

2024-2025 学年度上海八年级数学下册第三次月考试卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

考试范围: 一次函数、代数方程、四边形;

第 I 卷 (选择题)

一、单选题 (共 18 分)

1. (本题 3 分) 如果直线 $y = 2x + 3$ 与直线 $y = 3x - 2m$ 相交于 x 轴上, 那么 m 的值为 ()

- A. $m = -3$ B. $m = -9$ C. $m = -\frac{3}{2}$ D. $m = -\frac{9}{4}$

【答案】D

【分析】本题考查一次函数与坐标轴的交点问题, 求出直线 $y = 2x + 3$ 与 x 轴的交点坐标, 再代入到直线 $y = 3x - 2m$ 中, 进行求解即可.

【详解】解: $\because y = 2x + 3$,

$\therefore$ 当 $y = 2x + 3 = 0$ 时, 解得: $x = -\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 直线 $y = 2x + 3$ 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$,

$\because$ 直线 $y = 2x + 3$ 与直线 $y = 3x - 2m$ 相交于 x 轴上,

$\therefore$ 把 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 代入 $y = 3x - 2m$, 得: $3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 2m = 0$,

解得: $m = -\frac{9}{4}$;

故选 D.

2. (本题 3 分) 要使函数 $y = (2m - 3)x + (3n + 1)$ 的图象经过 x 、 y 轴的正半轴, 则 m 与 n 的取值范围应为 ()

- A. $m > \frac{3}{2}$, $n > -\frac{1}{3}$ B. $m > \frac{3}{2}$, $n < -\frac{1}{3}$
- C. $m < \frac{3}{2}$, $n < -\frac{1}{3}$ D. $m < \frac{3}{2}$, $n > -\frac{1}{3}$

【答案】D

【分析】 本题主要考查了一次函数的性质、解一元一次不等式，函数 $y = (2m - 3)x + (3n + 1)$ 的图象经过 x 、 y 轴的正半轴，则应有 $\begin{cases} 2m - 3 < 0 \\ 3n + 1 > 0 \end{cases}$ ，求解不等式即可.

【详解】 解： $\because$ 函数 $y = (2m - 3)x + (3n + 1)$ 的图象经过 x 、 y 轴的正半轴，
 $\therefore$ 一次函数过一、二、四象限，

$$\therefore \begin{cases} 2m - 3 < 0 \\ 3n + 1 > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得： } m < \frac{3}{2}, \quad n > -\frac{1}{3}.$$

故选：D.

3. （本题 3 分）在下列方程中，无实数根的方程的个数是（ ）

① $\sqrt{x+4} = \sqrt{x}$ ；

② $\sqrt{2x-5} - \sqrt{2-x} = 0$ ；

③ $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ ；

④ $\sqrt{1-3x} = x-1$ ；

⑤ $\sqrt{x+4} = -x$.

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】C

【分析】 本题主要考查了无理方程，分式方程，熟知相关方程的解法是解题的关键.

分别根据无理方程，分式方程的求解方法求解判断即可.

【详解】 解： ① $\sqrt{x+4} = \sqrt{x}$ ， 两边同时平方得 $x+4 = x$ ，移项后 $4 = 0$ ，此等式不成立，所以方程①无实数根，符合题意；

② $\sqrt{2x-5}-\sqrt{2-x}=0$ ，即 $\sqrt{2x-5}=\sqrt{2-x}$ ，两边同时平方得 $2x-5=2-x$ ，解得 $x=\frac{7}{3}$ ，检验：当 $x=\frac{7}{3}$ 时，

$2x-5=2\times\frac{7}{3}-5=\frac{14}{3}-5=-\frac{1}{3}<0$ ， $\sqrt{2x-5}$ 无意义，所以方程②无实数根，符合题意；

③ $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$ ，方程两边同乘 $(x-1)$ 得 $x=1$ ，检验：当 $x=1$ 时，分母 $x-1=0$ ，所以 $x=1$ 是增根，方程③无实数根，符合题意；

④ $\sqrt{1-3x}=x-1$ ，两边同时平方得 $1-3x=(x-1)^2$ ，解得 $x_1=0$ ， $x_2=-1$ ，检验：当 $x=0$ 时， $\sqrt{1-3\times 0}=1$ ， $0-1=-1$ ， $1\neq-1$ ；当 $x=-1$ 时， $\sqrt{1-3\times(-1)}=2$ ， $-1-1=-2$ ， $2\neq-2$ ，所以方程④无实数根，符合题意；

⑤ $\sqrt{x+4}=-x$ ，两边同时平方得 $x+4=x^2$ ，移项化为一元二次方程的一般形式 $x^2-x-4=0$ ，根据求根公式

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ ，检验：当 $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ 时， $\sqrt{x+4}>0$ ， $-x=-\frac{1+\sqrt{17}}{2}<0$ ，不满足等式；当 $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ 时，

$\sqrt{x+4}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{17}}{2}+4}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}$ ， $-x=-\frac{1-\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ ，满足等式，所以方程⑤有实数根，不符合题意。

综上，无实数根的文件有①②③④，共4个，

故选：C.

