

即菱形的边长为 $\frac{\sqrt{5S}}{2}$.

故选: A.

二、填空 (每空 2 分, 共 44 分)

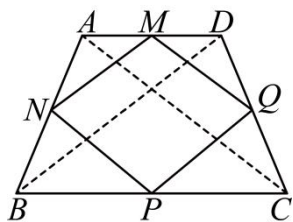
5. 顺次连接等腰梯形各边中点所围成的四边形是_____

【答案】菱形

【解析】

【分析】本题考查等腰梯形的性质, 菱形的判定方法, 以及三角形中位线的性质. 连接 AC 、 BD , 可证 MN 为 $\triangle ABD$ 的中位线, PQ 为 $\triangle CBD$ 的中位线, 根据中位线定理可证 $MN \parallel BD \parallel PQ$, $MN = PQ = \frac{1}{2}BD$, 同理可证 $PN \parallel AC \parallel MQ$, $NP = MQ = \frac{1}{2}AC$, 根据等腰梯形的性质可知 $AC = BD$, 故可证四边形 $PQMN$ 为菱形.

【详解】解: 连接 AC 、 BD ,



$\therefore M$ 、 N 分别为 AD 、 AB 的中点

$\therefore MN$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线,

$$\therefore MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD,$$

同理可证 $BD \parallel PQ$, $PQ = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore MN = PQ$, $MN \parallel PQ$, 四边形 $PQMN$ 为平行四边形,

同理可证 $NP = MQ = \frac{1}{2}AC$,

根据等腰梯形的性质可知 $AC = BD$,

$$\therefore PQ = NP,$$

$\therefore \square PQMN$ 为菱形.

故顺次连接等腰梯形各边中点所围成的四边形是菱形.

故答案为: 菱形.

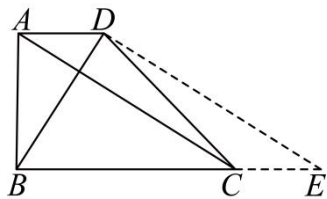
6. 梯形的两条对角线互相垂直, 且长度分别为 x 、 y , 则此梯形中位线长_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了梯形的中位线, 平行四边形的判定和性质, 勾股定理, 梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AC = x$, $BD = y$, $AC \perp BD$, 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 延长线于点 E , 可得四边形 $ACED$ 是平行四边形, $BD \perp DE$, 即得 $AD = CE$, $DE = AC = x$, $\angle BDE = 90^\circ$, 利用勾股定理得 $BE = \sqrt{DE^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, 进而得到 $AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{x^2 + y^2}$, 最后根据梯形的中位线的性质解答即可求解, 正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解: 如图, 梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AC = x$, $BD = y$, $AC \perp BD$, 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 延长线于点 E ,



$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形, $BD \perp DE$,

$\therefore AD = CE$, $DE = AC = x$, $\angle BDE = 90^\circ$,

$$\therefore BE = \sqrt{DE^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$\therefore AD = CE$,

$$\therefore AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\therefore \text{此梯形中位线长为 } \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$.

7. 某商品平均1000台里约有3台不合格，则买到合格产品是_____事件，该事件_____发生.

【答案】 ①. 随机 ②. 有可能（答案不唯一）

【解析】

【分析】 本题考查事件的分类，解题的关键是掌握：在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件；一定会发生的事件，称为必然事件；不可能发生的事件，称为不可能事件. 据此解答即可.

【详解】 解：某商品平均1000台里约有3台不合格，则买到合格产品是随机事件，该事件有可能发生. 故答案为：①随机；②有可能（答案不唯一）.

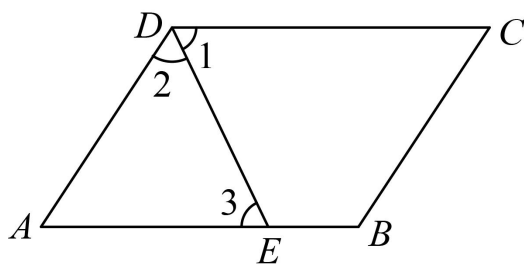
8. 平行四边形一个内角平分线将对边分成3和5两个部分，则该平行四边形的周长是 ____.

【答案】 22 或 26

【解析】

【分析】 根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle 1 = \angle 3$ ，再根据角平分线的定义得 $\angle 1 = \angle 2$ ，然后求出 $\angle 2 = \angle 3$ ，根据等角对等边的性质可得 $AD = AE$ ，然后分 $AE = 3$ ， $AE = 5$ 两种情况解答即可.

【详解】 解：如图所示：



$\because \square ABCD$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\because DE$ 是 $\angle ADC$ 的平分线,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore AD = AE$,

① $AE = 3$ 时, $BE = 5$,

$\therefore AB = AE + BE = 3 + 4 = 8$, $AD = 3$,

$\therefore$ 平行四边形的周长 $= 2 \times (3 + 8) = 22$;

② $AE = 5$ 时, $BE = 3$,

$\therefore AB = AE + BE = 3 + 4 = 8$, $AD = 5$,

$\therefore$ 平行四边形的周长 $= 2 \times (5+8) = 26$,

$\therefore$ 综上所述, 平行四边形的周长为 22 或 26,

故答案为: 22 或 26.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的对边平行的性质, 等腰三角形的判定, 角平分线的定义, 两直线平行, 内错角相等的性质, 熟练掌握这些性质是解题的关键.

