

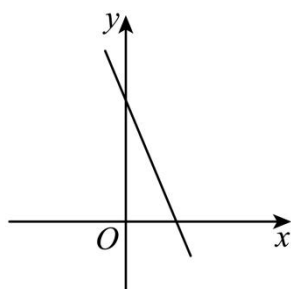
存志学校 2024 学年第二学期初二数学阶段测试二

数学试卷

(时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 直线 $y = kx + b$ 在坐标系中的位置如图所示, 它的函数解析式可能为 ()



- A. $y = 2x + 1$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = 2x - 2$ D. $y = -2x - 2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与 k, b 的关系. 解答本题注意理解: 直线 $y = kx + b$ 所在的位置与 k, b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限. $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限. $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交. $b = 0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

根据一次函数经过的图象即可判断;

【详解】解: 根据图象可得 $y = kx + b$ 经过第一、二、四象限,

故 $k < 0, b > 0$,

只有 B 符合题意,

故选: B.

2. 一列客车在行驶中因故障问题停留了 15 分钟, 如果把速度每小时加快 10 千米, 那么继续行驶 20 千米可正点到达. 若设客车原来行驶的速度是 x 千米/小时, 则所列方程是 ()

- A. $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = 15$ B. $\frac{20}{x+10} - \frac{20}{x} = 15$
C. $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{1}{4}$ D. $\frac{20}{x+10} - \frac{20}{x} = \frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】设客车原来行驶的速度是 x 千米/小时, 然后根据将速度每小时加快 10 千米, 那么继续行驶 20 千

米便可正点到达，列出分式方程，即可作答。本题主要考查了列分式方程，正确理解题意列出方程是解题的关键。

【详解】解：由题意得，客车原来行驶的速度是 x 千米/小时，

$$\text{故 } \frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4},$$

故选：C

3. 下列命题中，真命题为（ ）

A. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

B. 若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 。

C. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$

D. 若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ，则 A 、 B 、 C 、 D 构成平行四边形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了向量的基本性质，熟悉掌握向量的基本性质是解题的关键。

根据向量的基本性质逐一判断即可。

【详解】解：A: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ，故 A 错误；

B: $\vec{a} = \vec{b}$ ，则它们的大小和方向相同， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 成立，故 B 正确；

C: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，它们的方向不确定，因此向量不一定相等，故 C 错误；

D: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ，只能说明向量平行且相等，但四点位置可能不在同一平面或形成其他图形（如三点共线），无法保证构成平行四边形，故 D 错误；

故选：B。

4. 下列命题中，真命题是（ ）

A. 对角线相等的四边形是平行四边形

B. 对角线互相垂直的四边形是矩形

C. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形

D. 对角线平分一组对角的平行四边形是正方形

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形、菱形和正方形的判定等知识点，熟练掌握相关判定定理是解题的关键。

根据矩形、菱形和正方形的判定定理逐项判断即可.

- 【详解】解：A、对角线相等的平行四边形是矩形或等腰梯形，故该命题为假命题，不符合题意；
B、对角线互相垂直的四边形可以是正方形、菱形、以及一般四边形，故该命题为假命题，不符合题意；
C、对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故为真命题，符合题意；
D、对角线平分一组对角的平行四边形是菱形，故该命题为假命题，不符合题意.

故选：C.

5. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是（ ）

- A. $AC = BD$ B. $OA = OB$ C. $\angle DAC = \angle BAC$ D. $\angle ABC = \angle BAD$.

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形的判定，根据矩形的判定定理：有一个角是直角的平行四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形分别进行分析即可.

【详解】解：A、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC = BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，故此选项不符合题意；

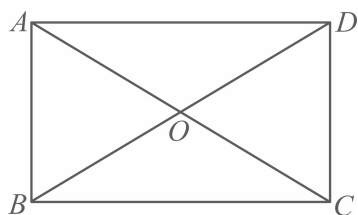
B、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC, OB = OD$,

$\therefore OA = OB$,

$\therefore AC = BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，故此选项不符合题意；



C、不能证明四边形 $ABCD$ 为矩形，故此选项符合题意；

D、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$,

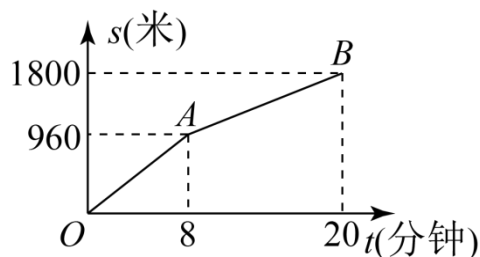
$\therefore \angle ABC = \angle BAD$,

$\therefore \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，故此选项不符合题意.

故选：C.

6. 小明从家步行到学校需走的路程为 1800 米. 图中的折线 OAB 反映了小明从家步行到学校所走的路程 s (米) 与时间 t (分钟) 的函数关系, 根据图象提供的信息, 判断下列说法中错误的是 ()



- A. 小明从家步行到学校共用了 20 分钟
B. 小明从家步行到学校的平均速度是 90 米/分
C. 当 $t < 8$ 时, s 与 t 的函数解析式是 $s = 120t$
D. 小明从家出发去学校步行 15 分钟时, 到学校还需步行 360 米

【答案】D

【解析】

【分析】利用坐标轴 t 轴数据可判断 A , 利用纵轴 1800 米与横轴 20 分钟, 可判断 B , 根据当 $1 < 8$ 时, 小明走的路程为 960 米, 可判断 C , 根据已知信息求出当 $8 \leq t \leq 20$ 时, 利用待定系数法 $s = 70t + 400$; 求 15 分钟函数值可判断 D 即可.