4. (本题3分) 方程组 $\begin{cases} x^2-y=2, \\ 2x-y=k \end{cases}$ 有实数解，则 k 的取值范围是 ()

A. $k\geq 3$;

B. $k=3$;

C. $k<3$;

D. $k\leq 3$.

【答案】D

【分析】本题考查根据二元二次方程组的解的情况，求参数的范围，将二元二次方程组转化为一元二次方程，进行求解即可。

【详解】解： $\begin{cases} x^2-y=2 \text{ ①} \\ 2x-y=k \text{ ②} \end{cases}$ ，

由②，得： $y=2x-k$ ，

把 $y=2x-k$ 代入①，得： $x^2-2x+k=2$ ，即： $x^2-2x+k-2=0$ ，

$\because$ 方程组有实数解，

$\therefore \Delta=4-4(k-2)\geq 0$ ，

$\therefore k \leq 3$;

故选 D.

5. (本题 3 分) 下列命题中正确的命题的个数是 ()

- ①夹在两条平行线之间的平行线段相等;
- ②多边形的内角中至多有 3 个锐角;
- ③一组对角相等, 一组对边平行的四边形是平行四边形;
- ④平行四边形的两条对角线将其分成四个等积的小三角形;

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】D

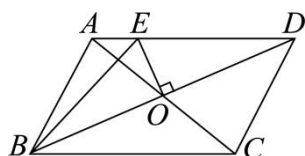
【分析】本题考查平行四边形的性质和判定、多边形的内角, 根据平行四边形的性质和判定、多边形的内角逐一判断解题.

- 【详解】解: ①夹在两条平行线之间的平行线段相等, 故此命题是真命题;
- ②多边形的内角中至多有 3 个锐角, 故此命题是真命题;
- ③一组对角相等, 一组对边平行的四边形是平行四边形, 故此命题是真命题;
- ④平行四边形的两条对角线把平行四边形分成的四个小三角形的面积相等, 故此命题是真命题.

由此可得: 真命题有 4 个.

故选: D.

6. (本题 3 分) 如图, 在周长为 20 cm 的 $\square ABCD$ 中, $AB \neq AD$, AC 、 BD 相交于点 O , $OE \perp BD$ 交 AD 于 E , 则 $\triangle ABE$ 的周长为 ()



A. 10 cm B. 20 cm

C. 5 cm D. 15 cm

【答案】A

【分析】本题考查了平行四边形的性质，线段垂直平分线的性质，掌握知识点的应用是解题的关键。

由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $OB = OD$ ，从而得出 OE 垂直平分 BD ，故有 $BE = DE$ ，所以 $\triangle ABE$ 的周长为 $AB + AD$ ，再由 $\square ABCD$ 为 20cm 即可求解。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OB = OD,$$

$$\because OE \perp BD,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的周长 } AB + AE + BE$$

$$= AB + AE + DE$$

$$= AB + AD,$$

$$\because \square ABCD \text{ 为 } 20\text{cm},$$

$$\therefore AD + BD = 10\text{cm},$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的周长为 } 10\text{cm},$$

故选：A.

第 II 卷（非选择题）

二、填空题（共 24 分）

7. （本题 2 分）方程 $\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{2x-1} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{1}{2}$

【分析】本题考查了解无理方法，二次根式有意义的条件、解一元一次不等式组、算术平方根，熟练掌握相关知识点是解题的关键。根据二次根式有意义的条件可得 $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$ ，解出 x 的范围，再根据算术平方根的非负性求解方程即可得出答案。

【详解】解：由题意得， $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$ ，

解得： $x \geq \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{2x-1} = 0,$$

$$\therefore 1+x=0 \text{ 或 } 2x-1=0,$$

解得： $x = -1$ （舍去）或 $x = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 方程的解是 $x = \frac{1}{2}$ 。