9. 比较大小: $|\vec{a}-\vec{b}|$ _____ $\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|$

【答案】 $\geq$

【解析】

【分析】 本题考查向量, 三角形法则, 分两种情况: $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不同向; $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 同向分别说明即可. 利用分类讨论的思想解决问题是解题的关键.

【详解】 解: 当 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不同向时, $|\vec{a}-\vec{b}| > \|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|$,

当 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 共线且同向时, $|\vec{a}-\vec{b}| = \|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|$,

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}| \geq \|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|$.

故答案为: $\geq$.

10. 两个不共线的向量 $\overrightarrow{OP}$ 、 $\overrightarrow{OQ}$ 满足 _____ 时, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 可平分 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角.

【答案】 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量, 利用菱形的对角线平分一组对角解决问题即可. 解题的关键是掌握菱形的性质, 三角形法则.

【详解】 解: $\because$ 菱形的对角线平分一组对角,

$\therefore$ 当 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$ 时, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 可平分 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角.

故答案为: $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$.

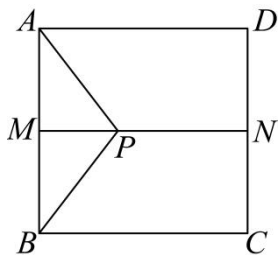
11. 正方形面积为 16, 正方形内一点 P 到 CD 的距离与到点 A 、 B 的距离都是 d , 则 $d =$ _____

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的判定, 勾股定理、正方形的性质等知识, 根据正方形的性质求出正方形的边长, 在 $\text{Rt}\triangle AMP$ 中, 根据勾股定理构建关于 d 的方程求解即可.

【详解】解：如图所示，



$\because$ 正方形面积为 16,

$\therefore$ 正方形的边长为 4, $AB \parallel CD$,

$\because$ 点 P 到 CD 的距离与到点 A 、 B 的距离都是 d ,

$\therefore PA = PB = PN = d$,

$\therefore$ 点 P 在 AB 的垂直平分线上,

$\therefore MN \perp BA$, $AM = BM = \frac{1}{2}AB$,

又 $AB \parallel CD$,

$\therefore MN \perp CD$,

$\therefore MN = AD = 4$,

又 $AM = \frac{1}{2}AB = 2$,

$\therefore AP^2 = AM^2 + PM^2$, 即 $d^2 = 2^2 + (4-d)^2$,

解得 $d = \frac{5}{2}$.

故答案为: $\frac{5}{2}$.

12. 已知一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B , 梯形 $AOBC$ 的边 $AC=5$, 且 $OA \parallel BC$,

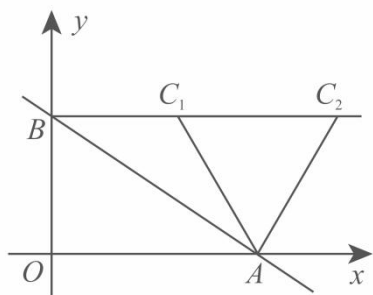
则点 C 的坐标为_____.

【答案】(5,4)或(11,4);

【解析】

【分析】根据梯形的对边平行, 画出图形, 结合勾股定理求解.

【详解】如图,



$\therefore$ 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B ,

$\therefore A(8,0), B(0,4)$.

在梯形 $AOBC$ 中, $OA=8$, $OB=4$,

当 $BC \parallel OA$ 时, 设点 $C(x,4)$.

$\therefore AC=5$,

$\therefore (x-8)^2 + (4-0)^2 = 5^2$,

$\therefore x_1=5, x_2=11$,

这时点 C 的坐标为 $(5,4)$ 或 $(11,4)$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(5,4)$ 或 $(11,4)$;

故答案为 $(5,4)$ 或 $(11,4)$;

【点睛】 此题考查梯形, 一次函数中的直线位置关系, 解题关键在于画出图形.

13. ABC 中, $AC=8, BC=4, D$ 为 AB 中点, E 为 AC 边上一点且 $\angle AED = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$, 则

$CE =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 过 B 作 $BF \parallel DE$ 交 AC 于 F , 作 $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于 G , 交 BF 于 H , 过 B 作 $BM \parallel AC$ 交 ED 于 M , 根据平行线的性质, 三角形的外角的性质可得出 $\angle AFB = \angle AED = \angle CHF + \frac{1}{2}\angle ACB$, 结合已知可求出 $\angle CHF = 90^\circ = \angle CHB$, 根据 ASA 证明 $\triangle HCF \cong \triangle HCB$, 得出 $CF = CB = 4$, $AF = 4$, 根据 AAS 证明 $\triangle ADE \cong \triangle BDM$, 得出 $AE = BM$, 证明四边形 $BMEF$ 是平行四边形, 得出 $BM = EF$, 则可求出 $EF = 2$, 然后根据线段的和差关系求解即可.

