

2024 学年第二学期八年级数学阶段作业反馈 2

(时间 60 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列关于 x 的函数是一次函数的是 ()

A. $y = 3x$

B. $y = kx + b$

C. $y = \frac{1}{x}$

D. $y = 2x + \frac{1}{x}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的定义, 准确熟练地进行计算是解题的关键. 根据一次函数的一般形式:

$y = kx + b$ (k , b 为常数且 $k \neq 0$), 逐一判断即可解答.

【详解】 解: A. $y = 3x$ 是一次函数, 故符合题意;

B. 在 $y = kx + b$ 中, 因为没有指明 k 、 b 为常数, 且 $k \neq 0$, 所以不一定是一次函数, 故不符合题意;

C. $y = \frac{1}{x}$ 不是一次函数, 故不符合题意;

D. $y = 2x + \frac{1}{x}$ 不是一次函数, 故不符合题意;

故选: A.

2. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

A. $\sqrt{x} + 1 = 0$

B. $\sqrt{x^2 + 1} = 0$

C. $\sqrt{x} = x$

D. $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 1} = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 A、先移项, 然后根据二次根式有意义的条件进行判断;

B、C 两边平方后再来解方程;

D、根据二次根式有意义的条件来判断.

【详解】 解: A、由原方程得 $\sqrt{x} = -1 < 0$, 所以方程无实数根, 故本选项错误;

B、方程两边平方得, $x^2 + 1 = 0$, 因为 $\Delta = -4 < 0$, 没有实数根, 故本选项错误;

C、方程两边平方得, $x = x^2$, 即 $x^2 - x = 0$, 有实数根, 故本选项正确;

D、 $\sqrt{x} \geq 0$, $\sqrt{x^2 + 1} > 0$, 则 $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 1} = 0$ 无实数根, 故本选项错误.

故选 C.

【点睛】 本题考查了无理方程, 解题的关键要注意是否有实数根, 有实数根时是否有意义, 用到的知识点是根的

判别式.

3. 当 $b < 0$ 时, 直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 的图像经过 ()

A. 一、二、三象限;

B. 一、三、四象限;

C. 二、三、四象限;

D. 一、二、四象限.

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象和性质, 根据一次函数的图象和性质判断即可求解, 掌握一次函数的图象和性质是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + b$ 中, $k = \frac{1}{2} > 0$, $b < 0$,

$\therefore$ 直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 经过一、三、四象限,

故选: B.

4. 二元二次方程组 $\begin{cases} (x+1)(y-2) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$ 的解的个数是 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查解方程的能力, 体现数学中化归思想, 消元和降次是解此类问题的关键. 先由方程①求出 x, y 的值, 代入②, 求解, 即可得出结论.

【详解】 解: $\begin{cases} (x+1)(y-2) = 0 & \text{①} \\ y = x^2 & \text{②} \end{cases}$,

由①得 $x = -1$ 或 $y = 2$,

当 $x = -1$ 时, 代入②得: $y = 1$,

当 $y = 2$ 时, 代入②得: $x = \pm\sqrt{2}$,

所以方程组的解 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$.

故选: C.

5. 顺次连接菱形各边中点所得的四边形一定是 ()

A. 平行四边形

B. 菱形

C. 矩形

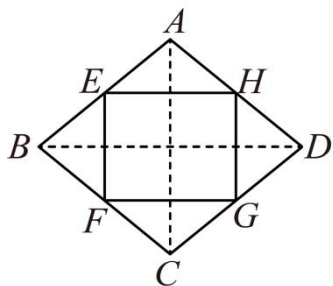
D. 正方形

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质和矩形的判定定理，正确理解菱形的性质以及三角形的中位线定理是解题的关键。先证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形，再根据有一个角是直角的平行四边形是矩形判断。

