

八年级第二学期数学基础练习 2

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 下列方程组是二元二次方程组的是 ()

A.
$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 4x-6y=9 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x^2-3y^2=2x+5 \\ x+\frac{1}{y}=3 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y=3-5x^2 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}=2y \\ 3y=-x \end{cases}$$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了二元二次方程组的定义, 掌握二元二次方程组的概念是解决本题的关键. 根据二元二次方程组的定义, 逐个判断得结论.

【详解】 解: A. 此方程组为二元一次方程组, 不是二元二次方程组, 故 A 错误;
B. 含分式方程, 不是二元二次方程组, 故 B 错误;
C. 是二元二次方程组, 故 C 正确;
D. 含无理方程, 不是二元二次方程组, 故 D 错误.

故选: C.

2. 已知一次函数 $y = x + k + 1$ 的图像经过原点, 则 k 的值为 ()

A. 1 B. -1 C. 0 D. ± 1

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点, 熟知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中, 当 $b = 0$ 时函数图象经过原点是解答此题的关键. 先根据一次函数 $y = x + k + 1$ 的图象经过原点得出关于 k 的方程, 解方程即可.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = x + k + 1$ 的图像经过原点,
 $\therefore k + 1 = 0$,
解得: $k = -1$.
故选: B.

3. 若一次函数 $y = kx + b$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小, 且图象与 x 轴的负半轴相交, 那么对 k 和 b 的符号

判断正确的是 ()

A. $k > 0, b > 0$

B. $k > 0, b < 0$

C. $k < 0, b > 0$

D. $k < 0, b < 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的图象与系数的关系，先根据函数的增减性判断出 k 的符号，再根据图象与 y 轴的负半轴相交判断出 b 的符号即可得到答案. ① 当 $k > 0, b > 0$ ，函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、三象限， y 随 x 的增大而增大；② 当 $k > 0, b < 0$ ，函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、三、四象限， y 随 x 的增大而增大；③ 当 $k < 0, b > 0$ 时，函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限， y 随 x 的增大而减小；④ 当 $k < 0, b < 0$ 时，函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限， y 随 x 的增大而减小.

【详解】 解：∵ 一次函数 $y = kx + b$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，

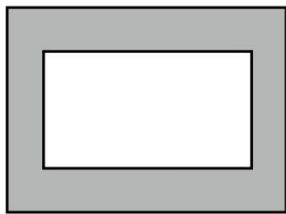
∴ $k < 0$ ；

∵ 图象与 x 轴的负半轴相交，

∴ $b < 0$.

故选： D .

4. 如图，从一个长 10 分米、宽 8 分米的铁片中间截去一个面积为 60 平方分米的小长方形，使剩下长方形框四周宽度一样. 如果设这个宽度为 x 分米，那么所列出的方程是 ()



A. $(10 - x)(8 - x) = 10 \times 8 - 60$;

B. $(10 - x)(8 - x) = 60$;

C. $(10 - 2x)(8 - 2x) = 60$;

D. $2(10 - x)(8 - x) = 60$.

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的应用，解题的关键是设这个宽度为 x 分米，根据中间小长方形面积为 60 平方分米，列出方程即可.

【详解】 解：设这个宽度为 x 分米，则中间小长方形的长为 $(10 - 2x)$ 分米，宽为 $(8 - 2x)$ 分米，根据题意

得:

$$(10-2x)(8-2x)=60,$$

故选: C.

5. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{m-2x}+m+x=3$ 有一个实数根是 $x=1$, 那么 m 的值为 ()

A. 2

B. 3

C. 2 或 3

D. 一切实数.

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查的是无理方程, 先把方程的根代入方程, 可以求出 m 的值, 然后根据无理方程中二次根式的双重非负性列出不等式, 得 $m=2$.