【详解】 解: 如图, 过 B 作 $BF \parallel DE$ 交 AC 于 F , 作 $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于 G , 交 BF 于 H , 过 B 作 $BM \parallel AC$ 交 ED 于 M ,

【答案】 $\frac{5}{14}$

【解析】

【分析】 本题考查概率的应用，通过画树状图或列表罗列出所有等可能的情况，再从中找出符合条件的情况数，最后利用概率公式求解.

【详解】 解： 设红球为 A ，白球为 B ，
列表如下：

	A	A	A	B	B	B	B	B
A		(A, A)	(A, A)	(A, B)	(A, B)	(A, B)	(A, B)	(A, B)
A	(A, A)		(A, A)	(A, B)	(A, B)	(A, B)	(A, B)	(A, B)
A	(A, A)	(A, A)		(A, B)	(A, B)	(A, B)	(A, B)	(A, B)
B	(B, A)	(B, A)	(B, A)		(B, B)	(B, B)	(B, B)	(B, B)
B	(B, A)	(B, A)	(B, A)	(B, B)		(B, B)	(B, B)	(B, B)
B	(B, A)	(B, A)	(B, A)	(B, B)	(B, B)		(B, B)	(B, B)
B	(B, A)	(B, A)	(B, A)	(B, B)	(B, B)	(B, B)		(B, B)
B	(B, A)	(B, A)	(B, A)	(B, B)	(B, B)	(B, B)	(B, B)	

$\therefore$ 共有 56 种可能结果，其中所摸出的两球恰好都是白球的结果有 20 种，

$\therefore$ 所摸出的两球恰好都是白球的概率为 $= \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

故答案为: $\frac{5}{14}$.

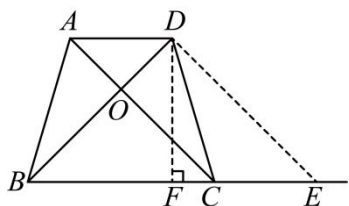
15. 已知等腰梯形的两条对角线互相垂直, 高为 5, 则其面积为_____.

【答案】 25

【解析】

【分析】 本题考查了等腰梯形的性质, 等腰三角形的判定与性质, 平行四边形性质的综合运用, 作 DF 垂直 BE 于 F , $DE \parallel AC$ 交 BE 的延长线于点 E , 故 $\angle BDE = 90^\circ$, 从而得到 BDE 为等腰直角三角形, 根据三线合一性质可求得 BE 的长, 即上底与下底的和, 根据梯形的面积公式即可得到其面积, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: 作 DF 垂直 BE 于 F , $DE \parallel AC$ 交 BE 的延长线于点 E ,



$\therefore AC \perp BD$,

$\therefore \angle BDE = \angle BOC = 90^\circ$, $DF = 5$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的等腰梯形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AC = BD$,

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形,

$\therefore DE = AC$, $AD = CE$,

$\therefore BD = DE$,

$\therefore \angle DBE = \angle DEB = 45^\circ$,

$\therefore BF = FE = DF = 5$,

梯形面积为: $\frac{1}{2}DF \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2}DF \cdot (CE + BC) = \frac{1}{2}DF \cdot BE = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$,

故答案为: 25.

16. 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 $AC \perp BD$, MN 是中位线, $\angle DBC = 30^\circ$, 且 $MN = a$, 则对角线 $BD =$ _____.

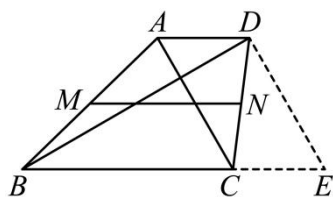
【答案】 $\sqrt{3}a$

【解析】

【分析】 本题考查了梯形的中位线定理, 平行四边形的判定与性质, 勾股定理等知识, 过 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E , 证明四边形 $ACED$ 是平行四边形, 得出 $AD = CE$, 根据梯形的中位线定理得出

$AD + BC = 2MN = 2a$ ，进而求出 $BE = 2a$ ，根据含 30° 角的直角三角形的性质求出 $DE = a$ ，然后根据勾股定理求解即可。

【详解】解：如图，过 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E ，



又 $AD \parallel CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$\therefore AD = CE$ ，

$\because MN$ 是梯形中位线， $MN = a$ ，

$\therefore AD + BC = 2MN = 2a$ ，

$\therefore BE = BC + CE = BC + AD = 2a$ ，

$\because DE \parallel AC$ ， $AC \perp BD$ ，

$\therefore DE \perp BD$ ，

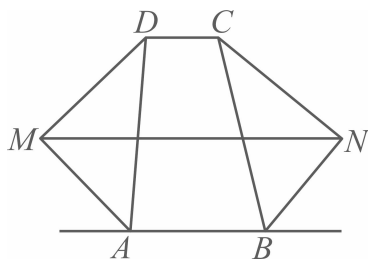
又 $\angle DBC = 30^\circ$ ，

$\therefore DE = \frac{1}{2}BE = a$ ，

$\therefore BD = \sqrt{BE^2 - DE^2} = \sqrt{3}a$ ，

故答案为： $\sqrt{3}a$ 。

17. 如图梯形 $ABCD$ 的周长为 30， $AB \parallel CD$ ， AM 、 BN 分别是 $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$ 的外角平分线， $DM \perp AM$ 于点 M ， $CN \perp BN$ 于点 N ，则线段 MN 长为_____