【详解】解: 由图象可知, 小明从家步行到学校共用了 20 分钟, 故 A 正确;

根据图象可得到两条选项小明从家步行到学校共用了 20 分钟和行走了 1800 米到学校,

所以小明的平均速度为 $1800 \div 20 = 90$ (米/分), 故 B 正确;

当 $1 < 8$ 时, 小明走的路程为 960 米, 速度为 $960 \div 8 = 120$ (米/分), s 与 t 的函数解析式是 $s = 120t$, 故 C 正确;

当 $8 \leq t \leq 20$ 时, 设 $s = kt + b$,

将 $(8, 960)$ 、 $(20, 1800)$ 代入, 得:

$$\begin{cases} 8k + b = 960 \\ 20k + b = 1800 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 70 \\ b = 400 \end{cases},$$

$$\therefore s = 70t + 400;$$

$$\text{当 } t = 15 \text{ 时, } s = 1450,$$

$$1800 - 1450 = 350 \text{ (米)},$$

∴当小明从家出发去学校步行 15 分钟时，到学校还需步行 350 米，故 D 错误.

故选: D .

【点睛】 本题考查利用函数图像信息解决问题，会看图像，捕捉信息，从横轴获取是间信息，从纵轴获取路程性质，利用速度，时间，路程公式可获取速度，利用时间点与图像关系或函数值信息.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 直线 $y = \sqrt{2}x - 3$ 的截距是_____

【答案】 -3

【解析】

【分析】 结合一次函数 $y = kx + b$ ，则 b 就是直线在 y 轴上的截距，据此进行作答即可；本题考查一次函数图象上点的坐标特征，熟记截距的定义是解题的关键.

【详解】 解：由截距定义得：直线 $y = \sqrt{2}x - 3$ 的截距是 -3 .

故答案为: -3

8. 已知直线 $y = kx + 3$ 经过点 $(1, 0)$ ，那么该直线与坐标轴围成的三角形的面积为_____

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与坐标轴的交点问题，求出当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，再结合三角形面积公式计算即可得解，熟练掌握一次函数的性质是解此题的关键.

【详解】 解：在直线 $y = kx + 3$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

∴直线 $y = kx + 3$ 经过点 $(1, 0)$ ，

∴该直线与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$ ，

故答案为: $\frac{3}{2}$.

9. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在直线 $y = -2x + 1$ 上，如果 $x_1 < x_2 < 0$ ，那么 y_1 _____ y_2 (填 “ $>$ ”、“ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质，根据一次函数的解析式，进而得到一次函数的增减性判断函数值的大小，即可解题.

【详解】解：∵点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在直线 $y = -2x + 1$ 上， $-2 < 0$ ，

∴ y 随 x 的增大而减小，

∵ $x_1 < x_2 < 0$ ，

∴ $y_1 > y_2$ ；

故答案为：>.

10. 如果一个多边形的每一个内角都等于 140° ，那么这个多边形的边数是_____

【答案】9

【解析】

【分析】本题考查了多边形内角和与外角和综合，熟练掌握多边形的外角和为 360° 是解题的关键. 由题意得，多边形的每一个外角都等于 40° ，结合多边形的外角和为 360° ，即可求出这个多边形的边数.

【详解】解：∵多边形的每一个内角都等于 140° ，

∴多边形的每一个外角都等于 $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ ，

∵多边形的外角和为 360° ，

∴这个多边形的边数是 $360 \div 40 = 9$.

故答案为：9.

11. 方程 $\sqrt{2x+3} = -x$ 的解为_____.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，二次根式运算法则，解一元二次方程的方法即可求解.

【详解】解： $\sqrt{2x+3} = -x$

两边同时平方得， $2x+3 = x^2$ ，整理得， $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，

∴ $(x+1)(x-3) = 0$ ，解得， $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ ，

当 $x = -1$ 时，被开方数 $2x+3 = 2 \times (-1) + 3 = 1$ ，且 $\sqrt{1} = -(-1) = 1$ ，符合题意；

当 $x = 3$ 时，被开方数 $2x+3 = 2 \times 3 + 3 = 9$ ，且 $\sqrt{9} = 3 \neq -3$ ，不符合题意；

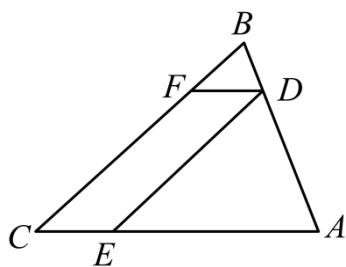
∴原方程的解为 $x = -1$ ，

故答案为： $x = -1$.

【点睛】本题主要考查二次根式与解一元二次方程的综合，掌握二次根式的性质，解一元二次方程的方法

是解题的关键.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \angle B$, D 是 AB 上任意一点, $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$, $AC = 4\text{cm}$, 则四边形 $DECF$ 的周长是_____.



【答案】 8cm

【解析】

【分析】 求出 BC , 求出 $BF = DF$, $CE = AE$, 代入得出四边形 $DECF$ 的周长等于 $BC + AC$, 代入求值即可;

【详解】 $\because \angle A = \angle B$,

$$\therefore BC = AC = 4\text{cm},$$

$$\because DF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle A = \angle BDF,$$

$$\because \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \angle B = \angle BDF,$$

$$\therefore DF = BF,$$

同理 $AE = DE$,

$$\therefore \text{四边形 } DECF \text{ 的周长为: } CF + DF + DE + CE = CF + BF + AE + CE,$$

$$= BC + AC = 4\text{cm} + 4\text{cm} = 8\text{cm}.$$

故答案为 8cm .