【详解】如图：菱形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 AD 的中点，



$$\therefore EH \parallel FG \parallel BD, EH = FG = \frac{1}{2}BD;$$

$$EF \parallel HG \parallel AC, EF = HG = \frac{1}{2}AC,$$

故四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

又 $\because AC \perp BD$,

$$\therefore EH \perp EF, \angle HEF = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形。

故选：C。

6. 下列判断中正确的是（ ）

A. 四边相等的四边形是正方形

B. 四角相等的四边形是正方形

C. 对角线相互垂直平分的平行四边形是正方形

D. 对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】根据正方形的判定：对角线相等且互相垂直平分的四边形是正方形，对各个选项进行分析。

【详解】A 错误，四边相等的四边形是菱形；

B 错误，四角相等的四边形是矩形；

C 错误，对角线互相垂直的平行四边形是菱形；

D 正确，对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形；

故选 D。

【点睛】本题主要考查了正方形的判定定理，解题的关键是熟记正方形的判定定理。

二、填空题（本大题共 12 题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. 已知，直线 $y = kx - 3$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x + 4$ 平行，那么 $k =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象的平移，解题关键是掌握一次函数图象的平移.
根据互相平行的直线 k 相等求解.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = kx - 3$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x + 4$ 平行，

$$\therefore k = \frac{1}{2},$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

8. 方程 $\sqrt{2x+3} = x$ 的解为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据无理方程的解法，首先，两边平方解出 x 的值，然后验根，解答即可.

【详解】 解： 两边平方得： $2x+3 = x^2$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

解方程得： $x_1 = 3$, $x_2 = -1$,

检验： 当 $x_1 = 3$ 时， 方程的左边 = 右边， 所以 $x_1 = 3$ 为原方程的解，

当 $x_2 = -1$ 时， 原方程的左边 $\neq$ 右边， 所以 $x_2 = -1$ 不是原方程的解.

故答案为 3.

【点睛】 此题考查无理方程的解， 解题关键在于掌握运算法则

9. 方程： $\frac{2}{x-1} = x$ 的根是_____.

【答案】 $x = -1$ 或 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程（化为一元二次方程）， 解题关键是掌握解分式方程（化为一元二次方程）.
先去分母， 再解整式方程， 然后验根.

【详解】 解： $\frac{2}{x-1} = x$

去分母，得 $x(x-1)=2$ ，

解得： $x=-1$ 或 $x=2$ ，

经检验， $x=-1$ 或 $x=2$ 都是原方程的根.

10. 关于 x 的方程 $x(a+2)=2x+1(a \neq 0)$ 的解是_____.

【答案】 $x=\frac{1}{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程（一）——合并同类项与移项，解题关键是掌握一元一次方程的解法. 利用移项，合并同类项，直接解关于 x 的方程.

【详解】 解： $x(a+2)=2x+1(a \neq 0)$ ，

移项，得 $x(a+2)-2x=1$ ，

所以 $ax=1$ ，

所以 $x=\frac{1}{a}$ ，

故答案为： $x=\frac{1}{a}$.

11. 用换元法解分式方程 $\frac{x}{x-1}+\frac{2-2x}{x}+3=0$ ，若设 $y=\frac{x}{x-1}$ ，则由原方程化成的关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2+3y-2=0$

【解析】

【分析】 设 $y=\frac{x}{x-1}$ ，则 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{y}$ ，把原方程化为： $\frac{x}{x-1}-\frac{2(x-1)}{x}+3=0$ ，即可得到答案.

【详解】 解： 因为： $\frac{x}{x-1}+\frac{2-2x}{x}+3=0$ ，

所以： $\frac{x}{x-1}+\frac{2(1-x)}{x}+3=0$ ，即 $\frac{x}{x-1}-\frac{2(x-1)}{x}+3=0$ ，

设 $y=\frac{x}{x-1}$ ，原方程化为： $y-\frac{2}{y}+3=0$ ，

所以去分母得： $y^2+3y-2=0$.

故答案为： $y^2+3y-2=0$.

【点睛】 本题考查的是用换元法解方程，找到整体进行换元是解题关键.