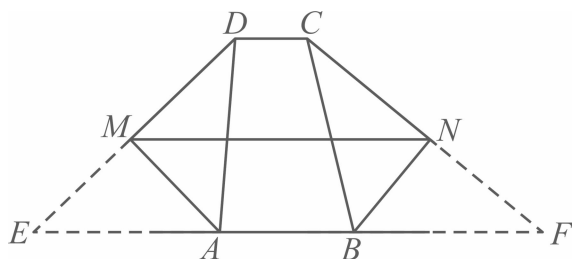
【答案】 15

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质，梯形中位线的性质，延长 DM 、 BA 交于点 E ，延长 CN 、 AB 交于点 F ，可证 $\triangle DAM \cong \triangle EAM$ (ASA)，得到 $AE = AD$ ， $DM = ME$ ，同理可得 $BF = BC$ ， $CN = NF$ ，即可由 $AB + CD + AD + BC = 30$ 得到 $EF + CD = 30$ ，进而由梯形中位线的性质即可求解，正确作出辅助

线是解题的关键.

【详解】解: 如图, 延长 DM 、 BA 交于点 E , 延长 CN 、 AB 交于点 F ,



$\therefore AM$ 平分 $\angle DAE$

$\therefore \angle DAM = \angle EAM$,

$\therefore DM \perp AM$,

$\therefore \angle DMA = \angle EMA = 90^\circ$,

又 $\therefore AM = AM$,

$\therefore \triangle DAM \cong \triangle EAM$ (ASA),

$\therefore AE = AD$, $DM = ME$,

同理可得, $BF = BC$, $CN = NE$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的周长为 30,

$\therefore AB + CD + AD + BC = 30$,

$\therefore AB + CD + AE + BF = 30$,

即 $EF + CD = 30$,

$\therefore DM = ME$, $CN = NF$,

$\therefore MN$ 是梯形 $DEFC$ 的中位线,

$\therefore MN = \frac{1}{2}(EF + CD) = \frac{1}{2} \times 30 = 15$,

故答案为: 15.

18. 正方形 $ABCD$, 对角线交于点 O , AP 平分 $\angle CAB$, 与 BD 交于 E , 与 BC 交于 P , 若 $OE = t$, 则 $CP =$ _____.

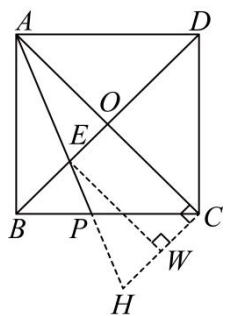
【答案】 $2t$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质, 矩形的性质与判定, 全等三角形的判定与性质, 三角形内角和性质, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先过点 C 作 $CH \perp AC$, 交 AP 的延长线于点 H , 结合正方形的性质, 证明四边形 $EOCW$ 是矩形, 再证明 $\triangle EWH \cong \triangle AOE$, 得出 $CH = HW + CW = t + t = 2t$, 因为 AP 平分 $\angle CAB$, 所以 $\angle HAC = 22.5^\circ$, 因为 $EW \perp HC$, 得 $\angle H = 67.5^\circ$, $\angle PCH = 45^\circ$, 运用三角形内角和

得 $\angle CPH = 67.5^\circ$ ，则 $CP = CH = 2t$ ，即可作答.

【详解】解：依题意，过点 C 作 $CH \perp AC$ ，交 AP 的延长线于点 H ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AO = OC, AC \perp BD, \angle ABC = 90^\circ, \angle BAC = \angle ACB = 45^\circ,$

$\because CH \perp AC,$

$\therefore \angle ACH = \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore BD \parallel CH,$

$\therefore \angle AEO = \angle EHC,$

过点 E 作 $EW \perp HC,$

$\therefore \angle EWH = \angle EOC = \angle OCW = \angle CWE = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $EOCW$ 是矩形,

$\therefore OC = EW, CW = EO = t,$

$\because AO = OC,$

$\therefore AO = EW,$

$\because \angle EWH = \angle AOE = 90^\circ,$

$\therefore \triangle EWH \cong \triangle AOE,$

$\therefore OE = HW = t,$

$\therefore CH = HW + CW = t + t = 2t,$

$\because AP$ 平分 $\angle CAB,$

$\therefore \angle HAC = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ,$

$\because EW \perp HC,$

$\therefore \angle H = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ, \angle PCH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$

则 $\angle CPH = 180^\circ - 45^\circ - 67.5^\circ = 67.5^\circ,$

$\therefore CP = CH = 2t,$

故答案为： $2t$.