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的判定与性质, 结合等腰三角形的性质是解题的关键.

13. 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 2$, 那么 $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| =$ _____

【答案】 $2\sqrt{3}$

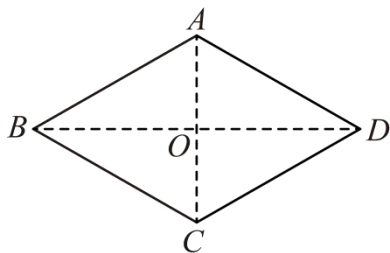
【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质, 向量的有关计算, 连接 AC 和 BO , 由菱形的性质得出 $BD = 2BO$,

$\angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, $AC \perp BD$, 由含 30° 度直角三角形的性质得出 $AO = \frac{1}{2}AB = 1$, 由勾股定理

求出 BO ，进而求出 BD 最后根据 $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{3}$ 即可得出答案.

【详解】解：如下图：连接 AC 和 BO ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore BD = 2BO, \quad \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AB = 1,$$

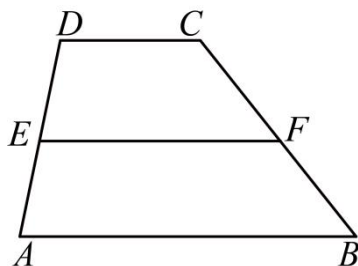
$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 2BO = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{3},$$

故答案为： $2\sqrt{3}$

14. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle D = 2\angle B$ ， $AD = 4$ ， $DC = 3$ ，则中位线 $EF =$ _____

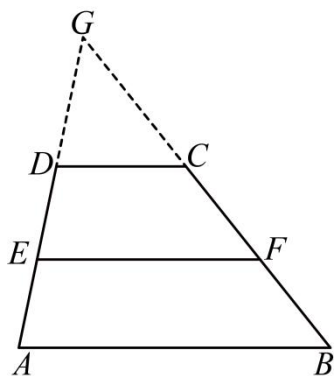


【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查了梯形中位线定理、等角对等边，熟练掌握梯形中位线定理是解题的关键. 延长 AD 与 BC 交于点 G ，设 $\angle B = \alpha$ ，则 $\angle ADC = 2\alpha$ ，利用平行线的性质得到 $\angle GCD = \angle B = \alpha$ ，得到 $\angle G = \angle ADC - \angle GCD = \alpha$ ，得出 $DG = DC = 3$ ，则有 $AG = AD + DG = 7$ ，再由 $\angle B = \angle G = \alpha$ 得到 $AB = AG = 7$ ，最后利用梯形中位线定理即可求解.

【详解】解：如图，延长 AD 与 BC 交于点 G ，



$$\because \angle ADC = 2\angle B,$$

$$\therefore \text{设 } \angle B = \alpha, \text{ 则 } \angle ADC = 2\alpha,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle GCD = \angle B = \alpha,$$

$$\therefore \angle G = \angle ADC - \angle GCD = 2\alpha - \alpha = \alpha,$$

$$\therefore \angle G = \angle GCD,$$

$$\therefore DG = DC = 3,$$

$$\therefore AG = AD + DG = 4 + 3 = 7,$$

$$\because \angle B = \angle G = \alpha,$$

$$\therefore AB = AG = 7,$$

$\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{DC + AB}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

故答案为: 5.

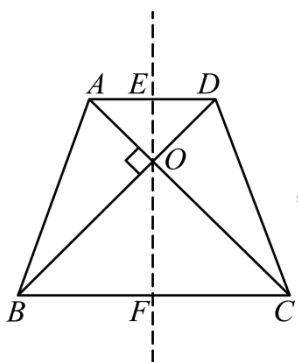
15. 已知等腰梯形上、下底分别是 2cm, 6cm, 且两条对角线互相垂直, 则梯形的面积为_____cm²

【答案】 16

【解析】

【分析】本题考查了等腰梯形的性质、直角三角形的性质, 根据题意画出图形, 其中 $AD = 2\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $AC \perp BD$, AC 交 BD 于 O , 过点 O 作梯形对称轴 EF , 交 AD 于 E , 交 BC 于 F , 求出 $EF = 4\text{cm}$, 再由梯形的面积公式计算即可得解.

【详解】解: 如图: 等腰梯形 $ABCD$, 其中 $AD = 2\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $AC \perp BD$, AC 交 BD 于 O , 过点 O 作梯形对称轴 EF , 交 AD 于 E , 交 BC 于 F ,



由等腰梯形的对称性可得, $OA = OD$, $OB = OC$, $AE = DE$, $BF = CF$,

$\therefore AC \perp BD$,

$\therefore \triangle AOD$ 、 $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore OE = \frac{1}{2}AD = 1\text{cm}$, $OF = \frac{1}{2}BC = 3\text{cm}$,

$\therefore EF = OE + OF = 4\text{cm}$,

$\therefore$ 梯形的面积为 $\frac{1}{2}(AD + BC) \times EF = \frac{1}{2} \times (2 + 6) \times 4 = 16(\text{cm}^2)$,

故答案为: 16.

16. 顺次连接等腰梯形各边中点所得的四边形的两条对角线为 a 、 b , 则等腰梯形的面积为_____.

【答案】 ab

【解析】

【分析】 根据题意得到一条对角线是梯形得中位线, 另一条是梯形的高, 然后利用梯形的面积公式求解即可.

