

2024 学年第二学期初二年级数学学科

第一阶段学业评估练习

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、填空题 (本大题共 12 小题, 每题 2 分, 满分 24 分)

1. 直线 $y = 4(x - 2) + a$ 的截距是 3, 则 $a =$ ____.

【答案】 11

【解析】

【分析】 本题考查了直线的截距, 由题意得, $y = 4x + a - 8$, 令 $x = 0$, 则 $y = a - 8 = 3$, 求解即可, 掌握相关知识是解题的关键.

【详解】 解: 由题意得, $y = 4(x - 2) + a = 4x + a - 8$,

令 $x = 0$, 则 $y = a - 8 = 3$,

解得: $a = 11$,

故答案为: 11.

2. 函数 $y = 2x - 3$ 的图像向上平移 ____ 个单位, 得到直线 $y = 2x + 1$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的平移, 解题的关键是掌握一次函数的平移规律: 右加左减, 上加下减. 根据一次函数的平移规律, 即可解答.

【详解】 解: $1 - (-3) = 4$,

$\therefore$ 函数 $y = 2x - 3$ 的图像向上平移 4 个单位, 得到直线 $y = 2x + 1$,

故答案为: 4.

3. 已知 $P(3, y_1)$ 、 $Q(-2, y_2)$ 是直线 $y = -x + 2$ 上的两点, 则 y_1 ____ y_2 (填: $>$ 、 $=$ 或 $<$)

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质, 熟练掌握一次函数的增减性是解题关键. 根据一次函数的增减性求解即可得.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = -x + 2$ 中的 $-1 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

又 $\because P(3, y_1)$ 、 $Q(-2, y_2)$ 是直线 $y = -x + 2$ 上的两点, 且 $3 > -2$,

$\therefore y_1 < y_2$,

故答案为: $<$.

4. 已知直线 $y = -3x + b$ 不经过第一象限, 则 b 的取值范围是_____.

【答案】 $b < 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象 (已知函数经过的象限求参数范围), 熟练掌握 k 、 b 的符号与一次函数图象经过的象限之间的关系是解题的关键: 对于一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时, 一次函数图象必过一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 一次函数图象必过二、四象限; 当 $b > 0$ 时, 一次函数图象与 y 轴交于正半轴; 当 $b < 0$ 时, 一次函数图象与 y 轴交于负半轴; 或者说: 当 $k > 0$, $b > 0$ 时, 一次函数图象经过第一、二、三象限; 当 $k > 0$, $b < 0$ 时, 一次函数图象经过第一、三、四象限; 当 $k < 0$, $b > 0$ 时, 一次函数图象经过第一、二、四象限; 当 $k < 0$, $b < 0$ 时, 一次函数图象经过第二、三、四象限.

根据 k 、 b 的符号与一次函数图象经过的象限之间的关系进行求解即可得出答案.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = -3x + b$ 不经过第一象限,

$\therefore$ 直线 $y = -3x + b$ 经过第二、三、四象限,

$\therefore k < 0$, $b < 0$,

故答案为: $b < 0$.

5. 方程 $4x^3 = x$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用因式分解法解高次方程, 把高次方程转化为次数较低的方程求解即可, 掌握相关知识是解题的关键.

【详解】 解: $4x^3 = x$,

$\therefore 4x^3 - x = 0$,

$\therefore x(4x^2 - 1) = 0$,

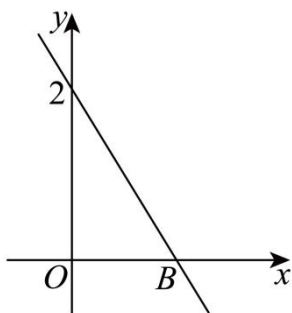
$$\therefore x(2x+1)(2x-1)=0,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } 2x+1=0 \text{ 或 } 2x-1=0,$$

$$\text{解得: } x_1=0, \quad x_2=-\frac{1}{2}, \quad x_3=\frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为: } x_1=0, \quad x_2=-\frac{1}{2}, \quad x_3=\frac{1}{2}.$$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像如图所示, 那么关于 x 的一元一次不等式 $kx+b < 2$ 的解集是_____.



【答案】 $x > 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与一元一次不等式, 熟练掌握函数图像法是解题关键. 关于 x 的一元一次不等式 $kx+b < 2$ 表示的是一次函数 $y=kx+b$ 的函数值小于 2, 结合函数图像, 求出此时 x 的取值范围即可得.

【详解】 解: 关于 x 的一元一次不等式 $kx+b < 2$ 表示的是一次函数 $y=kx+b$ 的函数值小于 2,

由函数图像可知, 当一次函数 $y=kx+b$ 的函数值小于 2 时, $x > 0$,

即关于 x 的一元一次不等式 $kx+b < 2$ 的解集是 $x > 0$,

故答案为: $x > 0$.