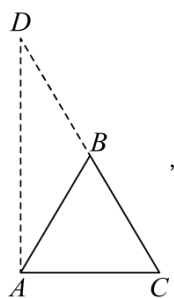
19. 等边 ABC 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 若 $|\vec{a}| = 4$, 则 $|\vec{b} - \vec{a}| =$ _____.

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量, 等边三角形的性质, 勾股定理等知识, 延长 CB 至点 D , 使 $BD = CB$, 证明 $\angle DAC = 90^\circ$, 求出 $AD = 4\sqrt{3}$, 再利用三角形法则求解即可.

【详解】 解: 延长 CB 至点 D , 使 $BD = CB$,



$\therefore ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = BC = CA, \angle BAC = \angle ABC = 60^\circ,$

$\therefore BA = BD,$

$\therefore \angle D = \angle BAD,$

又 $\angle ABC = \angle D + \angle BAD = 60^\circ,$

$\therefore \angle D = \angle BAD = 30^\circ,$

$\therefore \angle DAC = 90^\circ,$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a} = 4,$

$\therefore AC = BC = DB = 4,$

$\therefore AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = 4\sqrt{3},$

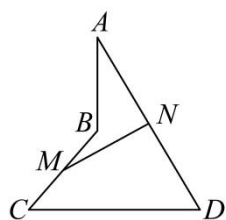
$\therefore \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} = \vec{b},$

$\therefore |\vec{b} - \vec{a}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DA}| = 4\sqrt{3},$

故答案为: $4\sqrt{3}$.

20. 如图, 四边形 $ABCD$, M 是 BC 中点, N 是 AD 中点, 直线 $AB \perp$ 直线 CD , 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{CD} = \vec{b}$,

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, 则用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$ = _____ 且 $|\overrightarrow{MN}|$ = _____.

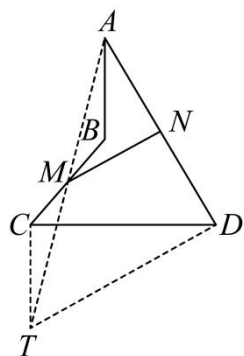


【答案】 ①. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ②. $\frac{\sqrt{34}}{2}$

【解析】

【分析】连接 AM ，过点 C 作 AB 的平行线交 AM 的延长线于点 T ，连接 DT ，利用全等三角形的性质证明 $AM = TM$ ，再利用三角形中位线定理求解.

【详解】解：连接 AM ，过点 C 作 AB 的平行线交 AM 的延长线于点 T ，连接 DT ，



$\because CT \parallel AB$, $AB \perp CD$,

$\therefore CT \perp CD$,

$\therefore \angle TCD = 90^\circ$,

$\because AB \parallel CT$, M 是 BC 中点,

$\therefore \angle MBA = \angle MCT$, $BM = CM$,

在 $\triangle BMA$ 和 $\triangle CMT$ 中,

$$\begin{cases} \angle MBA = \angle MCT \\ BM = CM \\ \angle BMA = \angle CMT \end{cases},$$

$\therefore \triangle BMA \cong \triangle CMT$ (ASA),

$\therefore AB = TC$, $AM = TM$,

$\because N$ 是 AD 中点, 即 $AN = DN$,

$\therefore MN$ 是 $\triangle ADT$ 的中位线,

$$\therefore MN \parallel DT, \quad MN = \frac{1}{2}DT,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CD} = \vec{b}, \quad |\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 5,$$

$$\therefore CT = AB = 3, \quad CD = 5, \quad \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore DT = \sqrt{CT^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34},$$

$$\therefore \overrightarrow{TD} = \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{TD} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad MN = \frac{1}{2}DT = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \quad \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

【点睛】本题考查平面向量，三角形中位线定理，勾股定理，全等三角形的判定和性质等知识点，通过作辅助线构造全等三角形是解题的关键.

21. 无论 k 为任何实数，二次函数 $y = 2x^2 - (3-k)x + k$ 的图像必过定点_____.

【答案】 $(-1, 5)$

【解析】

【分析】本题考查了函数恒过定点的应用问题，是基础题. 把函数化为 $y = 2x^2 - 3x + k(x+1)$ ，令 k 的系数等于 0，即可求得对应 x 、 y 的值.

【详解】解：二次函数解析式 $y = 2x^2 - (3-k)x + k$ 可化为 $y = 2x^2 - 3x + k(x+1)$ ，

令 $x+1=0$ ，则 $x=-1$ ，

$$\therefore y = 2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) = 5,$$

$\therefore$ 无论 k 为任何实数，二次函数 $y = 2x^2 - (3-k)x + k$ 的图像必过定点 $(-1, 5)$ ，

故答案为： $(-1, 5)$.

22. 抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 2$ 的顶点坐标是_____, 在 $x < -2$ 的范围内, y 随着 x 的增大而_____.