【详解】 根据题意可得,

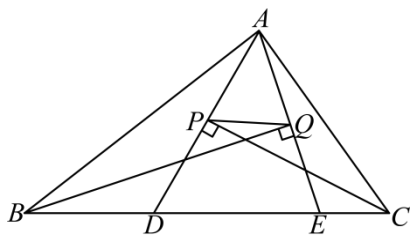
一条对角线是梯形得中位线, 另一条是梯形的高,

$\therefore$ 等腰梯形的面积 $= \frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} = ab$.

故答案为: ab .

【点睛】 此题考查了梯形的中位线和梯形的面积, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

17. 如图, $\triangle ABC$ 的周长为 26, 点 D 、 E 都在边 BC 上, $\angle ABC$ 的平分线垂直于 AE , 垂足为 Q , $\angle ACB$ 的平分线垂直于 AD , 垂足为 P . 若 $BC=10$, 则 PQ 的长是_____.



【答案】3

【解析】

【分析】首先根据角平分线的性质得出 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAD$ 是等腰三角形，再根据中位线的性质即可得出 PQ .

【详解】 $\because BQ$ 平分 $\angle ABC$, $BQ \perp AE$,

$\therefore \triangle BAE$ 是等腰三角形.

同理 $\triangle CAD$ 是等腰三角形.

$\therefore$ 点 Q 是 AE 中点, 点 P 是 AD 中点 (三线合一),

$\therefore PQ$ 是 $\triangle ADE$ 的中位线.

$\because BE+CD=AB+AC=26-BC=26-10=16$,

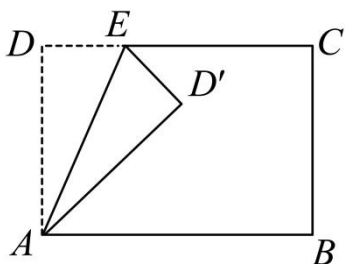
$\therefore DE=BE+CD-BC=6$,

$\therefore PQ=\frac{1}{2}DE=3$.

故答案为: 3.

【点睛】此题主要考查等腰三角形的判定和性质以及角平分线和中位线的性质, 熟练掌握, 即可解题.

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AD=5$, $AB=7$. 点 E 为 DC 上一个动点, 把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠, 当点 D 的对应点 D' 落在 $\angle ABC$ 的角平分线上时, DE 的长为_____.

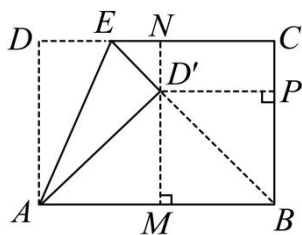


【答案】 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】连接 BD' , 过 D' 作 $MN \perp AB$, 交 AB 于点 M , CD 于点 N , 作 $D'P \perp BC$ 交 BC 于点 P , 先利用勾股定理求出 MD' 的长, 然后分两种情况利用勾股定理解题即可.

【详解】解: 连接 BD' , 过 D' 作 $MN \perp AB$, 交 AB 于点 M , CD 于点 N , 作 $D'P \perp BC$ 交 BC 于点 P , 则 $\triangle BMD'$ 是直角三角形,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 点 D 的对应点 D' 落在 $\angle ABC$ 的角平分线上,

$\therefore \angle D'BM = \angle D'BP = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $MBPD'$ 是矩形,

$\therefore \angle D'BM = 45^\circ$,

$\therefore D'M = MB$,

则四边形 $MBPD'$ 是正方形.

设 $MB = x$,

$\therefore AB = 7$,

$\therefore AM = 7 - x$,

又 $\therefore AD = 5$,

$\therefore AD' = 5$,

在 $\text{Rt}\triangle AMD'$ 中, 根据勾股定理, 得 $AM^2 + MD'^2 = AD'^2$, 即 $(7 - x)^2 + x^2 = 25$,

解得 $x = 3$ 或 4 ,

$\therefore MD' = MB = 3$ 或 4 .

设 $DE = a$, 当 $MD' = 3$ 时, $ND' = 2$, $NE = CD - DE - NC = 7 - a - 3 = 4 - a$,

根据勾股定理, 得 $ND'^2 + NE^2 = D'E^2$, 即 $2^2 + (4 - a)^2 = a^2$,

解得 $a = \frac{5}{2}$;

同理, 当 $MD' = 4$ 时, $ND' = 1$, $NE = 3 - a$,

根据勾股定理, 得 $1^2 + (3 - a)^2 = a^2$,

解得 $a = \frac{5}{3}$.

综上, $DE = \frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$,

故答案为: $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$.

【点睛】 本题考查了折叠的性质，勾股定理，角平分线的性质，矩形的判定与性质，正方向的判定与性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

三、解答题 (满分 78 分)

19. 解下列方程 (组)

$$(1) \frac{4x}{x^2-9}-1=\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x-3}$$

$$(2) \begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x+2y-12=0 \end{cases}$$

【答案】 (1) $x=7$

$$(2) \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程，一元二次方程，二元一次方程组的解法运算，熟练掌握运算是解题的关键.

(1) 去分母后解一元二次方程即可；

(2) 分析一元二次方程的解情况，组合成二元一次方程组，再求解即可.