12. 一个 n 边形的每个外角都相等且等于 72° , 那么 $n =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了多边形内角和与外角和综合, 解题关键是明确多边形的外角和等于 360° .

根据多边形的外角和等于 360° , 用 360° 除以 72° 即可得 n 的值.

【详解】 解: $\because n$ 边形的每个外角都相等且等于 72° ,

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{72^\circ} = 5,$$

故答案为: 5.

13. 已知, 函数 $y = (1-m)x^{m^2-1} - 2$ 是一次函数, 且函数值 y 随 x 的值增大而减小, 那么 $m =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 可以根据一次函数的定义和增减性, 写出 m 需要满足的条件, 再求解即可.

【详解】 解: $\because$ 函数 $y = (1-m)x^{m^2-1} - 2$ 是一次函数, 且函数值 y 随 x 的值增大而减小,

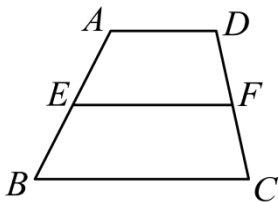
$$\therefore \begin{cases} m^2 - 1 = 1 \\ 1 - m < 0 \end{cases},$$

解得: $m = \sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了一次函数的定义以及一次函数的性质, 熟知 k 的几何意义是解题关键.

14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 、 F 分别是腰 AB 、 DC 的中点, 若 $AD = 2$, $EF = 3$, 那么 $BC =$ _____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了梯形的中位线定理, 解题关键是掌握梯形的中位线定理.

根据梯形的中位线定理，先得出 $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ，再将已知线段代入求值.

【详解】解：∵在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 、 F 分别是腰 AB 、 DC 的中点，

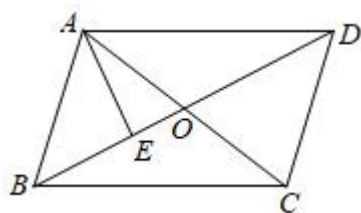
$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC),$$

$$\because AD = 2, EF = 3,$$

$$\therefore 3 = \frac{1}{2}(2 + BC), \text{ 解得: } BC = 4,$$

故答案为：4.

15. 如图，已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O ， $AE \perp BD$ 于点 E ， $\angle DAE = 60^\circ$ ， $AE = 2$ ， $AC + BD = 12$ ，那么 $\triangle BOC$ 的周长等于__.



【答案】10

【解析】

【分析】由题意可求得 $\angle ADE = 30^\circ$ ，则 $AD = 4$ ，根据平行四边形的性质可知 $BC = AD = 4$ ， $BO + CO = 6$ ，进而可求 $\triangle BOC$ 的周长.

【详解】解：∵ $AE \perp BD$ 于点 E ， $\angle DAE = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = 2$$

$$\therefore AD = 4,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BC = AD = 4,$$

$$\therefore AC + BD = 12,$$

$$\therefore BO + CO = 6,$$

$$\therefore \triangle BOC \text{ 的周长为 } BO + CO + BC = 6 + 4 = 10,$$

故答案为：10.

【点睛】本题考查了含 30° 的直角三角形，平行四边形的性质等知识. 解题的关键在于熟练掌握平行四边形的性质.

16. 解放军某部承担一段长 1500 米的清除公路冰雪任务. 为尽快清除冰雪，该部官兵每小时比原计划多清

除 20 米，结果提前 24 小时完成任务．若设原计划每小时清除公路冰雪 x 米，则可列出方程_____

【答案】 $\frac{1500}{x} - \frac{1500}{x+20} = 24$.

【解析】

【分析】 设原计划每小时清除公路冰雪 x 米，则实际每小时清除 $(x+20)$ 米，根据提前 24 小时完成任务，列出方程即可.

【详解】 设原计划每小时清除公路冰雪 x 米，则实际每小时清除 $(x+20)$ 米，
由题意得， $\frac{1500}{x} - \frac{1500}{x+20} = 24$.