7. 换元法解方程 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 2 = 0$ 时, 可设 $\frac{x}{x+1} = y$, 那么原方程变形为_____.

【答案】 $y^2 - 5y + 2 = 0$

【解析】

【分析】 设 $\frac{x}{x+1} = y$, 可得 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = y^2$, 再代入原方程, 即可求解.

【详解】 解: 设 $\frac{x}{x+1} = y$,

$$\therefore \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = y^2,$$

$\therefore$ 原方程变形为 $y^2 - 5y + 2 = 0$.

故答案为 $y^2 - 5y + 2 = 0$.

【点睛】 本题考查用换元法整理分式方程的能力，用换元法解分式方程，可简化计算过程，减少计算量，是一种常用的方法.

8. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-1} + \frac{k}{x-1} = \frac{x}{x+1}$ 有增根 $x=1$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 先把分式方程化为整式方程得到 $(2+k)x + k = 0$ ，然后把 $x=1$ 代入得 $2+k+k=0$ ，再解关于 k 的方程即可.

【详解】 解：去分母得 $x(x+1) + k(x+1) = x(x-1)$,

整理得 $(2+k)x + k = 0$,

把 $x=1$ 代入得 $2+k+k=0$ ，解得 $k=-1$;

所以当 $k=-1$ 时，原方程有增根 $x=1$.

故答案为 -1 .

【点睛】 本题考查了分式方程的增根：在分式方程变形时，有可能产生不适合原方程的根，即代入分式方程后分母的值为 0 或是转化后的整式方程的根恰好是原方程未知数的允许值之外的值的根，叫做原方程的增根.

9. 方程 $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x=3$

【解析】

【分析】 本题考查了无理方程的解法，将无理方程化为整式方程，解整式方程，最后检验即可，掌握解无理方程的步骤是解题的关键.

【详解】 解： $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-2} = 0$,

$\therefore (x-3)(x-2) = 0$,

解得： $x_1 = 3, x_2 = 2$,

经检验, $x=2$ 时, $x-2=0, x-3<0$, 不合题意, 舍去,

$x=3$ 时, $x-2>0, x-3=0$, 符合题意,

$\therefore x=3$,

故答案为: $x=3$.

10. 如果关于 x 的方程 $(2m-1)x=2x+1$ 无解, 那么 m 满足的条件是_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程的解, 根据一元一次方程无解, 可得答案, 利用一元一次方程无解得出关于 m 的方程是解题关键.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $(2m-1)x=2x+1$ 无解,

$\therefore 2m-1-2=0$,

解得: $m=\frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$.

11. 我们把一条直线上满足纵坐标是横坐标一半的点称为“横倍点”, 那么直线 $y=x+2$ 上的“横倍点”坐标是_____.

【答案】 $(-4, -2)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 根据“横倍点”的定义, 得纵坐标是横坐标一半的点, 即 $y=\frac{1}{2}x$, 解方程组即可求得坐标, 理解“横倍点”的定义是解题的关键.

【详解】 解: 设“横倍点”的横坐标是 x , 则纵坐标是 $\frac{1}{2}x$, 即 $y=\frac{1}{2}x$, 代入 $y=x+2$,
得: $\frac{1}{2}x=x+2$,

解得: $x=-4$,

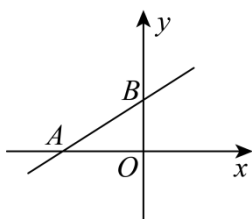
$\therefore y=\frac{1}{2}x=-2$,

$\therefore$ 直线 $y=x+2$ 上的“横倍点”的坐标是 $(-4, -2)$,

故答案为: $(-4, -2)$.

12. 已知直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B ，在坐标轴上有一个点 C （不与原点 O 重合），

使得 $\triangle ABC$ 是直角三角形，那么点 C 的坐标为_____.



【答案】 $(0,0)$ 或 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ 或 $(0, -3)$

【解析】

【分析】 本题考查了直线与坐标轴的交点，勾股定理。根据题意正确的分情况讨论是解题的关键。

当 $x=0$ 时， $y=1$ ，即 $B(0,1)$ ，当 $y=0$ 时， $x=-\sqrt{3}$ ，即 $A(-\sqrt{3},0)$ ，由题意知， $\triangle ABC$ 是直角三角形分 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ 三种情况，利用勾股定理计算求解即可。

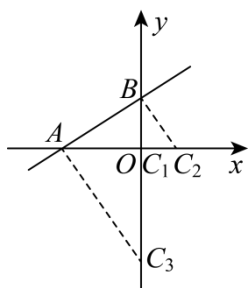
【详解】 解：当 $x=0$ 时， $y=1$ ，即 $B(0,1)$ ，

当 $y=0$ 时， $x=-\sqrt{3}$ ，即 $A(-\sqrt{3},0)$ ，

$$\therefore AB^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4,$$

由题意知， $\triangle ABC$ 是直角三角形分 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ 三种情况求解；