【详解】 解: 把 $x=1$ 代入方程有:

$$\sqrt{m-2}+m+1=3,$$

$$\text{即 } \sqrt{m-2}=2-m,$$

$$\text{两边同时平方得: } m-2=4-4m+m^2,$$

$$\text{即 } m^2-5m+6=0,$$

$$\text{即 } (m-2)(m-3)=0,$$

$$\therefore m_1=2, \quad m_2=3,$$

$$\text{由题意得: } \begin{cases} m-2x \geq 0 \\ 2-m \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m-2 \geq 0 \\ 2-m \geq 0 \end{cases},$$

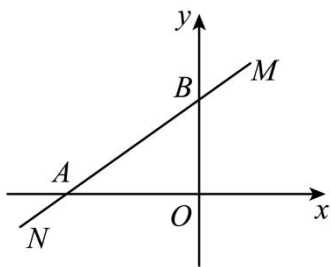
$$\therefore m=2.$$

经检验 $m=2$ 是 $\sqrt{m-2}+m+1=3$ 的解, $m=3$ 不符合题意, 要舍去.

故选: A.

6. 如图, 已知直线 $MN: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$ 交 x 轴负半轴于点 A , 交 y 轴于点 B , 点 C 是 x 轴上的一点, 且 $OC=2$,

则 $\angle MBC$ 的度数为 ()



A. 45° 或 135°

B. 30° 或 150°

C. 60° 或 120°

D. 75° 或 165°

【答案】 D

【解析】

【分析】令 $y=0$, 可得 $A(-2\sqrt{3}, 0)$, 令 $x=0$, 可得 $B(0, 2)$, 利用勾股定理求出 $AB=4$, 可得 $\angle MAO=30^\circ$, 分两种情况考虑: ① C 点在 x 轴正半轴; ② C 点在 x 轴负半轴. 分别计算出 $\angle MBO$ 、 $\angle OBC$ 度数, 两个角的和差即为所求度数.

【详解】解: $\because$ 直线 $MN: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 交 x 轴负半轴于点 A , 交 y 轴于点 B ,

令 $y=0$, 则 $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$, 解得 $x = -2\sqrt{3}$,

$\therefore A(-2\sqrt{3}, 0)$,

令 $x=0$, 则 $y=2$,

$\therefore B(0, 2)$,

$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$,

$\therefore AB = 2OB$,

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \angle MAO = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABO = 60^\circ$, $\angle MBO = 120^\circ$.

$\because B(0, 2)$, $OC = 2$,

$\therefore OB = OC$,

$\therefore \angle CBO = 45^\circ$,

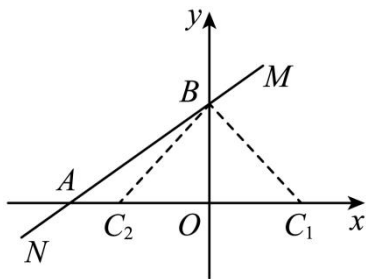
如图, 分两种情况考虑:

①当点 C 在 x 轴正半轴上时, $\angle C_1BO = 45^\circ$,

$\therefore \angle MBC_1 = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$;

②当点 C 在 x 轴负半轴上时, $\angle C_2BO = 45^\circ$,

$$\angle MBC_2 = 120^\circ + 45^\circ = 165^\circ.$$



故选: D.

【点睛】本题是一次函数综合题, 考查了一次函数图象上点的坐标特征、含 30° 角的直角三角形、等腰直角三角形的判定与性质以及坐标与图形性质. 分类讨论思想的运用是解题的关键.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

7. 当 m _____ 时, 函数 $y = mx + 7$ 是一次函数.

【答案】 $\neq 0$ ## 不等于 0

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义, 熟练掌握一次函数的定义是解题的关键. 根据一次函数的定义即可求解.

【详解】 $\because$ 函数 $y = mx + 7$ 是一次函数,

$$\therefore m \neq 0$$

故答案为: $\neq 0$.

8. 直线 $y = 3(x - 1) + 2$ 的截距是_____.

【答案】 -1

【解析】

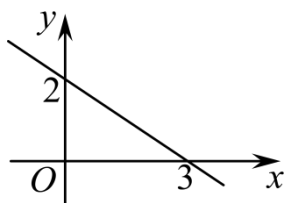
【分析】此题考查了一次函数的图象和性质, 掌握截距的概念是解题的关键. 把直线得解析式整理成一般形式后, 根据截距的意义即可得到答案.

【详解】解: $\because y = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1$,

$$\therefore \text{直线 } y = 3(x - 1) + 2 \text{ 的截距是 } -1,$$

故答案为: -1

9. 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像如图所示, 当 $y > 0$ 时, x 的取值范围是_____.



【答案】 $x < 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数图像和一元一次不等式的解集，根据图像直接解答即可.