【小问 1 详解】

$$\frac{4x}{x^2-9}-1=\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x-3}$$

$$\text{解: } \frac{4x}{(x+3)(x-3)}-1=\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x-3},$$

所有项乘 $(x+3)(x-3)$ 可得: $4x-(x+3)(x-3)=2(x-3)-2(x+3),$

去括号得: $4x-x^2+9=2x-6-2x-6,$

整理可得: $x^2-4x-21=0,$

因式分解可得: $(x-7)(x+3)=0,$

解得: $x=7$ 或 $x=-3,$

检验: 把 $x=7$ 代入 $(x+3)(x-3)$ 可得: $(7+3)(7-3)=40$, 符合;

把 $x=-3$ 代入 $(x+3)(x-3)$ 可得: $(-3+3)(-3-3)=0$, 不符合舍去;

$\therefore x = 7$ 为原方程的解;

【小问 2 详解】

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

解: $\because x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$,

$$\therefore (x - y)(x - 2y) = 0,$$

$$\therefore x - y = 0 \text{ 或 } x - 2y = 0,$$

$$\therefore \text{原方程组可为: } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases};$$

20. 一项工程, 如果甲、乙两队合作, 48 个月可以完成; 如果甲队单独做 40 个月后, 剩下的工程由乙队单独做, 还需 60 个月才能完成. 问: 甲、乙两队单独完成该工程各需要几个月?

【答案】甲需要 80 个月; 乙需要 120 个月

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组与分式方程的综合应用, 根据应用信息列出方程是解题的关键.

设甲乙两队单独完成该工程分别需要 x 个月和 y 个月, 根据题意列出方程组后求解即可.

【详解】解: 设甲乙两队单独完成该工程分别需要 x 个月和 y 个月,

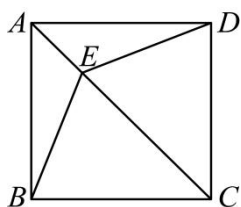
$$\text{根据题意可得: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \\ \frac{40}{x} + \frac{60}{y} = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 80 \\ y = 120 \end{cases},$$

$$\text{经检验, } \begin{cases} x = 80 \\ y = 120 \end{cases} \text{ 是原方程的解,}$$

答: 甲需要 80 个月; 乙需要 120 个月.

21. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在对角线 AC 上, $AE < EC$, $BE = DE$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,



- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；
- (2) 用含有 a 、 b 的式子表示 $\overrightarrow{BC} =$ _____
- (3) 求作： $a + b$ （不写作法，保留作图痕迹，写出结论）

【答案】 (1) 证明见解析

(2) $\vec{b} - \vec{a}$

(3) 见解析

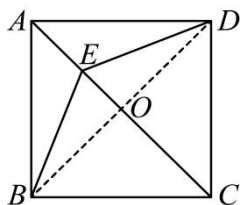
【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质，正方形的判定，向量的线性运算等知识点，熟悉掌握向量的运算是解题的关键.

- (1) 连接 BD ，证明对角线垂直即可解答；
- (2) 利用线性运算求解即可；
- (3) 延长 DC 至点 G 使 $CG = DC$ ，连接 AG ， BG ， AG 即为所求.

【小问 1 详解】

解： 连接 BD 如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，
 $\therefore BO = OD$ ，
 $\because BE = DE$ ，
 $\therefore AC$ 为 BD 的垂直平分线，
 $\therefore AC \perp BD$ ，
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形；

【小问 2 详解】

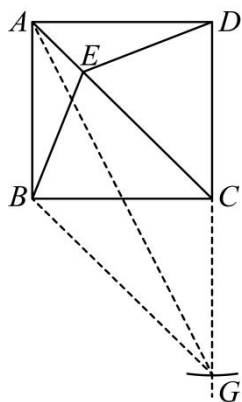
解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a}.$$

故答案为: $\vec{b} - \vec{a}$;

【小问 3 详解】

解: 延长 DC 至点 G 使 $CG = DC$, 连接 AG , BG , 如图所示:



$$\therefore CG = DC = AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

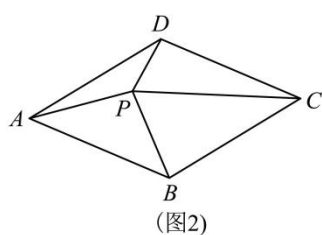
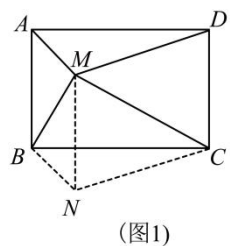
$$\therefore CG \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGC$ 为平行四边形,

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}, \text{ 图中 } AG \text{ 即为所求.}$$

22. “数学探究小组”研究如下问题: 如图 1, 点 M 是矩形 $ABCD$ 内一点, 求作一个四边形, 使得四边形的四边分别等于 AM 、 BM 、 CM 、 DM , 并且两条对角线互相垂直.

小组成员小杰提出了如下的作法: ①过点 M 作 $MN \parallel AB$ 并截取 $MN = AB$; ②分别连接 BN 、 CN . 那么四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形.



(1) 请判断小杰的作法是否正确, 并说明理由;

(2) 如图 2, 请根据上述信息提出一个类似问题: 点 P 是菱形 $ABCD$ 内一点, 求作一个四边形, 使得 _____, 并且 _____; (请作出图形并简要说明作法)

【答案】(1) 小杰的作法正确, 理由见解析

(2) 四边形的四边分别等于 AP 、 BP 、 CP 、 DP , 两条对角线相等, 图和作法见解析

【解析】

【分析】本题考查了矩形和菱形的性质, 平行四边形的判定和性质, 掌握特殊四边形的判定和性质是解题

关键.

(1) 根据矩形的性质证明四边形 $ABNM$ 和四边形 $CDMN$ 都是平行四边形, 即可得到答案;

(2) 先根据 (1) 提出类似问题, 再过点 P 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F , 并截取 $PG = AB$;

2. 分别连接 BG 、 CG . 利用菱形的性质, 以及平行四边形的判定和性质, 即可证明四边形 $PBGC$ 就是所求作的四边形.