①当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时， C 与 O 重合，如图 C_1 ，即 $C_1(0,0)$ ；



②当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，如图 C_2 ，设 $C_2(m,0)$ ，则 $AC_2^2 = (m + \sqrt{3})^2$ ， $BC_2^2 = m^2 + 1^2$ ，

由勾股定理得， $AB^2 + BC_2^2 = AC_2^2$ ，即 $4 + m^2 + 1^2 = (m + \sqrt{3})^2$ ，

解得， $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$$\therefore C_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right);$$

③当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 如图 C_3 , 设 $C_3(0, n)$, 则 $AC_3^2 = (\sqrt{3})^2 + n^2$, $BC_3^2 = (1-n)^2$,

由勾股定理得, $AB^2 + AC_3^2 = BC_3^2$, 即 $4 + (\sqrt{3})^2 + n^2 = (1-n)^2$,

解得, $n = -3$,

$$\therefore C_3(0, -3);$$

综上所述, 点 C 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $(0, -3)$,

故答案为: $(0, 0)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $(0, -3)$.

二、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

13. 下列函数中, 属于一次函数的是 ()

A. $y = -\frac{x}{4}$

B. $y = kx + b$ (k, b 都为常数)

C. $y = (2-x)x$

D. $y = \frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义, 根据一次函数的定义即可求解, 掌握一次函数的定义是解题的关键.

【详解】解: A、 $y = -\frac{x}{4}$ 是一次函数, 故选项符合题意;

B、 $y = kx + b$ (k, b 都为常数), 当 $k = 0$ 时, $y = b$ 不是一次函数, 故选项不符合题意;

C、 $y = (2-x)x = -x^2 + 2x$, 不是一次函数, 故选项不符合题意;

D、 $y = \frac{2}{x}$ 不是一次函数, 故选项不符合题意;

故选: A.

14. 若方程 $ax = b$ 无解, 则 a 与 b 需要同时满足以下哪个条件 ()

A. $a = 0$ 且 $b = 0$

B. $a = 0$ 且 $b \neq 0$

C. $a \neq 0$

D. $a \neq 0$ 且 $b = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的解，根据方程无解，可知含 x 的系数为0，常数不为0，据此求解，掌握相关知识是解题的关键.

【详解】解：当 $a=0$ ， $b=0$ 时，方程 $ax=b$ 有无数个解，

当 $a=0$ ， $b\neq 0$ 时，方程 $ax=b$ 无解，

当 $a\neq 0$ 时，方程 $ax=b$ 有唯一解，

故选：B.

15. 下列方程中，二项方程是（ ）

A. $x^4-4=0$

B. $x^2-x=0$

C. $x^2-\frac{1}{x}=0$

D. $\frac{1}{3}x^2=0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二项方程的定义，解题的关键是掌握：如果一元 n 次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是零，那么这样的方程就叫做二项方程.

根据二项方程的定义逐个判断即可.

【详解】解： $x^4-4=0$ 是二项方程，符合题意；

$x^2-x=0$ 不是二项方程，不符合题意；

$x^2-\frac{1}{x}=0$ 不是二项方程，不符合题意；

$\frac{1}{3}x^2=0$ 不是二项方程，不符合题意；

故选：A.

16. 下列方程中，在实数范围内有解的是（ ）

A. $\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$

B. $\sqrt{x-1}+2=0$

C. $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}=1$

D. $\sqrt{x-1}=-x$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了可化为一元一次方程的分式方程、可化为一元二次方程的分式方程、无理方程，熟练掌握各方程的解法是解题关键. 根据分式方程、无理方程的解法逐项判断即可得.

【详解】解： $\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$,

方程两边同乘以 $(x-1)$ ，得 $x=1$ ，

经检验， $x=1$ 不是分式方程的解，

所以方程无解，选项 A 不符合题意；

$$\sqrt{x-1}+2=0,$$

移项，得 $\sqrt{x-1}=-2$ ，

两边平方，得 $x-1=4$ ，

解得 $x=5$ ，

经检验，当 $x=5$ 时， $\sqrt{x-1}+2=\sqrt{5-1}+2=4\neq 0$ ，

所以方程无解，选项 B 不符合题意；

$$\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}=1,$$

方程两边同乘以 $(x+1)(x-1)$ ，得 $2(x+1)-3(x-1)=(x+1)(x-1)$ ，

去括号，得 $2x+2-3x+3=x^2-1$ ，

移项、合并同类项，得 $x^2+x-6=0$ ，

因式分解，得 $(x-2)(x+3)=0$ ，

解得 $x=2$ 或 $x=-3$ ，

经检验， $x=2$ 和 $x=-3$ 都是分式方程的解，选项 C 符合题意；

$$\sqrt{x-1}=-x,$$

两边平方，得 $x-1=x^2$ ，

移项，得 $x^2-x+1=0$ ，这个方程根的判别式为 $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 1=-3<0$ ，方程没有实数根，

所以原方程无解，选项 D 不符合题意；

故选：C.