17. 已知菱形的周长为 $8\sqrt{3}$ ，对角线之和为 8，则菱形的面积为_____.

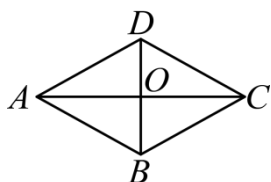
【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了利用菱形的性质求线段长，利用菱形的性质求面积，勾股定理等知识，解题关键会求菱形的面积.

先根据菱形的周长求出菱形的边长，再根据对角线的和为 8，得出 $AO + BO = 4$ ，及根据菱形的对角线互相垂直得到 $AO^2 + BO^2 = 12$ ，进而得出 $2AO \times BO = 4 = AC \times \frac{1}{2}BD$ ，即可求得菱形的面积.

【详解】 解：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，



$\therefore$ 菱形的周长为 $8\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 菱形的边长为 $2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 对角线的和为 8，

$\therefore AO + BO = 4$ ，

$\therefore AO^2 + BO^2 = 12$ ，

$\therefore (AO + BO)^2 = 16$ ，

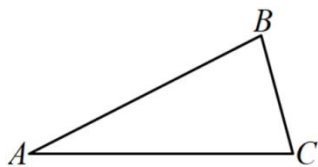
$\therefore AO^2 + BO^2 + 2AO \times BO = 16$ ，

$\therefore 2AO \times BO = 4$ ，

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 2AO \times 2BO = 2AO \times BO = 4.$$

故答案为：4.

18. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 4$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转，使点 B 落在点 B_1 处，点 C 落在点 C_1 处，且 $BB_1 \perp AC$ 。联结 B_1C 和 C_1C ，那么 $\triangle B_1C_1C$ 的面积等于_____.

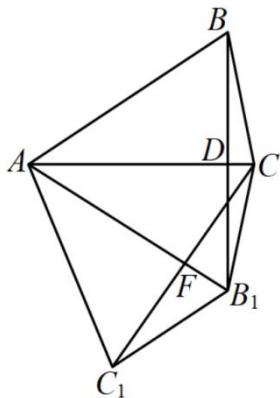


【答案】 $8 - 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先根据题意画出图形，然后根据等腰三角形三线合一得出 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转的角度，然后证明 $\triangle ACC_1$ 是等边三角形，利用等边三角形的性质得出 $CC_1 = AC$ 和 $AB_1 \perp CC_1$ ，再根据锐角三角函数求出 B_1F 的长度，最后利用 $S_{\triangle B_1C_1C} = \frac{1}{2} CC_1 \cdot B_1F$ 求面积即可.

【详解】解：如图，



$$\because AB = AB_1, \quad BB_1 \perp AC,$$

$$\therefore \angle DAB_1 = \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAB_1 = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 绕点 } A \text{ 顺时针旋转 } 60^\circ \text{ 得到 } \triangle AB_1C_1,$$

$$\therefore \angle CAC_1 = 60^\circ.$$

$$\because AC = AC_1,$$

$$\therefore \triangle ACC_1 \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore CC_1 = AC = 4, \quad AB_1 \perp CC_1.$$

$$\because AC = 4, \quad \angle CAF = 30^\circ,$$

$$\therefore AF = AC \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore B_1F = AB_1 - AF = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle B_1C_1C} = \frac{1}{2} CC_1 \cdot B_1F = \frac{1}{2} \times 4 \times (4 - 2\sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3}.$$

故答案为: $8 - 4\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查旋转的性质，等腰三角形的性质，等边三角形的判定及性质，解直角三角形，能够画出图形并求出旋转角是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 8 题, 共 58 分)

19. 解方程: $\frac{2x}{x+1} - 1 = \frac{3-x}{x^2-1}$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程 (化为一元二次), 解题关键是不要忽视验根.

先去分母, 再去括号, 移项, 合并同类项后解出方程的解, 再验根.