【小问 1 详解】

解: 小杰的作法正确, 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AB \perp BC$,

$\because MN \parallel AB$, $MN = AB$,

$\therefore AB \parallel CD \parallel MN$, $AB = MN = CD$, $MN \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 和四边形 $CDMN$ 都是平行四边形,

$\therefore AM = BN$, $DM = CN$,

$\therefore$ 四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形.

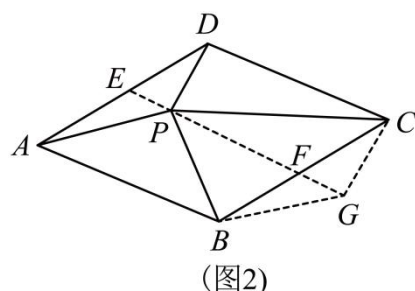
【小问 2 详解】

解: 如图 2, 点 P 是菱形 $ABCD$ 内一点, 求作一个四边形, 使得四边形的四边分别等于 AP 、 BP 、 CP 、 DP , 并且两条对角线相等.

作法:

1. 过点 P 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F , 并截取 $PG = AB$;

2. 分别连接 BG 、 CG . 那么四边形 $PBGC$ 就是所求作的四边形.



理由如下: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = BC$,

$\because EF \parallel AB$, $PG = AB$,

$\therefore AB \parallel CD \parallel GP$, $AB = PG = CD$,

$\therefore PG = BC$,

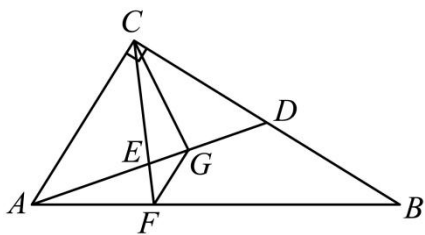
$\therefore$ 四边形 $ABGP$ 和四边形 $CDPG$ 都是平行四边形,

$\therefore AP = BG, DP = CG,$

$\therefore$ 四边形 $PBGC$ 就是所求作的四边形.

故答案为: 四边形的四边分别等于 AP 、 BP 、 CP 、 DP , 两条对角线相等.

23. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, AD 是 BC 边的中线, E 是 AD 的中点, 连接 CE 并延长交 AB 于 F , 过点 F 作 $FG \parallel AC$ 交 AD 于 G , 连接 CG



(1) 求证: 四边形 $ACGF$ 是等腰梯形;

(2) 求证 $BF = 2AF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用直角三角形性质得到 $AE = CE$, 结合平行线性质进而得到 $EG = EF$, 证明 $\triangle AEF \cong \triangle CEG$, 利用全等三角形性质证明, 即可解题.

(2) 如图, 延长 CG 到 M , 使 $GM = CG$, 交 AB 于 N , 连接 BM , 根据等腰梯形的性质得出 $\angle ACN = \angle CAN$, $AF = CG$, 即可得出 $GN = FN$, 根据中位线的性质得出 $AD \parallel BM$, $\angle DAB = \angle MBN$, 利用角的和差关系得出 $\angle BCN = \angle CBA$, 利用 ASA 证明 $\triangle AGN \cong \triangle BMN$, 得出 $GN = FN = \frac{1}{2}AF$, 根据线段的和差关系即可证明 $BF = 2AF$.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, E 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = CE = DE = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ECA,$$

$$\because FG \parallel AC,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle ECA = \angle EAC = \angle EGF,$$

$$\therefore EG = EF,$$

$$\because \angle AEF = \angle CEG,$$

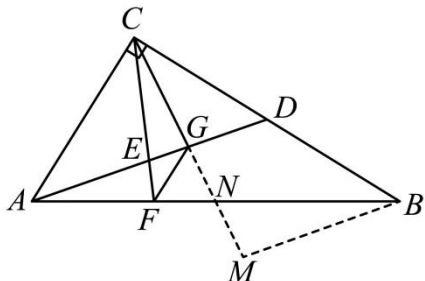
$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CEG (\text{SAS}),$$

$$\therefore AF = CG,$$

$\therefore$ 四边形 $ACGF$ 是等腰梯形.

【小问 2 详解】

证明：如图，延长 CG 到 M ，使 $GM = CG$ ，交 AB 于 N ，连接 BM ，



$\because AD$ 是 BC 边的中线， $GM = CG$ ，

$\therefore AD \parallel BM$ ，

$\therefore \angle DAB = \angle MBN$ ，

$\because$ 四边形 $ACGF$ 是等腰梯形，

$\therefore \angle ACN = \angle CAN$ ， $AF = CG$ ，

$\therefore CN = AN$ ，

$\therefore CN - CG = AN - AF$ ，即 $GN = FN$ ，

$\because \angle BCN + \angle ACN = \angle CBA + \angle CAN = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCN = \angle CBA$ ，

$\therefore CN = BN = AN$ ，

在 $\triangle AGN$ 和 $\triangle BMN$ 中，
$$\begin{cases} \angle GAN = \angle MBN \\ AN = BN \\ \angle ANG = \angle BNM \end{cases},$$

$\therefore \triangle AGN \cong \triangle BMN$ ，

$\therefore GN = MN = FN = \frac{1}{2}GM = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2}AF$ ，

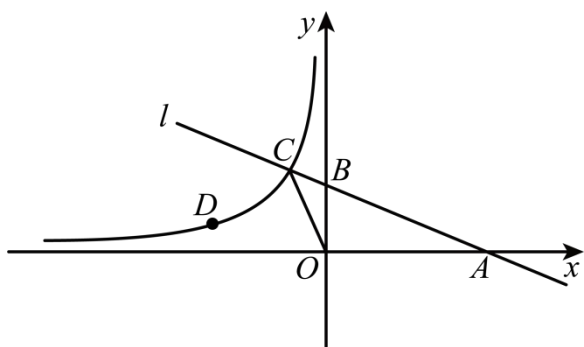
$\therefore AF + \frac{1}{2}AF = BF - \frac{1}{2}AF$ ，

$\therefore BF = 2AF$ 。

【点睛】 本题考查了直角三角形斜边中线的性质，等腰梯形的判定与性质，全等三角形性质和判定，三角形中位线性质，熟练掌握相关知识是解题的关键。

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，与双曲线

$y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 相交于点 C ，点 C 在第二象限且 $\triangle COA$ 的面积为 24. 点 $D(-6, m)$ 在双曲线上.