17. 已知直线 $y=(m^2-2m-1)x+m+1$ 与直线 $y=2x+4$ 平行，则 m 的值是（ ）

A. 3 或 -1

B. 3

C. -1

D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了两直线平行的问题，根据两平行直线的解析式的 k 值相等列式进行计算即可得解，熟

记并利用平行直线的解析式的 k 值相等是解题的关键.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = (m^2 - 2m - 1)x + m + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ 平行,

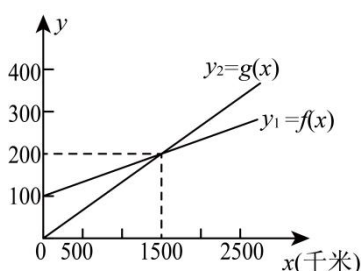
$$\therefore m^2 - 2m - 1 = 2,$$

解得: $m = 3$ 或 $m = -1$,

当 $m = 3$ 时, 两直线重合, 舍去,

故选: C.

18. 某公司打算与出租车公司签订租车合同. 每月行驶 x 千米时, 甲出租车公司的月租费用是 y_1 元, 乙出租车公司的月租费用是 y_2 元, y_1 、 y_2 与 x 之间的函数关系如图所示, 那么下列说法错误的是 ()



A. $x = 1500$ 千米时, 两家公司的租车费用相同;

B. $x = 750$ 千米时, 甲公司的租车费用为 150 元;

C. $x > 1500$ 千米时, 甲公司的费用比乙公司低;

D. $x = 3000$ 千米时, 两公司的租车费用相差 150 元.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一次函数的应用, 根据图象看两个函数的交点对应的自变量的取值是多少即可解答, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

【详解】解: 根据图象可知: y_1, y_2 相交于 $(1500, 200)$, 当 $0 < x < 1500$ 时, y_1 的图象在 y_2 的图象上方, 当 $x > 1500$ 时, y_2 的图象在 y_1 的图象上方,

A、每月行驶 1500 千米时, 两家公司的租车费用相同, 正确, 故选项不符合题意;

B、设 y_1 关于 x 的函数关系式为 $y_1 = kx + b$,

由题意得:
$$\begin{cases} b = 100 \\ 1500k + b = 200 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{15}, \\ b = 100 \end{cases}$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{15}x + 100,$$

$$\therefore \text{每月行驶 750 千米时, 甲公司的租车费用为 } y_1 = \frac{1}{15} \times 750 + 100 = 150 \text{ (元)},$$

$\therefore$ 每月行驶 750 千米时, 甲公司的租车费用为 150 元, 正确, 故选项不符合题意;

C、每月行驶超过 1500 千米时, 租用甲公司的费用比乙公司低, 故选项不符合题意;

D、设 y_2 关于 x 的函数关系式为 $y_2 = k'x$,

$$\text{由题意得: } 1500k' = 200,$$

$$\text{解得: } k' = \frac{2}{15},$$

$$\therefore y_2 = \frac{2}{15}x,$$

$\therefore$ 每月行驶 3000 千米时,

$$y_1 = \frac{1}{15} \times 3000 + 100 = 300,$$

$$y_2 = \frac{2}{15} \times 3000 = 400,$$

$$400 - 300 = 100 \text{ (元)},$$

$\therefore$ 租用乙公司的租车费用比甲公司多 100 元, 故选项符合题意;

故选: D.

三、计算题 (本大题共 5 小题, 每题 6 分, 满分 30 分)

19. 解下列关于 x 的方程:

$$(1) \quad ax^2 - 2 = x^2 + 1 \quad (a \neq 1)$$

$$(2) \quad \frac{4x}{x^2 + 3x - 4} + \frac{1}{x + 4} = 1$$

$$(3) \quad 2x^2 - 4 - \frac{5}{2x^2 + 3x} = -3x$$

$$(4) \quad x - \sqrt{x - 2} = 4$$

$$\text{【答案】} (1) \quad x_1 = \sqrt{\frac{3}{a-1}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{a-1}};$$

$$(2) \quad x_1 = 3, x_2 = -1;$$

$$(3) \quad x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1;$$

$$(4) \quad x = 6.$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解分式方程，解无理方程等知识，掌握相关知识是解题的关键.