【详解】 解: 去分母, 得 $2x(x-1) - x^2 + 1 = 3 - x$,

去括号, 得 $2x^2 - 2x - x^2 + 1 = 3 - x$,

移项, 得 $2x^2 - 2x - x^2 + 1 - 3 + x = 0$,

合并同类项, 得 $x^2 - x - 2 = 0$,

解得: $x = -1$, $x = 2$,

经检验, 当 $x = -1$ 时, 原方程分母等于 0, 故 $x = -1$ 是增根;

当 $x = 2$ 时, 原方程分母不等于 0, 故 $x = 2$ 是原方程的解.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，解题关键是掌握解二元二次方程组.

先将第二个方程化为两个二元一次方程，再分别得到两个二元一次方程组求解.

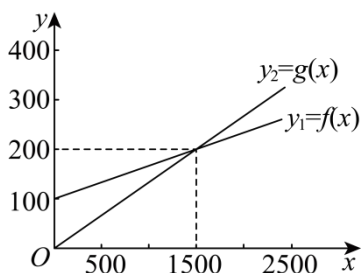
【详解】 解： $x^2 - 2xy + y^2 = 1$ 可化为 $(x - y)^2 = 1$,

开平方，得 $x - y = 1$ 或 $x - y = -1$,

当 $x - y = 1$ 时，方程组 $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ；

当 $x - y = -1$ 时，方程组 $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$.

21. 某公司在“5.12”四川汶川大地震中车辆损失严重，重建急需用车，但暂时又无力购车，于是准备与出租车公司签订租车合同. 以每月行驶 x 千米计算，甲出租车公司的月租车费用为 y_1 元，乙出租车公司的月租车费用为 y_2 元，如果 $y_1 = f(x)$ ， $y_2 = g(x)$ ，这两个函数的图像如图所示.



(1) 求函数 $y_1 = f(x)$ 的解析式；

(2) 如果每月用车的行驶路程为 2300 千米，那么租用哪家公司的车合算？请说明理由.

【答案】 (1) $y_1 = \frac{1}{15}x + 100$

(2) 租用甲出租车公司合算

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用，待定系数法求一次函数解析式，解题关键是会用待定系数法求一次函数解析式.

(1) 根据待定系数法求一次函数解析式方法，将点 $(1500, 200)$ 、 $(0, 100)$ 代入解析式即可；

(2) 利用已知得函数 $y_2 = g(x)$ 的图象经过点 $(1500, 200)$ ，求出 $y_1 < y_2$ ，得出答案即可.

【小问 1 详解】

解： 设函数 $y_1 = f(x)$ 的解析式为 $y_1 = kx + b$.

根据题意, 函数 $y_1 = f(x)$ 的图象经过点 $(1500, 200)$ 、 $(0, 100)$,

$$\text{得: } \begin{cases} 1500k + b = 200 \\ b = 100 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{15} \\ b = 100 \end{cases},$$

所以函数 $y_1 = f(x)$ 的解析式为 $y_1 = \frac{1}{15}x + 100$;

【小问 2 详解】

设函数 $y_2 = g(x)$ 的解析式为 $y_2 = k_1x$.

根据题意, 得函数 $y_2 = g(x)$ 的图象经过点 $(1500, 200)$,

$$\therefore 1500k_1 = 200,$$

$$\text{解得: } k_1 = \frac{2}{15},$$

$$\text{当 } x = 2300 \text{ 时, } y_1 = \frac{1}{15} \times 2300 + 100 = \frac{760}{3},$$

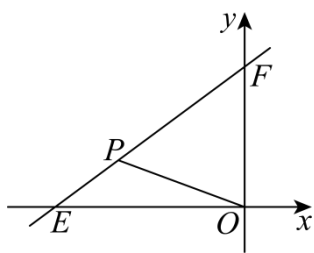
$$y_2 = \frac{2}{15} \times 2300 = \frac{920}{3},$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

$\therefore$ 如果每月用车的行驶路程为 2300 千米, 应租用甲出租车公司.

22. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 O 是坐标原点, 已知直线 $y = kx + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 E 、 F ,

且点 E 的坐标为 $(-4, 0)$.



(1) 求 k 值;

(2) 若点 $P(x, y)$ 是线段 EF 上的一点, $\triangle OPE$ 的面积为 2, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $k = \frac{3}{4}$

$$(2) \left(-\frac{8}{3}, 1\right)$$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征、待定系数法求函数解析式以及三角形的面积公式，解题关键是（1）利用待定系数法求出 k 值；（2）根据三角形的面积公式求出 P 点的纵坐标.

（1）依据题意，将点 E 的坐标代入一次函数解析式中，即可得出关于 k 的一元一次方程，解方程即可得出结论；

（2）依据题意，结合（1）中得 k 值可得出一次函数解析式，由点 E 的坐标可得出线段 OE 的长度，根据三角形的面积公式可求出点 P 的纵坐标，将点 P 的纵坐标代入一次函数解析式中即可求出点 P 的横坐标，由此即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：由题意，将点 $E(-4, 0)$ 代入到 $y = kx + 3$ 中，

$$\therefore -4k + 3 = 0,$$

$$\therefore k = \frac{3}{4};$$

【小问 2 详解】

解： $\because k = \frac{3}{4}$,

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的解析式为: } y = \frac{3}{4}x + 3,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } (-4, 0),$$

$$\therefore OE = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle OPE} = \frac{1}{2}OE \times y_P = \frac{1}{2} \times 4y_P = 2,$$

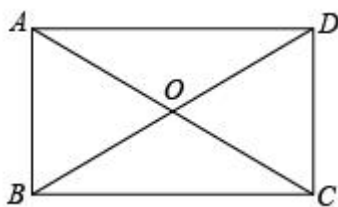
$$\therefore y_P = 1,$$

$$\text{当 } y = 1 \text{ 时, } \frac{3}{4}x + 3 = 1,$$

$$\therefore x = -\frac{8}{3},$$

$$\therefore \text{当 } \triangle OPE \text{ 的面积为 } 2 \text{ 时, 点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{8}{3}, 1\right).$$

23. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $BC = 4$.



(1) 求证: $\angle AOD = 120^\circ$;

(2) 求 AC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是矩形知 $BO=CO$, 据此得 $\angle OBC=\angle OCB$, 再由 $\angle ACB=30^\circ$ 知 $\angle OBC=30^\circ$, 结合 $\angle OBC+\angle OCB+\angle BOC=180^\circ$ 得 $\angle BOC=120^\circ$, 继而得证;

(2) 由四边形 $ABCD$ 是矩形知 $\angle ABC=90^\circ$, 结合 $\angle ACB=30^\circ$ 得 $AC=2AB$, 根据 $AB^2+BC^2=AC^2$, $BC=4$ 可求得 $AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 从而得出答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AC=BD, AO=CO=\frac{1}{2}AC, BO=DO=\frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BO=CO,$$

$$\therefore \angle OBC=\angle OCB,$$

$$\because \angle ACB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC=30^\circ,$$

$$\because \angle OBC+\angle OCB+\angle BOC=180^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC=120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD=\angle BOC=120^\circ;$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC=90^\circ,$$

$$\because \angle ACB=30^\circ,$$

$$\therefore AB=\frac{1}{2}AC, \text{ 即 } AC=2AB,$$

$$\because AB^2+BC^2=AC^2, BC=4,$$

$$\text{解得 } AB = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查矩形的性质，矩形的性质：①平行四边形的性质矩形都具有；②角：矩形的四个角都是直角；③边：邻边垂直；④对角线：矩形的对角线相等；⑤矩形是轴对称图形，又是中心对称图形．它有 2 条对称轴，分别是每组对边中点连线所在的直线；对称中心是两条对角线的交点．