【答案】 ①. $(-1, 0)$ ②. 减小

【解析】

【分析】本题考查将抛物线解析式化为顶点式，抛物线的图像与性质，解题的关键是掌握抛物线

$y = a(x-h)^2$ 的图像与性质：顶点坐标为 $(h, 0)$ ，对称轴为： $x = h$ ，最值为 0 ；当 $a > 0$ 时，图像开口向上， $x < h$ ， y 随着 x 的增大而减小， $x > h$ ， y 随着 x 的增大而增大；当 $a < 0$ 时，图像开口向下， $x < h$ ， y 随着 x 的增大而增大， $x > h$ ， y 随着 x 的增大而减小。据此解答即可。

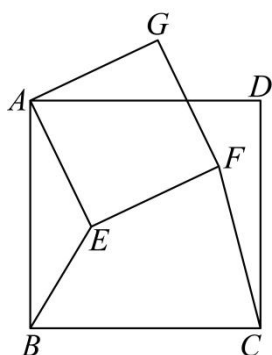
【详解】解： $\because y = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2$ ，二次项系数 $2 > 0$ ，

$\therefore$ 抛物线的图像开口向上，对称轴为 $x = -1$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 2$ 的顶点坐标是 $(-1, 0)$ ，在 $x < -2$ 的范围内， y 随着 x 的增大而减小。

故答案为： $(-1, 0)$ ；减小。

23. 四边形 $ABCD$, $AGFE$ 均为正方形，若 $BE = \sqrt{3}$ ，则 CF 长为_____。



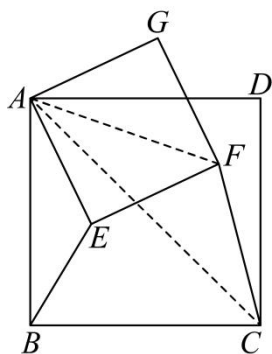
【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】连接对角线 AC 和 AF ， AC 与 AF 分别是四边形 $ABCD$ 和 $AGFE$ 的角平分线，可得

$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，再证 $\triangle BAE \sim \triangle CAF$ ，则 $\frac{BE}{CF} = \frac{BA}{CA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即可求出结果。

【详解】解：如图，连接对角线 AC 和 AF ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和 $AGFE$ 都是正方形，

$\therefore AC$ 与 AF 分别是四边形 $ABCD$ 和 $AGFE$ 的角平分线,

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \angle BAE = 45^\circ - \angle EAC, \angle CAF = 45^\circ - \angle EAC$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAF$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CAF$$

$$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{BA}{CA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

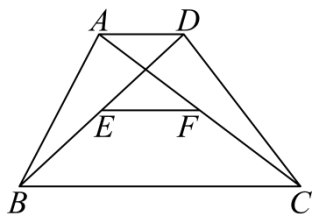
$$\text{即: } \frac{\sqrt{3}}{CF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{解得: } CF = \sqrt{6}$$

【点睛】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，正确画出辅助线，耐心推理是解题的关键.

三、证明题

24. (本题要写成完整的推导过程及证明理由) 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD < BC, E, F$ 分别是对角线 BD, AC 中点, 求证: $EF = \frac{1}{2}(BC - AD)$

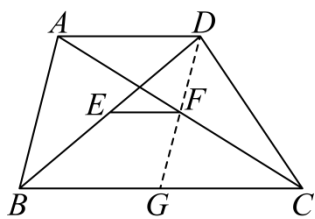


【答案】 见详解

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的辅助线问题，掌握全等三角形的性质以及判定定理、中位线的性质是解题的关键. 连接 DF ，并延长交 BC 于点 G ，易证得 $\triangle ADF \cong \triangle GCF$ ，即可求得 $DF = FG, CG = AD$ ，继而可得 EF 是 $\triangle DBG$ 的中位线，则可推知结论.

【详解】 解：连接 DF ，并延长交 BC 于点 G ，



$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAF = \angle GCF$ (两直线平行, 内错角相等)

$\therefore F$ 是 AC 的中点,

$\therefore AF = CF$ (线段中点的定义)

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle GCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAF = \angle GCF \\ AF = CF \\ \angle AFD = \angle CFG \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle GCF$ (ASA),

$\therefore DF = FG, CG = AD$ (全等三角形的对应边相等),

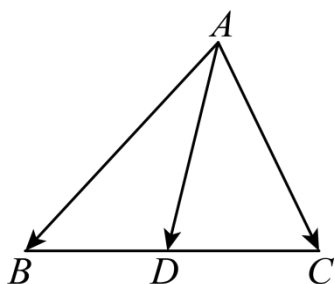
$\therefore BG = BC - CG = BC - AD$,

$\therefore E$ 是 BD 的中点,

$\therefore BE = DE$ (线段中点的定义),

$\therefore EF = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}(BC - AD)$ (中位线的性质).

25. (要求该题不得使用全等) 已知 $\triangle ABC$, AD 为 BC 上的中线, 求证: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了三角形中线, 向量的运算, 利用中线的性质得出 $BD = \frac{1}{2}BC$, 根据平面向量的运算法则, 将 $\overrightarrow{BD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 表示, 最后根据向量加法即可得证.