- (1) 求点 C 的坐标以及 k 的值;
- (2) 连接 CD ，直线 l 向上平移交直线 CD 于点 P ，点 Q 为平面内任意一点，如果四边形 $ACPQ$ 为菱形，求点 P 的坐标;
- (3) 点 E 为 y 轴上一动点，连接 DE ，以 DE 为边向 DE 右侧作正方形 $DEFG$ ，在点 E 运动的过程中，当顶点 F 落在直线 AB 上时，求点 E 的坐标. (请直接写出答案)

【答案】 (1) $C(-4, 6)$, $k = -24$

(2) $(3\sqrt{10} - 4, 3\sqrt{10} + 6)$

(3) 点 $E(0, -8)$ 或 $(0, 8)$

【解析】

【分析】 (1) 先求出 A 点坐标，根据 $S_{\triangle CAO} = \frac{1}{2} OA \cdot |y_C| = 24$ ，求出 C 点纵坐标，然后代入 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ，即可求出 C 点横坐标，最后将 C 点坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ ，进行求解即可；

(2) 先求出点 D 坐标，再求出直线 CD 表达式为 $y = x + 10$ ，设点 $P(x, x + 10)$ ，根据四边形 $ACPQ$ 是菱形，得出 $CP = CA$ ，列出方程求解即可得出点 P 坐标；

(3) 设点 $E(0, t)$ ，分两种情况①当点 E 在点 D 的下方时，②当点 E 在点 D 的上方时，分别求解即可.

【小问 1 详解】

解：把 $y = 0$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ，得 $x = 8$ ，

$\therefore$ 点 A 坐标是 $(8, 0)$ ，

$\therefore OA = 8$ ，

$$\therefore S_{\triangle CAO} = \frac{1}{2}OA \cdot |y_C| = 24,$$

$$\therefore |y_C| = 6,$$

$\therefore$ 点 C 在第二象限,

$$\therefore y_C = 6,$$

$$\text{把 } y = 6 \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x + 4, \text{ 得 } x = -4,$$

$\therefore$ 点 C 坐标是 $(-4, 6)$.

$$\text{把 } C(-4, 6) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x}, \text{ 得 } k = -4 \times 6 = -24.$$

【小问 2 详解】

$$\text{由 (1) 可知, 双曲线为 } y = -\frac{24}{x}.$$

$$\text{把 } D \text{ 坐标 } (-6, m), \text{ 代入 } y = -\frac{24}{x}, \text{ 得 } m = 4,$$

$\therefore$ 点 D 坐标是 $(-6, 4)$.

设直线 CD 表达式为: $y = k'x + b (k' \neq 0)$,

$$\text{把 } C(-4, 6), D(-6, 4) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} 6 = -4k' + b \\ 4 = -6k' + b \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k' = 1 \\ b = 10 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 CD 表达式为: $y = x + 10$.

$\therefore$ 四边形 $AC PQ$ 是菱形,

$$\therefore CP = CA,$$

$\therefore$ 点 P 在直线 CD 上,

$\therefore$ 设点 $P(x, x+10)$,

$$\therefore C(-4, 6), A(8, 0),$$

$$\therefore (x+4)^2 + (x+10-6)^2 = (8+4)^2 + 6^2,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3\sqrt{10} - 4, x_2 = -3\sqrt{10} - 4 \text{ (不合题意, 舍去).}$$

$\therefore$ 点 P 坐标是 $(3\sqrt{10}-4, 3\sqrt{10}+6)$,

【小问 3 详解】

设点 $E(0, t)$,

①当点 E 在点 D 的下方时,

如图, 过点 E 作 $EM \parallel x$ 轴, 过点 D 作 $DM \perp EM$, 垂足为 M ,

过点 F 作 $FN \perp EM$, 垂足为 N , 则 $\angle DME = \angle ENF = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 D 坐标是 $(-6, 4)$,

$\therefore EM = 6, DM = 4 - t$,

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是正方形,

$\therefore DE = EF, \angle DEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEM + \angle FEN = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEM + \angle EDM = 90^\circ$,

$\therefore \angle FEN = \angle EDM$,

$\therefore \triangle DME \cong \triangle ENF$ (AAS);

$\therefore FN = EM = 6, EN = DM = 4 - t$,

$\therefore$ 点 F 坐标是 $(4 - t, t + 6)$,

把 $F(4 - t, t + 6)$ 代入直线 $l_{AB}: y = -\frac{1}{2}x + 4$, 得 $t + 6 = -\frac{1}{2}(4 - t) + 4$,

解得: $t = -8$,

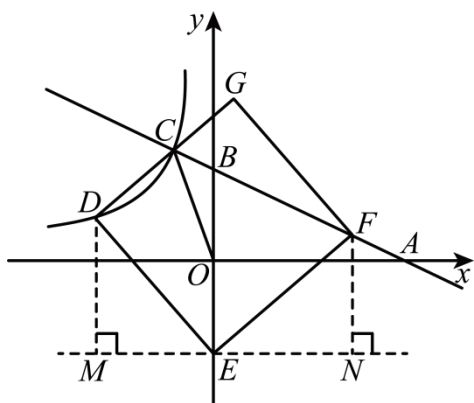
$\therefore$ 点 $E(0, -8)$;