(1) 按照解方程的步骤，即可求解；

(2) 方程两边同时乘以 $x^2 + 3x - 4$ ，消去分母，解出方程后再结合原方程分母不为 0 验证根是否存在即可；

(3) 利用换元法，令 $y = 2x^2 + 3x$ ，解出 y 的值，再代入求解即可；

(4) 将无理方程转化为整式方程，求解后再验证即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } ax^2 - 2 = x^2 + 1,$$

$$\therefore ax^2 - x^2 = 1 + 2,$$

$$\therefore (a-1)x^2 = 3,$$

$$\therefore x^2 = \frac{3}{a-1},$$

$$\text{解得: } x_1 = \sqrt{\frac{3}{a-1}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{a-1}};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{4x}{x^2 + 3x - 4} + \frac{1}{x+4} = 1,$$

$$\therefore \frac{4x}{(x-1)(x+4)} + \frac{1}{x+4} = 1,$$

$$\therefore 4x + x - 1 = x^2 + 3x - 4,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore (x-3)(x+1) = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3, x_2 = -1,$$

经检验， $x_1 = 3, x_2 = -1$ 是原方程的解，

$\therefore$ 原方程的解是 $x_1 = 3, x_2 = -1$;

【小问 3 详解】

解: $2x^2 - 4 - \frac{5}{2x^2 + 3x} = -3x$,

$$\therefore 2x^2 + 3x - 4 = \frac{5}{2x^2 + 3x},$$

令 $y = 2x^2 + 3x$,

$$\therefore y - 4 = \frac{5}{y},$$

$$\therefore y^2 - 4y - 5 = 0,$$

$$\therefore (y - 5)(y + 1) = 0,$$

解得: $y_1 = 5, y_2 = -1$,

当 $y = 5$ 时, $2x^2 + 3x = 5$,

$$\therefore 2x^2 + 3x - 5 = 0,$$

$$\therefore (2x + 5)(x - 1) = 0,$$

解得: $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1$,

当 $y = -1$ 时, $2x^2 + 3x = -1$,

$$\therefore 2x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$\therefore (2x + 1)(x + 1) = 0,$$

解得: $x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1$,

经检验, $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1$ 是原方程的解,

$$\therefore \text{方程的解是 } x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1;$$

【小问 4 详解】

解: $x - \sqrt{x - 2} = 4$,

$$\therefore x - 4 = \sqrt{x - 2},$$

$$\therefore x^2 - 8x + 16 = x - 2,$$

$$\therefore x^2 - 9x + 18 = 0,$$

$$\therefore (x-3)(x-6) = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3, x_2 = 6,$$

经检验, $x_1 = 3$ 是增根, $x_2 = 6$ 是原方程的解,

$\therefore$ 方程的解为 $x = 6$.

$$20. \text{ 解方程组: } \begin{cases} \frac{2}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 \\ \frac{4}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解法, 采用换元法求解, 最后检验即可, 掌握相关知识是解题的关键.

$$\text{【详解】 解: 设 } \frac{1}{x-y} = a, \frac{1}{x+y} = b,$$

$$\therefore \text{原方程组化为} \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4b - 3a = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1 \\ \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

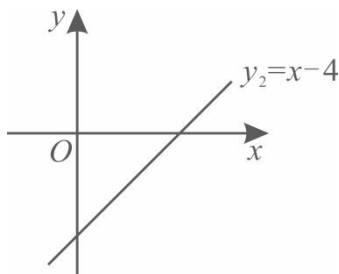
$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

经检验, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 是原方程组的解,

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

四、解答题：(本大题满分 28 分，第 21、22 题每题 6 分，第 23 题 8 分、24 题 8 分)

21. 已知直线 $y_1 = kx + 1$ 与直线 $y_2 = x - 4$ 都经过点 $A(2, m)$.



- (1) 求 m, k 的值;
- (2) 当 x _____ 时, $y_1 \geq y_2$;
- (3) 求这两条直线与 y 轴围成的三角形的面积.

【答案】(1) $m = -2, k = -\frac{3}{2}$

(2) ≤ 2

(3) 5

【解析】

【分析】本题考查了求一次函数的解析式、一次函数的几何应用，熟练掌握一次函数的图像与性质是解题关键.

(1) 先将点 $A(2, m)$ 代入直线 $y_2 = x - 4$ 得 m 的值，从而可得点 A 的坐标，再将点 A 的坐标代入直线 $y_1 = kx + 1$ 即可得 k 的值;

(2) 画出两个一次函数的大致图像，结合函数图像求解即可得;

(3) 先分别求出两个一次函数与 y 轴的交点坐标，再利用三角形的面积公式求解即可得.