【详解】证明: $\because AD$ 为 BC 上的中线,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

四、解答题

26. 小明发现路边一游戏摊在掷正方体骰子，规则是出现 6 点获 10 元，掷一次付 1 元，小明记录如下：

游客	A	B	C	D	E	F	G	H
投掷次数	30	20	25	5	18	50	12	40
中奖次数	1	0	0	1	0	2	0	1

试通过运算揭示该游戏中骰子是否均匀？对游客来说是骗局吗？

【答案】 摆摊人所用的骰子质量分布不均匀，对游客来说是骗局。

【解析】

【分析】 本题考查了通过概率反映出游戏的公平性，先根据正方体骰子的特点计算出 6 出现的概率，再与小明实际记录的中奖次数相比较即可得出结论，解题的关键是理解概率 = 所求情况数与总情况数之比大量实验得到的频率接近于概率。

【详解】 解：对于一个普通的正方体骰子，6 点出现的概率应为 $\frac{1}{6}$ ，

由小明记录的抛掷次数为 200 次，中奖的次数应为 33 次左右，而实际中奖次数只有 5 次，

$\therefore$ 摆摊人所用的骰子质量分布不均匀，对游客来说是骗局。

27. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像过 $(-5, 0)$, $(0, \frac{5}{2})$, $(1, 6)$ 三点，直线 l 解析式为 $y = 2x - 3$ ，

(1) 求二次函数解析式

(2) 求证：此抛物线与直线 l 无公共点

(3) 若与 l 平行的某直线与抛物线只有一个交点 P ，求 P 点坐标

(4) 若 $Q(x, y)$ 是直线 l 上的一个动点，求 P 、 Q 两点距离的最小值

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$

(2) 见解析 (3) $(-1, 0)$

(4) $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据待定系数法求解即可；

(2) 把抛物线解析式和直线 l 解析式联立方程组，整理得出 $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2} = 0$ ，然后判断 $\Delta < 0$ 即可；

(3) 设该直线解析式为 $y = 2x + m$ ，联立方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} \\ y = 2x + m \end{cases}$ ，整理得 $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} - m = 0$ ，结合已

知可得出 $\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - m \right) = 0$ ，求出 m 的值，然后求出方程组的解即可；

(4) 设直线 l 与 x 、 y 轴交于点 A 、 B ，求出 A 、 B 的坐标，则可求出 $AO = \frac{3}{2}$ ， $BO = 3$ ， $AP = \frac{5}{2}$ ，根据勾股定理求出 $AB = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ ，根据垂线段最短得当 $PQ \perp l$ 时， PQ 最小，此时 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}AP \cdot BO = \frac{1}{2}AB \cdot PQ$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

解：把 $(-5, 0)$ ， $(0, \frac{5}{2})$ ， $(1, 6)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，

$$\text{得} \begin{cases} 25a - 5b + c = 0 \\ c = \frac{5}{2} \\ a + b + c = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2};$$

【小问 2 详解】

$$\text{证明：联立方程组} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} \\ y = 2x - 3 \end{cases},$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2} = 0,$$

$$\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} = -10 < 0,$$

$\therefore$ 该方程无实数根,

$\therefore$ 方程组无解,

$\therefore$ 此抛物线与直线 l 无公共点;

【小问 3 详解】

解: 设该直线解析式为 $y = 2x + m$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}, \\ y = 2x + m \end{cases}$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} - m = 0,$$

$\therefore$ 与 l 平行的某直线与抛物线只有一个交点,

$\therefore$ 方程有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - m \right) = 0,$$

$$\therefore m = 2,$$

$$\therefore \text{方程为 } \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = -1,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = 2 \times (-1) + 2 = 0,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-1, 0)$.

【小问 4 详解】

解: 设直线 l 与 x 、 y 轴交于点 A 、 B ,

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } 2x - 3 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2}; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, } y = -3,$$

$$\therefore A\left(\frac{3}{2}, 0\right), B(0, -3),$$

$$\text{又 } P(-1, 0),$$

$$\therefore AO = \frac{3}{2}, BO = 3, AP = \frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

当 $PQ \perp l$ 时, PQ 最小,

$$\text{此时 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AP \cdot BO = \frac{1}{2} AB \cdot PQ,$$

$$\therefore PQ = \frac{AP \cdot BO}{AB} = \frac{\frac{5}{2} \times 3}{\frac{3}{2}\sqrt{5}} = \sqrt{5},$$

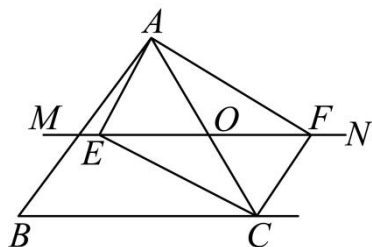
即 PQ 的最小值为 $\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数与一元二次方程, 根的判别式, 勾股定理等知识, 解题的关键是将函数问题转化为方程问题, 善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识求解.

28. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, O 是 AC 上一个动点, 过点 O 作直线 $MN \parallel BC$, 设 MN 交 $\angle BCA$ 的角平分线于点 E , 交 $\angle BCA$ 的外角平分线于点 F .