24. 甲、乙两家便利店到批发站采购一批饮料，共 25 箱，由于两店所处的地理位置不同，因此甲店的销售价格比乙店的销售价格每箱多 10 元．当两店将所进的饮料全部售完后，甲店的营业额为 1000 元，比乙店少 350 元，求甲、乙两店各进货多少箱饮料？

【答案】 甲、乙两店各进货 10 箱和 15 箱

【解析】

【分析】 设甲店进货 x 箱，乙店进货 $(25-x)$ 箱，根据“甲店的销售价格比乙店的销售价格每箱多 10 元”列出方程解题即可．

【详解】 解：设甲店进货 x 箱，乙店进货 $(25-x)$ 箱，列方程得：

$$\frac{1000}{x} = \frac{1000+350}{25-x} + 10,$$

解得： $x_1 = 10$ 或 $x_2 = -260$ (舍去)，

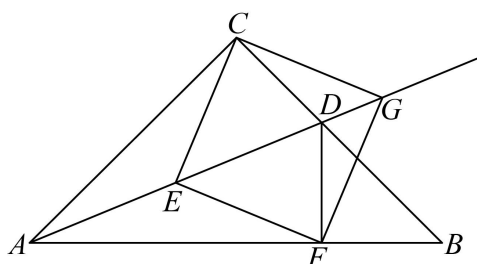
经检验： $x = 10$ 是原方程的解，

$\therefore$ 乙店进货 $25-x = 15$ (箱)

答：甲、乙两店各进货 10 箱和 15 箱．

【点睛】 本题考查分式方程解应用题，注意分式方程需要验根，解题的关键是分析题意出列方程．

25. 已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在 BC 上， $DF \perp AB$ ，垂足为 F ，且 $DF = CD$ ，点 E 为线段 AD 的中点，过点 F 作 $FG \parallel CE$ 交射线 AD 于 G ，联结 CG ．



(1) 求证：四边形 $CEFG$ 是菱形．

(2) 当 $AC=BC$ 时, 求证: 四边形 $CEFG$ 是正方形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据全等三角形的判定和性质得到 $\angle CAD = \angle FAD$, $AC = AF$, $CG = FG$, $\angle CGA = \angle FGA$, 由平行线的性质得到 $\angle FGA = \angle CEG$, 推出 $CE = CG$, 得到 $CE = CG = GF = EF$, 于是得到结论;

(2) 根据三角形的内角和得到 $\angle CAB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$, 求得 $\angle CAD = \angle FAD = 22.5^\circ$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle CAE = \angle ECA = 22.5^\circ$, $\angle FAE = \angle EFA = 22.5^\circ$, 求得 $\angle CEF = \angle CEG + \angle CEF = 90^\circ$, 根据正方形的判定定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $DF \perp AB$,

$\therefore \angle DFA = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 与 $\text{Rt}\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} DF = CD \\ AD = AD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AFD$ (HL),

$\therefore \angle CAD = \angle FAD$, $AC = AF$,

在 $\triangle ACG$ 与 $\triangle AFG$ 中,

$$\begin{cases} AC = AF \\ \angle CAD = \angle FAD, \\ AG = AG \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACG \cong \triangle AFG$ (SAS),

$\therefore CG = FG$, $\angle CGA = \angle FGA$,

$\therefore FG \parallel CE$,

$\therefore \angle FGA = \angle CEG$,

$\therefore \angle CGE = \angle CEG$,

$\therefore CE = CG$,

$\because$ 点 E 为线段 AD 的中点, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle DFA = 90^\circ$,

$\therefore CE = \frac{1}{2}AD$, $EF = \frac{1}{2}AD$, $AE = \frac{1}{2}AD$,

$\therefore CE = EF = AE$,

$$\therefore CE = CG = GF = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $CEFG$ 是菱形.