【小问 1 详解】

解：将点 $A(2, m)$ 代入直线 $y_2 = x - 4$ 得： $m = 2 - 4 = -2$,

$$\therefore A(2, -2),$$

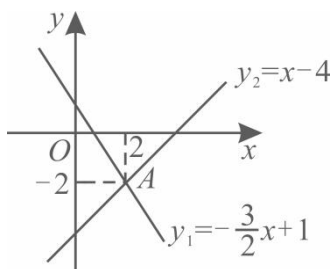
将点 $A(2, -2)$ 代入直线 $y_1 = kx + 1$ 得： $2k + 1 = -2$,

$$\text{解得 } k = -\frac{3}{2}.$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 可知， $y_1 = -\frac{3}{2}x + 1$ ， $A(2, -2)$ ，

在平面直角坐标系中，画出两个一次函数的大致图像如下：

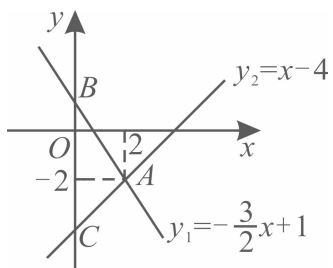


由函数图像可知，当 $x \leq 2$ 时， $y_1 \geq y_2$ ，

故答案为： ≤ 2 。

【小问 3 详解】

解：如图，设直线 $y_1 = -\frac{3}{2}x + 1$ 与 y 轴交于点 B ，直线 $y_2 = x - 4$ 与 y 轴交于点 C ，



对于直线 $y_1 = -\frac{3}{2}x + 1$ ，当 $x = 0$ 时， $y_1 = 1$ ，即 $B(0, 1)$ ，

对于直线 $y_2 = x - 4$ ，当 $x = 0$ 时， $y_2 = -4$ ，即 $C(0, -4)$ ，

$$\therefore BC = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5,$$

$$\therefore A(2, -2),$$

$$\therefore ABC \text{ 的 } BC \text{ 边上的高为 } |2| = 2,$$

$$\therefore ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5,$$

即这两条直线与 y 轴围成的三角形的面积为 5。

22. 平面直角坐标系内有点 $A(5, 1)$ 、 $B(-1, 3)$ ，点 P 在 y 轴上，且 $\triangle PAB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形，求点 P 的坐标。

【答案】 $P(0, -4)$

【解析】

【分析】 本题考查了两点间的距离公式，等腰三角形的定义.

设 $P(0, p)$ ，根据两点之间距离公式得出 $PA^2 = 5^2 + (p-1)^2$ ， $PB^2 = (-1)^2 + (p-3)^2$ ，根据等腰三角形的性质，列出方程求解即可.

【详解】 解： $\because$ 点 P 在 y 轴上，

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 0，

设 $P(0, p)$ ，

$\because \triangle PAB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形，

$\therefore PA = PB$ ，

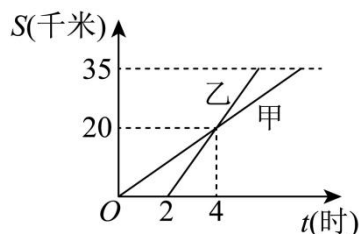
$\therefore PA^2 = 5^2 + (p-1)^2$ ， $PB^2 = (-1)^2 + (p-3)^2$ ，

$\therefore 5^2 + (p-1)^2 = (-1)^2 + (p-3)^2$ ，

解得： $p = -4$ ，

$\therefore P(0, -4)$.

23. 已知甲、乙两人从 A 地出发，到距离 35 千米的 B 地. 甲步行先走，过了一段时间乙骑车追赶，两人行进的路程与时间的关系如图所示，根据图中信息解答：



(1) 乙比甲晚_____小时出发；乙出发_____小时后追上甲；

(2) 乙比甲早到_____小时.

(3) 当 $t =$ _____时，两人相距 5 千米.

【答案】 (1) 2, 4

(2) 1.5

(3) 1 或 3 或 5 或 6

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与正比例函数的应用，熟练掌握待定系数法，正确求出两个函数的解析式是解题关键.

(1) 根据函数图像获取信息即可得;

(2) 先利用待定系数法求出甲、乙行进的路程与时间满足的关系式, 再求出当 $S = 35$ 时, t 的值, 由此即可得;

(3) 分四种情况: ① $0 < t \leq 2$ 、② $2 < t \leq 4$ 、③ $4 < t \leq 5.5$ 和④ $5.5 < t \leq 7$, 结合 (2) 中所求的甲、乙行进的路程与时间满足的关系式建立方程, 解方程即可得.

【小问 1 详解】

解: 由函数图像可知, 乙比甲晚 2 小时出发; 乙出发 4 小时后追上甲,

故答案为: 2, 4.