【详解】 解：根据函数图像可知：当 $x < 3$ 时， $y > 0$ ，

故答案为： $x < 3$.

10. 方程 $\frac{x^2 + 3x}{x + 3} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，根据解分式方程的步骤解答即可求解，掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

【详解】 解：方程两边乘以 $x + 3$ 得， $x^2 + 3x = 0$ ，

解得 $x = 0$ 或 $x = -3$ ，

检验：当 $x = 0$ 时， $x + 3 = 3 \neq 0$ ，符合题意；

当 $x = -3$ 时， $x + 3 = 0$ ，不合题意；

$\therefore$ 原分式方程的解为 $x = 0$ ，

故答案为： $x = 0$.

11. 方程 $2(1 - 3x)^4 - 32 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = -\frac{1}{3}$ ， $x_2 = 1$

【解析】

【分析】 此题考查了利用开平方解方程，根据题意得到 $1 - 3x = 2$ 或 $1 - 3x = -2$ ，即可求出答案.

【详解】 解： $\because 2(1 - 3x)^4 - 32 = 0$

$$\therefore (1 - 3x)^4 = 16$$

$$\therefore (1 - 3x)^4 = (\pm 2)^4$$

$$\therefore 1 - 3x = 2 \text{ 或 } 1 - 3x = -2$$

解得 $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$

故答案为: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$

12. 方程 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，先求 x 的范围，再解此方程得 $x+2=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ ，舍去不符合题意的解即可.

【详解】 解：由题意得 $x-1 \geq 0$ ，
解得 $x \geq 1$ ，

原方程可化为: $x+2=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ ，

解得 $x=-2$ (不合题意，舍去) 或 $x=1$ ，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，原方程成立.

故方程 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$ 的根是 $x=1$.

故答案为: $x=1$.

13. 方程组 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=5 \end{cases}$

【解析】

【分析】 将①变形，代入②得 $x^2-7x+10=0$ ，即可求解，

本题考查了，解二元一次方程组，解题的关键是：熟练掌握消元法.

【详解】 解: $\begin{cases} x+y=7 \text{①} \\ xy=10 \text{②} \end{cases}$

由①的: $y=7-x$ ，代入②得: $x(7-x)=10$ ，即: $x^2-7x+10=0$ ，解得: $x_1=2$ ， $x_2=5$ ，

当 $x_1=2$ 时， $y=7-2=5$ ，

当 $x_1=5$ 时， $y=7-5=2$ ，

所以方程组 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$ 的解为: $\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=5 \end{cases}$,

故答案为: $\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=5 \end{cases}$.

14. 如果方程 $1+\sqrt{3x+2}=k$ 无实数根, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查算术平方根的非负性, 解题的关键是先把方程变形为 $\sqrt{3x+2}=k-1$, 利用算术平方根的非负数的性质得到 $k-1 < 0$, 然后解关于 k 的不等式即可.

【详解】 解: $\because 1+\sqrt{3x+2}=k$,

$$\therefore \sqrt{3x+2}=k-1,$$

又 $\because$ 方程 $1+\sqrt{3x+2}=k$ 无实数根, 且 $\sqrt{3x+2} \geq 0$,

$$\therefore k-1 < 0,$$

$$\therefore k < 1,$$

$\therefore k$ 的取值范围是 $k < 1$.

故答案为: $k < 1$.

15. 已知关于 x, y 的一次函数 $y=(m+1)x-2m$ 的图象不经过平面直角坐标系中的第二象限, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq 0$

【解析】

【分析】 根据题意得到 $m+1 > 0, -2m \leq 0$, 解不等式即可得到 m 的取值范围.

【详解】 解: 一次函数 $y=(m+1)x-2m$ 的图象不经过平面直角坐标系中的第二象限,

$$\therefore m+1 > 0, -2m \leq 0,$$

解得 $m \geq 0$,

故答案为: $m \geq 0$.

【点睛】 此题考查了一次函数的图象与系数的关系, 要求学生能根据 k, b 的符号正确判断直线经过的象限.