【小问 2 详解】

$$\because AC = BC, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle B,$$

$$\because \angle CAB + \angle B + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

由 (1) 知, $\angle CAD = \angle FAD$,

$$\therefore \angle CAD = \angle FAD = 22.5^\circ,$$

$$\because CE = EF = AE,$$

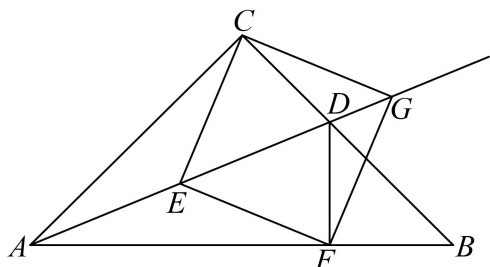
$$\therefore \angle CAE = \angle ECA = 22.5^\circ, \angle FAE = \angle EFA = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle CAE + \angle ECA = 45^\circ, \angle FEG = \angle FAE + \angle EFA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CEG + \angle GEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CEFG$ 是菱形,

$\therefore$ 四边形 $CEFG$ 是正方形.



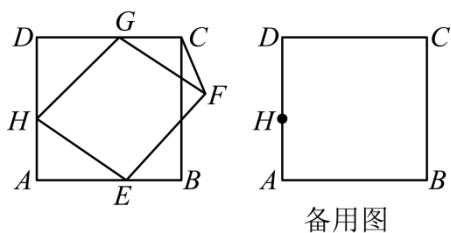
【点睛】 本题主要考查了正方形的判定，菱形的判定和性质，三角形的内角和定理，全等三角形的判定和性质，正确的识别图形，熟练掌握全等三角形的判定方法和菱形、正方形的判定方法，是解题的关键.

26. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3，菱形 $EFGH$ 的三个顶点 E 、 G 、 H 分别在正方形的边 AB 、 CD 、 DA 上， $AH = 1$ ，联结 CF .

(1) 当 $DG = 1$ 时，求证：菱形 $EFGH$ 为正方形；

(2) 设 $DG = x$ ， $\triangle FCG$ 的面积为 y ，写出 y 关于 x 的函数解析式，并指出 x 的取值范围；

(3) 当 $DG = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ 时，求 $\angle GHE$ 的度数.



【答案】(1) 详见解析; (2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} (0 \leq x \leq \sqrt{6})$ (3) 60°

【解析】

【分析】(1) 先求出 HG, 再判断出 $\triangle AHE \cong \triangle DGH$, 得出 $\angle AHE = \angle DGH$, 进而判断出 $\angle GHE = 90^\circ$, 即可得出结论;

(2) 先判断出 $\angle HEA = \angle FGM$, 进而判断出 $\triangle AHE \cong \triangle MFG$. 得出 $FM = HA = 1$, 即可得出结论;

(3) 利用勾股定理依次求出 $GH = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, $AE = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $GE = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, 进而判断出 $GH = HE = GE$, 即可得出结论

【详解】解: (1) 在正方形 $ABCD$ 中,

$$\therefore AH = 1,$$

$$\therefore DH = 2.$$

$$\text{又} \because DG = 1,$$

$$\therefore HG = \sqrt{5}$$

在 $\triangle AHE$ 和 $\triangle DGH$ 中,

$$\because \angle A = \angle D = 90^\circ, AH = DG = 1, EH = HG = \sqrt{5},$$

$$\therefore \triangle AHE \cong \triangle DGH,$$

$$\therefore \angle AHE = \angle DGH.$$

$$\because \angle DGH + \angle DHG = 90^\circ, \angle AHE + \angle DHG = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle GHE = 90^\circ$$

所以菱形 $EFGH$ 是正方形;

(2) 如图 1, 过点 F 作 $FM \perp DC$ 交 DC 所在直线于 M , 联结 GE .

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle MGE.$$

$$\because HE \parallel GF,$$

$$\therefore \angle HEG = \angle FGE.$$

$$\therefore \angle HEA = \angle FGM,$$

图1

【点睛】 此题考查正方形的判定，全等三角形的性质与判断，勾股定理，解题关键在于作辅助线