【小问 2 详解】

解: 设甲行进的路程与时间满足的关系式为 $S = k_1 t$ ($k_1 \neq 0$),

将点 $(4, 20)$ 代入得: $4k_1 = 20$, 解得 $k_1 = 5$,

则甲行进的路程与时间满足的关系式为 $S = 5t$,

当 $S = 35$ 时, $5t = 35$, 解得 $t = 7$,

设乙行进的路程与时间满足的关系式为 $S = k_2 t + b$ ($k_2 \neq 0$),

将点 $(2, 0)$ 和 $(4, 20)$ 代入得:
$$\begin{cases} 2k_2 + b = 0 \\ 4k_2 + b = 20 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_2 = 10 \\ b = -20 \end{cases},$$

则乙行进的路程与时间满足的关系式为 $S = 10t - 20$,

当 $S = 35$ 时, $10t - 20 = 35$, 解得 $t = 5.5$,

所以乙比甲早到 $7 - 5.5 = 1.5$ (小时),

故答案为: 1.5.

【小问 3 详解】

解: 由 (2) 可知, 甲行进的路程与时间满足的关系式为 $S = 5t$, 乙行进的路程与时间满足的关系式为 $S = 10t - 20$,

①当 $0 < t \leq 2$ 时, $5t - 0 = 5$, 解得 $t = 1$, 符合题设;

②当 $2 < t \leq 4$ 时, $5t - (10t - 20) = 5$, 解得 $t = 3$, 符合题设;

③当 $4 < t \leq 5.5$ 时, $10t - 20 - 5t = 5$, 解得 $t = 5$, 符合题设;

④当 $5.5 < t \leq 7$ 时, $35 - 5t = 5$, 解得 $t = 6$, 符合题设;

综上, 当 $t = 1$ 或 $t = 3$ 或 $t = 5$ 或 $t = 6$ 时, 两人相距 5 千米,

故答案为: 1 或 3 或 5 或 6.

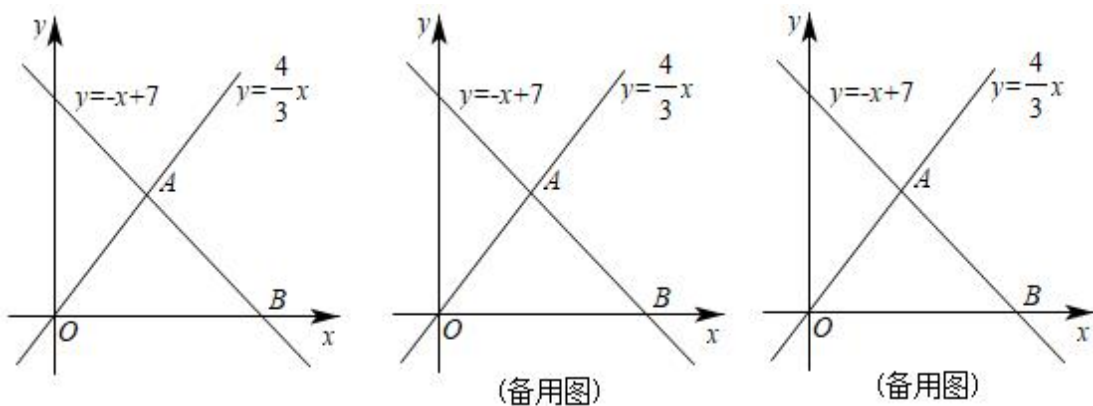
24. 如图, 已知一次函数 $y = -x + 7$ 与正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象交于点 A , 且与 x 轴交于点 B .

(1) 求点 A 和点 B 的坐标;

(2) 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C , 过点 B 作直线 $l \parallel y$ 轴, 动点 P 从点 O 出发, 以每秒 1 个单位长的速度, 沿 $O-C-A$ 的路线向点 A 运动; 同时直线 l 从点 B 出发, 以相同速度向左平移, 在平移过程中, 直线 l 交 x 轴于点 R , 交线段 BA 或线段 AO 于点 Q . 当点 P 到达点 A 时, 点 P 和直线 l 都停止运动. 在运动过程中, 设动点 P 运动的时间为 t 秒 ($t > 0$).

①当 t 为何值时, 以 A 、 P 、 R 为顶点的三角形的面积为 8?

②是否存在以 A 、 P 、 Q 为顶点的三角形是 $AP = AQ$ 的等腰三角形? 若存在, 求 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 (1) $B(7, 0)$, $A(3, 4)$; (2) ① $t = 2$; ② 存在, $t = 1$ 或 $t = 14 - 7\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 利用图象与坐标轴交点求法直接得出;

(2) ①利用 $S_{\text{梯形}ACOB} - S_{\triangle ACP} - S_{\triangle POR} - S_{\triangle ARB} = 8$, 表示出各个面积, 解方程即可;

②根据 P 的位置进行分类讨论, 分别解方程.