故答案为： $x = \frac{1}{2}$ 。

8. （本题 2 分）若关于 x 的函数 $y = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1$ 是一次函数，则 m 的值为_____。

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5

【分析】 本题主要考查了一次函数的定义，掌握一次函数的一次项系数不能为 0 成为解题的关键。

由于函数 $y = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1$ 是一次函数，则二次项系数为 0 且一次项系数不为 0，据此列不等式组求解即可。

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的函数 $y = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1$ 是一次函数，

$$\therefore \begin{cases} m^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ m + \frac{1}{2} \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得: } m = \frac{1}{2},$$

故答案为： $\frac{1}{2}$ 。

9. （本题 2 分）如果一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，那么这个多边形是_____边形。

【答案】 6

【分析】 本题考查了多边形的内角与外角。根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 和外角和定理列出方程，然后求解即可。

【详解】 解： 设多边形的边数为 n ，

由题意得, $(n-2) \cdot 180^\circ = 2 \times 360^\circ$,

解得 $n = 6$.

故这个多边形的边数是 6.

故答案为: 6.

10. (本题 2 分) 顺次连接三角形三边的中点所构成的三角形周长为 16, 那么原来的三角形周长是_____.

【答案】32

【分析】根据三角形的中位线定理知: 三条中位线围成的三角形的各边是对应原三角形各边的一半, 结合题意, 通过计算即可得到答案.

【详解】解: 根据题意可知, 原三角形的周长 $= 2 \times 16 = 32$

故答案为: 32.

【点睛】本题考查了三角形中位线的知识, 解题的关键是熟练掌握三角形中位线的性质, 从而完成求解.

11. (本题 2 分) 我们把对角线与一条底边相等的等腰梯形叫做“完美等腰梯形”. 若一个“完美等腰梯形”的对角线长为 10, 且该梯形的一个内角为 75° , 则这个梯形的高等于_____.

【答案】5

【分析】本题考查了等腰三角形的性质, 含 30° 度角直角三角形的特征, 解题的关键是掌握等边对等角, 含 30° 度角的直角三角形 30° 度角所对的边是斜边的一半.

根据题意画出图形, 过点 D 作 $DH \perp BC$ 与点 H , 即可推出 $\angle C = \angle ADC = 75^\circ$, 进而得出 $\angle DBH = 180^\circ - \angle BDC - \angle C = 30^\circ$, 即可解答.

【详解】解: 如图: 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, $BD = BC = 10, \angle C = 75^\circ$,

过点 D 作 $DH \perp BC$ 与点 H ,

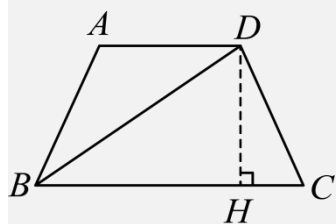
$\because BD = BC$,

$\therefore \angle C = \angle BDC = 75^\circ$,

$\therefore \angle DBH = 180^\circ - \angle BDC - \angle C = 30^\circ$,

$\therefore DH = \frac{1}{2}BD = 5$,

故答案为：5.



12. (本题2分) 在平面直角坐标系中, 已知直线 $y = -\frac{3}{4}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 点 C 是 y 轴负半轴上一点, 点 B 关于直线 AC 的对称点 D 落在 x 轴上, 则点 D 的坐标是_____

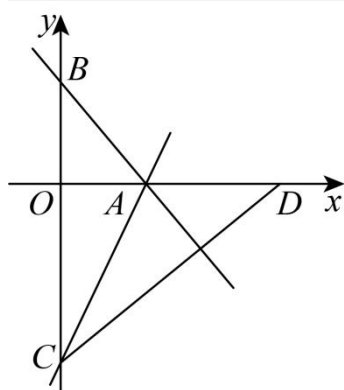
【答案】(12,0)

【分析】 本题主要考查一次函数的综合应用. 利用勾股定理可得 $AB = \frac{20}{3}$, 由折叠得 $AD = AB = \frac{20}{3}$, 即可得出点 D 的坐标.

【详解】解: 把 $x=0$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + 4$ 得 $y = 4$,

把 $y=0$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + 4$ 得: $-\frac{3}{4}x + 4 = 0$,

解得: $x = \frac{16}{3}$,



$$\therefore A\left(\frac{16}{3}, 0\right), B(0, 4),$$

$$\therefore OA = \frac{16}{3}, OB = 4,$$

$$\angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{20}{3},$$

由折叠得: $AD = AB = \frac{20}{3},$

$$\therefore OD = OA + AD = \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 12,$$

$$\therefore \text{点 } D(12, 0),$$

故答案为: $(12, 0)$.