16. 某工程需要在规定日期内完成, 如果甲工程队单独做, 恰好如期成: 如果乙工程队单独做, 则超过规定

又由 $\sqrt{3x^2+20x-3}+\sqrt{3x^2-4x-3}=4x$ ，可得 $\sqrt{3x^2+20x-3}-\sqrt{3x^2-4x-3}=6$ ，将这两式相加可得

$$2\sqrt{3x^2-4x-3}=6+4x,$$

将 $2\sqrt{3x^2+20x-3}=6+4x$ 两边平方可得: $3x^2+20x-3=(3+2x)^2$

整理得: $x^2-8x+12=0$ ，解得: $x=2$ 或 $x=6$ ，

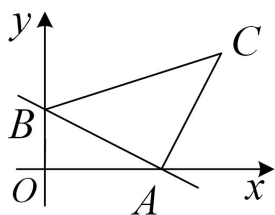
经检验 $x=2$ 或 $x=6$ 是原方程的解，

故答案为: $x=2$ 或 $x=6$ 。

18. 如图，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 和 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B ，以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰

直角 ABC ， $\angle BAC=90^\circ$ ，如果在直角坐标平面内有一点 $P\left(a, \frac{3}{4}\right)$ ，且 $\triangle ABP$ 的面积与 ABC 的面积

相等，则 a 的值为_____。

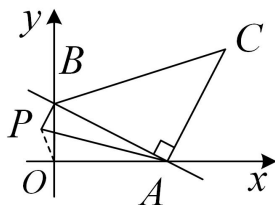


【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{4}-4$ 或 $4+\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

【解析】

【分析】由已知求出 A 、 B 的坐标，求出三角形 ABC 的面积，再利用 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$ 建立含 a 的方程，把 $S_{\triangle ABP}$ 表示成有边落在坐标轴上的三角形面积和、差，通过解方程求得答案。

【详解】解：如图，连接 OP ，



$\therefore$ 直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，

$$\therefore A(\sqrt{3}, 0), B(0, 1), AB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC} = 2,$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABP} = S_{\triangle OPB} + S_{\triangle OAB} - S_{\triangle AOP},$$

$$\therefore |a| \times 1 + \sqrt{3} \times 1 - \frac{3}{4} \times \sqrt{3} = 4,$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{3}}{4} - 4 \text{ 或 } a = 4 + \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{故答案为 } \frac{\sqrt{3}}{4} - 4 \text{ 或 } 4 + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【点睛】本题考查了一次函数的综合应用；解函数图象与面积结合的问题，要把相关三角形的面积用边落在坐标轴的其他三角形面积来表示，这样面积与坐标之间就建立了联系；把 $S_{\triangle ABP}$ 表示成有边落在坐标轴上的三角形面积和、差是正确解答本题的关键。

三、简答题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

19. 解关于 x 的方程： $bx^2 - 3 = 0$.

【答案】当 $b = 0$ 时，无解，当 $b > 0$ 时， $x = \pm \sqrt{\frac{3}{b}}$ ，当 $b < 0$ 时，方程无实数根，

【解析】

【分析】此题考查了用平方根的意义解方程。根据 b 的取值范围分别进行求解即可。

【详解】解：当 $b = 0$ 时，方程 $bx^2 - 3 = 0$ 无解，

$$\text{当 } b \neq 0 \text{ 时， } x^2 = \frac{3}{b},$$

$$\text{当 } b > 0 \text{ 时， } x = \pm \sqrt{\frac{3}{b}},$$

当 $b < 0$ 时，方程无实数根。

$$20. \text{ 解关于 } x \text{ 的方程： } \frac{2(x-1)}{x+1} + \frac{6(x+1)}{x-1} = 7.$$

【答案】 $x_1 = -3, x_2 = -5$

【解析】

【分析】此题考查了解分式方程，因式分解法解一元二次方程，熟练掌握相关解法是解题的关键。两边都乘以 $(x+1)(x-1)$ 得到一元二次方程，利用因式分解法解一元二次方程，并检验即可。

【详解】解： $\frac{2(x-1)}{x+1} + \frac{6(x+1)}{x-1} = 7$

两边都乘以 $(x+1)(x-1)$ 得到，

$$2(x-1)^2 + 6(x+1)^2 = 7(x+1)(x-1),$$

整理得到， $x^2 + 8x + 15 = 0$

解得 $x_1 = -3, x_2 = -5$

经检验， $x_1 = -3, x_2 = -5$ 都是方程的解，

所以原方程的解为： $x_1 = -3, x_2 = -5$.