(1) 求证: $EO=FO$; (2) 当点 O 运动到何处时, 四边形 $AECF$ 是矩形? 并证明你的结论;

(3) 若 AC 边上存在点 O , 使四边形 $AECF$ 是正方形且 $\frac{AE}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 求 $\angle B$ 的大小.



【答案】 见解析

【解析】

【详解】 试题分析: (1) 根据 $MN \parallel BC$, CE 平分 $\angle ACB$, CF 平分 $\angle ACD$ 及等角对等边即可证得 $OE=OF$;

(2) 根据矩形的性质可知: 对角线且互相平分, 即 $AO=CO$, $OE=OF$, 故当点 O 运动到 AC 的中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形;

(3) 当四边形 $AECF$ 是正方形时, 可得: $AO \perp EF$, 又 $BC \parallel EF$, 则 $AC \perp BC$, 在正方形 $AECF$ 中, $AC = \sqrt{2} AE$,

根据 $\frac{AE}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 可得: $\tan B = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$, 故 $\angle B = 60^\circ$.

解: (1) 证明: $\because MN \parallel BC$, CE 平分 $\angle ACB$, CF 平分 $\angle ACD$,

$\therefore \angle BCE = \angle ACE = \angle OEC$, $\angle OCF = \angle FCD = \angle OFC$,

$$\therefore OE=OC, OC=OF,$$

$$\therefore OE=OF.$$

(2) 当 O 运动到 AC 中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形,

$$\therefore AO=CO, OE=OF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle ECA + \angle ACF = \frac{1}{2} \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ECF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

(3) 当四边形 $AECF$ 是正方形时, $AO \perp EF$, $AC = \sqrt{2} AE$,

$$\therefore BC \parallel EF,$$

$$\therefore AC \perp BC.$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore BC = \frac{\sqrt{6}}{3} AE,$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}AE}{\frac{\sqrt{6}AE}{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ.$$

点睛: 本题主要考查了等边三角形的判定, 矩形的判定定理, 正方形的性质定理, 锐角三角函数的定义, 角平分线和平行线的性质等知识点, 解题的关键是熟练掌握矩形的判定和正方形的性质.

29. 如图, 平面直角坐标系中, 点 A 坐标 (a, a) , 点 B 坐标 $(b, -b)$, 其中实数 a, b ($a < 0 < b$) 分别是方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 两根. 抛物线经过 A, B, O 三点, 线段 AB 交 y 轴于 C . 若 P 为线段 OB 上一个动点 (不与 O, B 重合), 直线 PC 与抛物线交于 D, E 两点 (D 在 y 轴右边), 连接 OD, BD

$$\text{解得} \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases},$$

故抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$;

【小问 2 详解】

解：设直线 AB 的表达式为 $y = k_1x + b_1$,

$\therefore$ 点 A 、 B 的坐标分别为 $(-1, -1)$, $(3, -3)$,

$\therefore$ 将点 A 、 B 的坐标代入一次函数表达式得 $\begin{cases} -k_1 + b_1 = -1 \\ 3k_1 + b_1 = -3 \end{cases}$,

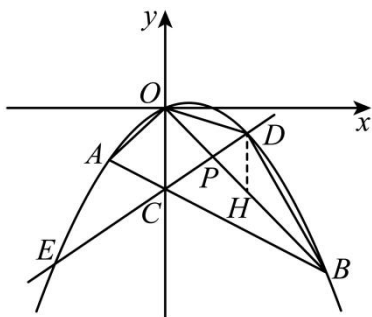
$$\text{解得:} \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \\ b_1 = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 $C\left(0, -\frac{3}{2}\right)$,

同理可得：直线 OB 的表达式为 $y = -x$,

过点 D 作 y 轴的平行线交 OB 于点 H ,



设点 $D\left(x, -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$, 则点 $H(x, -x)$,

$$\therefore \triangle BOD \text{ 面积} = \frac{1}{2} \times DH \times x_B$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + x \right)$$

$$= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x$$

$$= -\frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{16},$$

$$\because -\frac{3}{4} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } \triangle BOD \text{ 面积有最大值为 } \frac{27}{16}, \quad -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{8},$$

$$\text{此时点 } D\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{8}\right);$$

【小问3详解】

$$\text{解: 由 (2) 得, 直线 } AB \text{ 的表达式为 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \text{ 点 } C\left(0, -\frac{3}{2}\right), \text{ 直线 } OB \text{ 的表达式为 } y = -x,$$

$\because \triangle OPC$ 为等腰三角形,

$$\therefore OC = OP \text{ 或 } OP = PC \text{ 或 } OC = PC,$$

$$\text{设 } P(x, -x),$$

$$(i) \text{ 当 } OC = OP \text{ 时, } x^2 + (-x)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore P_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right);$$

(ii) 当 $OP = PC$ 时, 点 P 在线段 OC 的中垂线上,

$$\therefore P_2\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right);$$

$$(iii) \text{ 当 } OC = PC \text{ 时, 由 } x^2 + \left(-x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 0 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right);$$

综上, P 点坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.