13. (本题 2 分) 用换元法解方程 $\frac{2(x-1)}{x^2} - \frac{x^2}{3(x-1)} = 1$ 时, 设 $y = \frac{x-1}{x^2}$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $6y^2 - 3y - 1 = 0$

【分析】 本题考查了换元法、解分式方程, 熟练掌握相关知识点是解题的关键. 设 $y = \frac{x-1}{x^2}$, 利用换元法将原方程化为关于 y 的方程, 再通过去分母得到整式方程, 即可得出答案.

【详解】 解: $\because y = \frac{x-1}{x^2},$

$$\therefore \frac{2(x-1)}{x^2} = 2y, \quad \frac{x^2}{3(x-1)} = \frac{1}{3y},$$

$$\therefore \text{原方程可化为 } 2y - \frac{1}{3y} = 1,$$

去分母, 得: $6y^2 - 1 = 3y,$

整理得: $6y^2 - 3y - 1 = 0,$

$$\therefore \text{原方程可化为关于 } y \text{ 的整式方程是 } 6y^2 - 3y - 1 = 0.$$

故答案为: $6y^2 - 3y - 1 = 0$.

14. (本题 2 分) 用换元法解无理方程 $x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$, 若设 $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$, 则原方程 可化为整式方程: _____

【答案】 $y^2 - y - 3 = 0$

【分析】本题考查了无理方程的解法，设 $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ ，可得原方程为 $y^2 - y - 3 = 0$ ，掌握无理方程的解法是解题的关键。

【详解】解：设 $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ ，

$\therefore$ 原方程为 $y^2 - y - 3 = 0$ ，

故答案为： $y^2 - y - 3 = 0$ 。

15. （本题 2 分）将二元二次方程 $25x^2 - 40xy + 16y^2 = 9$ 化成两个一次方程，那么这两个一次方程分别是_____和_____。

【答案】 $5x - 4y + 3 = 0$ $5x - 4y - 3 = 0$

【分析】本题考查解二元二次方程，移项后，利用完全平方公式和平方差公式进行因式分解，转化为两个一次方程，即可。

【详解】解： $25x^2 - 40xy + 16y^2 = 9$

$$25x^2 - 40xy + 16y^2 - 9 = 0$$

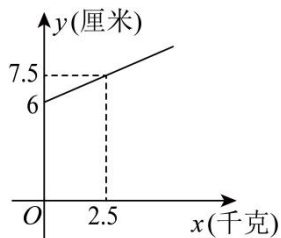
$$(5x - 4y)^2 - 9 = 0$$

$$(5x - 4y + 3)(5x - 4y - 3) = 0，$$

$$\therefore 5x - 4y + 3 = 0 \text{ 或 } 5x - 4y - 3 = 0；$$

故答案为： $5x - 4y + 3 = 0$ ， $5x - 4y - 3 = 0$ 。

16. （本题 2 分）已知弹簧长度 y （厘米）与所挂重物的质量 x （千克）的函数关系如图所示，那么弹簧长度为 7 厘米时，所挂重物为_____千克。



【答案】 $\frac{5}{3}$ / $1\frac{2}{3}$

【分析】本题主要考查一次函数图象，根据题意设出一次函数表达式，然后把 $(0,6)$ 、 $(2.5,7.5)$ 代入到表达式，求出 k 和 b ，即可求出函数表达式，最后把 $y=7$ ，代入到表达式，求出 x 即可。

【详解】解：设一次函数表达式为： $y=kx+b$ ，

$\because$ 把 $(0,6)$ 、 $(2.5,7.5)$ 两点坐标代入表达式 $y=kx+b$ ，得：

$$\begin{cases} b=6 \\ 2.5k+b=7.5 \end{cases}$$

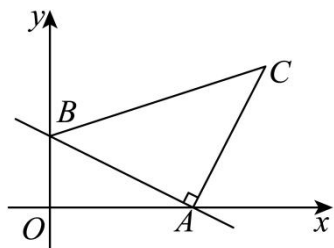
解得， $\begin{cases} k=\frac{3}{5} \\ b=6 \end{cases}$

$$\therefore y=\frac{3}{5}x+6,$$

把 $y=7$ ，代入到 $y=\frac{3}{5}x+6$ ，解得： $x=\frac{5}{3}$

故答案为： $\frac{5}{3}$ 。

17. (本题2分) 如图，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 和 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B ，以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰直角 $\triangle ABC$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ，如果在直角坐标平面内有一点 $P\left(a, \frac{3}{4}\right)$ ，且 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等，则 a 的值为_____。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{4}-4$ 或 $4+\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