21. 解方程组 $\begin{cases} x - 3y = 2 \text{①} \\ x^2 - 2xy + y^2 - 16 = 0 \text{②} \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -7 \\ y_2 = -3 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查解二元二次方程组，将二元二次方程化成两个二元一次方程组，分别解出两个二元一次方程组即可.

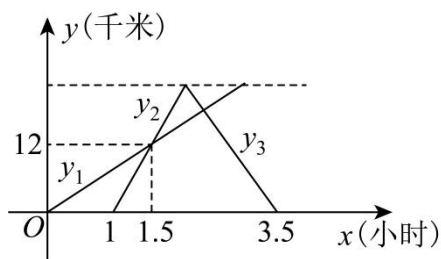
【详解】解： 原方程组可以化为： $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$.

解方程组 $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$.

解方程组 $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = -7 \\ y = -3 \end{cases}$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -7 \\ y_2 = -3 \end{cases}$.

22. 甲乙两人先后由 A 地沿同一路线前往 B 地，甲先出发，一小时后乙再出发，半小时后在离 A 地 12 千米处乙追上甲，此时两人正好到达 AB 的中点. 然后两人各自保持原速不变，先后到达 B 地. 若甲由 A 地出发的行驶时间为 x 小时，甲、乙离开 A 地的距离为 y_1 千米和 y_2 千米，函数图象如图所示.



- (1) 请直接写出甲的速度是_____千米/小时；
- (2) 请直接写出 y_1 和 y_2 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；
- (3) 乙到达 B 地后立即从原路返回 A 地。过程中，他离开 A 地的距离 y_3 (千米) 关于 x (小时) 的函数图象如图所示。请直接写出乙在返回途中与甲相遇时， $x =$ _____小时。

【答案】 (1) 8 (2) $y_1 = 8x$ ，定义域为 $0 \leq x \leq 3$ ； $y_2 = 24x - 24$ ，定义域为 $1 \leq x \leq 2$

(3) $\frac{7}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用以及待定系数法求函数解析式，解题的关键是观察函数图象找出点的坐标，再利用待定系数法求出函数解析式。

- (1) 根据“速度 = 路程 ÷ 时间”即可算出甲车的速度；
- (2) 设乙车离 A 地的距离 y 与时间 x 的函数关系式，观察函数图象找出点的坐标利用待定系数法即可求出函数关系式，分别求出定义域即可；
- (3) 根据题意得到 y_3 (千米) 关于 x (小时) 的函数解析式为： $y_3 = -16x + 56$ ， y_1 关于 x 的函数关系式为： $y_1 = 8x$ ，解方程组即可得到结论。

【小问 1 详解】

解： 甲的速度 = $\frac{12}{1.5} = 8$ 千米/小时；

故答案为： 8；

【小问 2 详解】

解： ∵ 设 $y_1 = k_1x$ ，把点 $(1.5, 12)$ 代入得到，

$$8 = k_1,$$

$$\therefore y_1 = 8x,$$

由题意可得， $\frac{12 \times 2}{8} = 3$ (小时)，即 $0 \leq x \leq 3$ ；

设 $y_2 = kx + b$,

把 $(1,0), (1.5,12)$ 代入得,

$$\begin{cases} k + b = 0 \\ 1.5k + b = 12 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = 24 \\ b = -24 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = 24x - 24;$$

由题意可得, $(1.5-1) \times 2 = 1$ (小时), 即 $1 \leq x \leq 2$;

【小问 3 详解】

解: 当 $y_2 = 24$ 时, $x = 2$,

设 y_3 (千米) 关于 x (小时) 的函数解析式为: $y_3 = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} 2m + n = 24 \\ 3.5m + n = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = -16 \\ n = 56 \end{cases},$$

$\therefore y_3$ (千米) 关于 x (小时) 的函数解析式为: $y_3 = -16x + 56$,

$\therefore y_1$ 关于 x 的函数关系式为: $y_1 = 8x$,

$$\text{解} \begin{cases} y = 8x \\ y = -16x + 56 \end{cases} \text{ 得, } \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{56}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 乙在返回途中与甲相遇时, $x = \frac{7}{3}$ 小时.

故答案为: $\frac{7}{3}$.

四、解答题: (本大题共 3 小题, 共 22 分)

23. 当 m 取什么值时, 方程 $\frac{2}{x} - \frac{x-m}{x^2-x} = 1 + \frac{1}{x-1}$ 无实数解.