【详解】 解: (1) $\because$ 已知一次函数 $y = -x + 7$ 与正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象交于点 A ,

$$\text{则} \begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases},$$

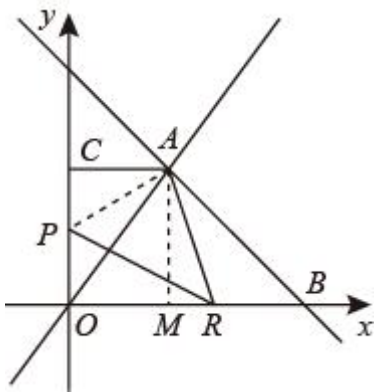
$$\therefore A(3, 4)$$

且与 x 轴交于点 B , 令 $y = 0$, 解得 $x = 7$

$$\therefore B(7, 0),$$

(2) ①当 $0 < t < 4$ 时, $PO = t$, $PC = 4 - t$, $BR = t$, $OR = 7 - t$,

过 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M ,



$\therefore$ 以 A 、 P 、 R 为顶点的三角形的面积为 8,

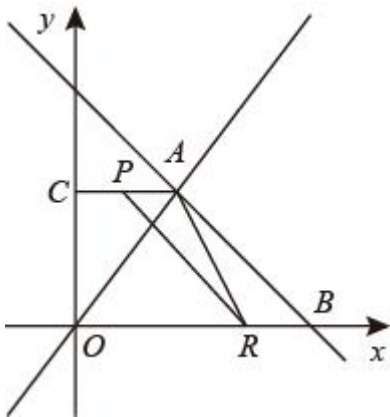
$$\therefore S_{\text{梯形} ACOB} - S_{\triangle ACP} - S_{\triangle POR} - S_{\triangle ARB} = 8,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (3+7) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times (4-t) - \frac{1}{2} \times t \times (7-t) - \frac{1}{2} \times 4t = 8,$$

$$\therefore t^2 - 8t + 12 = 0,$$

解得 $t_1 = 2$, $t_2 = 6$ (舍),

当 $4 \leq t \leq 7$ 时,



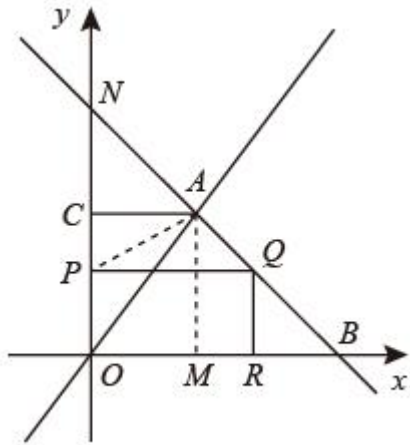
$$\therefore S_{\triangle APR} = \frac{1}{2} \times AP \times OC = 2(7-t) = 8,$$

$$\therefore t = 3 \text{ (舍)},$$

$\therefore$ 当 $t = 2$ 时, 以 A 、 P 、 R 为顶点的三角形的面积为 8.

②存在,

当 $0 < t \leq 4$ 时, 直线 l 与 AB 相交于 Q ,



$$\because NO = OB,$$

$$\therefore \angle OBN = \angle ONB = 45^\circ,$$

$\because$ 直线 $l \parallel y$ 轴,

$$\therefore RQ = RB = t, \quad AM = BM = 4,$$

$$\therefore QB = \sqrt{2}t, \quad AQ = 4\sqrt{2} - \sqrt{2}t,$$

$$\because RB = OP = QR = t,$$

$$\therefore PQ \parallel OR,$$

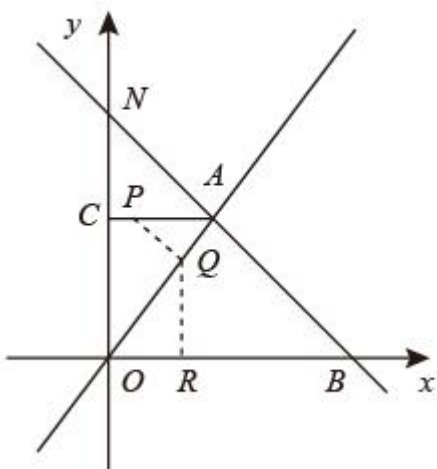
$$PQ = OR = 7 - t,$$

$$\because AP = AQ,$$

$$\therefore 7 - t = 2 \times 3,$$

$$\therefore t = 1,$$

当 $4 \leq t \leq 7$ 时,



若 $AP = AQ$,

$$\therefore 7-t=5-(7-t)\sqrt{2},$$

$$\therefore t=14-7\sqrt{2}.$$

$\therefore t=1$ 或 $t=14-7\sqrt{2}$, 以 A 、 P 、 Q 为顶点的三角形是 $AP=AQ$ 的等腰三角形.

【点睛】 此题主要考查了一次函数与几何的综合应用, 涉及了等腰三角形等几何图形的性质, 熟练掌握一次函数的基础知识以及几何图形的性质是解题的关键.