②当点 E 在点 D 的上方时, 同理可得点 F 坐标是 $(t - 4, t - 6)$,

代入直线 $l_{AB}: y = -\frac{1}{2}x + 4$, 可得 $t - 6 = -\frac{1}{2}(t - 4) + 4$, 解得: $t = 8$,

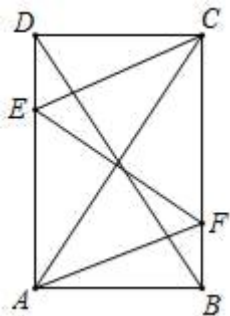
$\therefore$ 点 $E(0, 8)$.

综上所述, 点 $E(0, -8)$ 或 $(0, 8)$



【点睛】本题主要考查了一次函数和反比例函数的图象与性质，菱形的性质，正方形的性质，全等三角形的判定和性质，两点间距离公式等知识，综合性较强，熟练掌握相关性质并灵活运用，正确作出图形添加辅助线构建全等三角形是解题的关键.

25. 如图，在矩形 ABCD 中，AB = 1，对角线 AC、BD 相交于点 O，过点 O 作 EF ⊥ AC 分别交射线 AD 与射线 CB 于点 E 和点 F，连接 CE、AF.



- (1) 求证：四边形 AFCE 是菱形；
- (2) 当点 E、F 分别在边 AD 和 BC 上时，如果设 $AD = x$ ，菱形 AFCE 的面积是 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；
- (3) 如果 $\triangle ODE$ 是等腰三角形，求 AD 的长度.

【答案】(1) 见解析；(2) $y = \frac{1+x^2}{2x} (x \geq 1)$ ；(3) AD 的值为 $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 由 $\triangle DOE \cong \triangle BOF$ ，推出 $EO = OF$ ， $\because OB = OD$ ，推出四边形 EBFD 是平行四边形，再证明 $EB = ED$ 即可.

(2) 由 $\cos \angle DAC = \frac{AD}{AC} = \frac{OA}{AE}$ ，求出 AE 即可解决问题；

(3) 分两种情形分别讨论求解即可.

【详解】(1) ①证明：如图 1 中，

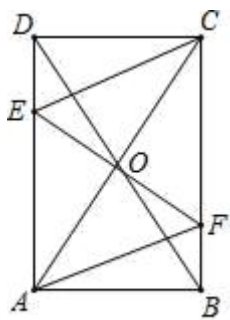


图1

∵ 四边形 ABCD 是矩形,

∴ $AD \parallel BC$, $OB = OD$,

∴ $\angle EDO = \angle FBO$,

在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle BOF$ 中,

$$\begin{cases} \angle EDO = \angle FBO \\ OD = OB \\ \angle EOD = \angle BOF \end{cases},$$

∴ $\triangle DOE \cong \triangle BOF$,

∴ $EO = OF$, ∵ $OB = OD$,

∴ 四边形 EBF D 是平行四边形,

∵ $EF \perp BD$, $OB = OD$,

∴ $EB = ED$,

∴ 四边形 EBF D 是菱形.

(2) 由题意可知: $AC = \sqrt{1+x^2}$, $OA = OC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^2}$,

$$\because \cos \angle DAC = \frac{AD}{AC} = \frac{OA}{AE},$$

$$\therefore AE = \frac{1+x^2}{2x},$$

$$\therefore y = AE \cdot CD = \frac{1+x^2}{2x},$$

∵ $AE \leq AD$,

$$\therefore \frac{1+x^2}{2x} \leq x,$$

$$\therefore x^2 \geq 1,$$

$$\because x > 0,$$

$$\therefore x \geq 1.$$

$$\text{即 } y = \frac{1+x^2}{2x} \quad (x \geq 1).$$

(3) ①如图 2 中, 当点 E 在线段 AD 上时, $ED = EO$, 则 $\text{Rt}\triangle CED \cong \text{Rt}\triangle CEO$,

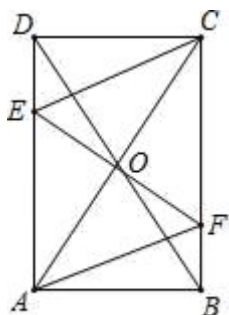


图2

$$\therefore CD = CO = AO = 1,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

如图 3 中, 当的 E 在线段 AD 的延长线上时, $DE = DO$,

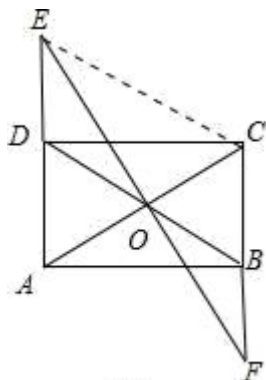


图3

$$\therefore DE = DO = OC, \quad EC = CE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ECD \cong \text{Rt}\triangle CEO,$$

$$\therefore CD = EO,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EAO, \quad \angle ADC = \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AOE,$$

$$\therefore AE = AC,$$

$$\therefore EO \text{ 垂直平分线段 } AC,$$

$$\therefore EA = EC,$$

$$\therefore EA = EC = AC,$$

$$\therefore \triangle ACE \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore AD = CD \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

综上所述，满足条件的 AD 的值为 $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题考查四边形综合题、矩形的性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形，学会转化的思想思考问题.