【答案】 $m < \frac{7}{4}$ 或 $m = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解，一元二次方程根的判别式，掌握方程和不等式的解法是解答本题的关键. 把分式方程化为整式方程，根据分式方程无解，得出 m 的取值范围即可.

【详解】 解: $\frac{2}{x} - \frac{x-m}{x^2-x} = 1 + \frac{1}{x-1}$,

方程去分母得: $2(x-1) - (x-m) = x^2 - x + x$,

整理得: $x^2 - x + 2 - m = 0$,

$\therefore$ 方程 $\frac{2}{x} - \frac{x-m}{x^2-x} = 1 + \frac{1}{x-1}$ 无实数解,

$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4(2-m) < 0$,

解得: $m < \frac{7}{4}$;

当 $x=0$, $x=1$ 时分式方程无意义,

把 $x=0$ 代入 $x^2 - x + 2 - m = 0$ 得 $m=2$,

把 $x=1$ 代入 $x^2 - x + 2 - m = 0$ 得 $m=2$;

综上所述可知: 当 $m < \frac{7}{4}$ 或 $m=2$ 时方程 $\frac{2}{x} - \frac{x-m}{x^2-x} = 1 + \frac{1}{x-1}$ 无实数解.

24. 冬季来临, 羽绒服成为了街头巷尾的主角, 羽绒服一般分为鸭绒服和鹅绒服两种, 某羽绒服工厂生产了一批鸭绒服和鹅绒服, 鹅绒服的单价比鸭绒服的单价贵 50 元, 消费者在该工厂用 1800 元购买鸭绒服的数量比用 1500 元购买鹅绒服的数量多一件.

(1) 求鸭绒服、鹅绒服的单价分别是多少元?

(2) 某服装城打算使用不超过 28500 元的进货资金, 在该工厂购进鸭绒服、鹅绒服共 60 件进行销售, 并将鸭绒服、鹅绒服的售价分别定为每件 520 元、600 元, 求服装城应如何进货才能获得最大利润, 最大利润为多少? (假设购进的两种羽绒服全部销售完)

【答案】 (1) 鸭绒服的单价为每件 450 元, 鹅绒服每件 500 元

(2) 当购进鸭绒服和鹅绒服各 30 件时, 利润最大, 为 5100 元

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的实际应用, 一元一次不等式和一次函数的实际应用:

(1) 设鸭绒服的单价为每件 x 元, 根据鹅绒服的单价比鸭绒服的单价贵 50 元, 消费者在该工厂用 1800 元购买鸭绒服的数量比用 1500 元购买鹅绒服的数量多一件, 列出分式方程进行求解即可;

(2) 设购进鸭绒服 m 件, 根据某服装城打算使用不超过 28500 元的进货资金, 列出不等式求出 m 的取值范围, 设总利润为 w , 根据题意, 列出函数关系式, 利用一次函数的性质求最值即可.

【小问 1 详解】

解：设鸭绒服的单价为每件 x 元，则：鹅绒服每件 $(x+50)$ 元，

由题意，得： $\frac{1800}{x} = \frac{1500}{x+50} + 1$ ，

解得： $x = -200$ （舍去）或 $x = 450$ ；

经检验， $x = 450$ 是原方程的解，

$\therefore x + 50 = 500$ ，

答：鸭绒服的单价为每件 450 元，鹅绒服每件 500 元；

【小问 2 详解】

设购进鸭绒服 m 件，则购进鹅绒服 $(60-m)$ 件；

由题意，得： $450m + 500(60-m) \leq 28500$ ，

解得： $m \geq 30$ ；

设总利润为 y ，则： $y = (520-450)m + (600-500)(60-m)$ ，

整理，得： $y = -30m + 6000$ ，

$\therefore -30 < 0$ ，

$\therefore y$ 随着 m 的增大而减小，

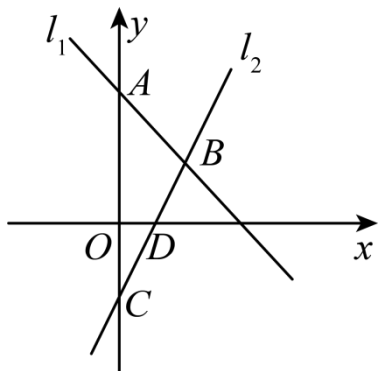
$\therefore m \geq 30$ ，

$\therefore$ 当 $m = 30$ 时， y 有最大值为： $-30 \times 30 + 6000 = 5100$ ；

故当购进鸭绒服和鹅绒服各 30 件时，利润最大，为 5100 元。

25. 如图，直线 $l_1: y = -x + m$ 与 y 轴交于点 A ，直线 $l_2: y = 2x + n$ 与 y 轴交于点 C ，与 x 轴交于点 D ，且

它们都经过点 $B(2, 2)$ 。



(1) 求点 A 、点 D 坐标；

(2) 过点 A 作 BC 的平行线交 x 轴于点 E ，求点 E 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下, 直线 l_2 上是否存在一动点 P , 使 $\triangle EDP$ 是等腰三角形? 若存在, 请直线写出 P 点坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $A(0,4)$, $D(1,0)$

(2) $E(-2,0)$

(3) 点 P 的坐标为 $\left(1+\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的综合, 涉及一次函数与二元一次方程, 一次函数与坐标轴交点问题, 等腰三角形的性质, 掌握灵活运用这些知识是解题的关键.

(1) 根据点 $B(2,2)$ 求出直线 l_1 、 l_2 的解析式, 即可求解;

(2) 根据 $AE \parallel BC$, 可设直线 AE 的解析式为 $y=2x+b$, 利用待定系数法求出直线 AE 的解析, 即可求出点 E 的坐标;

(3) 分为三种情况讨论: ①以 EP 为底时; ②以 PD 为底时; ③以 ED 为底时; 根据等腰三角形的性质列出方程即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $l_1: y=-x+m$ 过点 $B(2,2)$,

$$\therefore 2 = -2 + m,$$

解得: $m=4$,

$\therefore$ 直线 l_1 的解析式为: $y=-x+4$,

令 $x=0$, 则 $y=0+4=4$,

$\therefore A(0,4)$,

$\because$ 直线 $l_2: y=2x+n$ 过点 $B(2,2)$,

$$\therefore 2 = 2 \times 2 + n,$$

解得: $n=-2$,

$\therefore$ 直线 l_2 的解析式为: $y=2x-2$,

令 $y=0$, 则 $0=2x-2$,

解得: $x=1$,

$$\therefore D(1,0);$$

【小问 2 详解】

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \text{设直线 } AE \text{ 的解析式为 } y = 2x + b,$$

$$\text{将 } A(0,4) \text{ 代入得: } 4 = 0 + b,$$

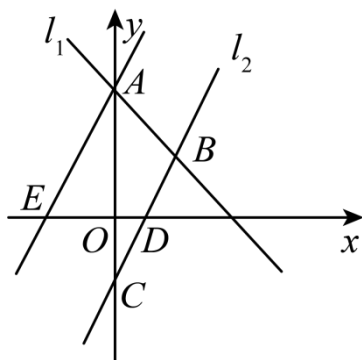
$$\text{解得: } b = 4,$$

$$\therefore \text{直线 } AE \text{ 的解析式为 } y = 2x + 4,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } 0 = 2x + 4,$$

$$\text{解得: } x = -2,$$

$$\therefore E(-2,0);$$



【小问 3 详解】

①以 EP 为底时,

$$\because D(1,0), E(-2,0),$$

$$\therefore ED = PD = 3,$$

$$\text{设 } P(x_0, 2x_0 - 2),$$

$$\therefore PD = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (2x_0 - 2)^2} = 3,$$

$$\therefore x_0 = 1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore P_1\left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right) \text{ 或 } P_2\left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right);$$

②以 PD 为底时, 则 $ED = PE = 3$,

$$\text{设 } P(a, 2a - 2), \text{ 且 } E(-2,0),$$

$$\therefore PE = \sqrt{(a+2)^2 + (2a-2)^2} = 3,$$

$$\text{解得: } a = 1 \text{ (舍去) 或 } a = -\frac{1}{5},$$

$$\therefore P_3\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right);$$

③以 ED 为底时, 点 P 在 ED 的中垂线上,

$$\therefore x_P = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore y_P = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -3,$$

$$\therefore P_4\left(-\frac{1}{2}, -3\right);$$

综上所述, 点 P 的坐标为 $\left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$.