【分析】由已知求出 A 、 B 的坐标，求出三角形 ABC 的面积，再利用 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$ 建立含 a 的方程，把表示成有边落在坐标轴上的三角形面积和、差，通过解方程求得答案。

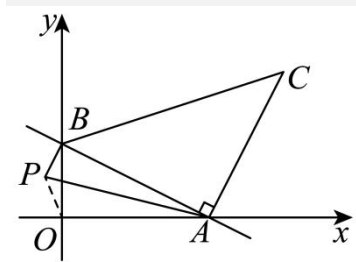
【详解】解： $\because$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ,

$$\therefore A(\sqrt{3}, 0), B(0, 1), AB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC} = 2,$$

连接 OP ,

当点 P 在第二象限时,

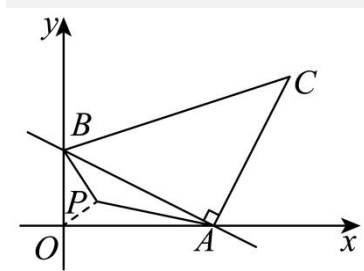


$$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle OPB} + S_{\triangle OAB} - S_{\triangle AOP},$$

$$\therefore |a| \times 1 + \sqrt{3} \times 1 - \frac{3}{4} \times \sqrt{3} = 4,$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{3}}{4} - 4 \text{ 或 } a = 4 - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (舍)};$$

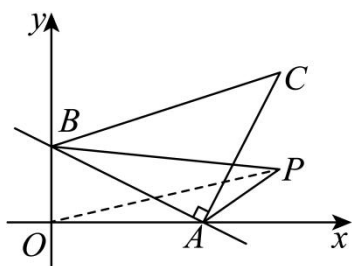
当点 P 在第一象限且在直线 AB 左侧时,



$$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle OPB} - S_{\triangle AOP},$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{3}}{4} - 4 \text{ (舍) 或 } a = 4 - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (舍)};$$

当点 P 在第一象限且在直线 AB 右侧时,



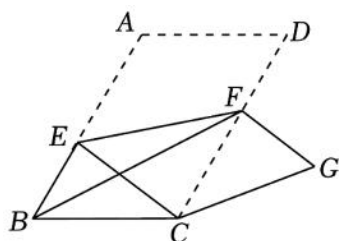
$$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle OPB} + S_{\triangle AOP} - S_{\triangle OAB} ,$$

解得 $a = \frac{\sqrt{3}}{4} + 4$ 或 $a = -4 - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (舍) ;

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{4} - 4$ 或 $4 + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

【点睛】 本题考查了一次函数的综合应用；解函数图象与面积结合的问题，要把相关三角形的面积用边落在坐标轴的其他三角形面积来表示，这样面积与坐标之间就建立了联系；把 $S_{\triangle ABP}$ 表示成有边落在坐标轴上的三角形面积和、差是正确解答本题的关键.

18. (本题 2 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E 是 AB 上的一点，点 F 是边 CD 上一点，将平行四边形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，得到四边形 $EFGC$ ，点 A 的对应点为点 C ，点 D 的对应点为点 G ，则 CF 的长度为_____.



【答案】 $\frac{7}{2}$

【分析】 作 $CK \perp AB$ 于 K ，过 E 点作 $EP \perp BC$ 于 P ，由 30° 角直角三角形的性质可求 $BK = 2$ ，则 $CK = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，证明 $\triangle BCE \cong \triangle GCF$ (ASA)，那么 $CE = CF$ ，而 $BE = 2BP$ ，设 $BP = m$ ，则 $BE = 2m$ ，则 $EP = \sqrt{BE^2 - BP^2} = \sqrt{3}m$ ，由折叠可知， $AE = CE$ ，在 $\text{Rt}\triangle ECP$ 中，由勾股定理得 $(4-m)^2 + (\sqrt{3}m)^2 = (6-2m)^2$ ，即可求解.

【详解】 解：如图，作 $CK \perp AB$ 于 K ，过 E 点作 $EP \perp BC$ 于 P .

$$\therefore AB = 6,$$

$$\therefore AE = CE = 6 - 2m,$$

$$\therefore BC = 4,$$

$$\therefore PC = 4 - m,$$

在 $\text{Rt}\triangle ECP$ 中,

$$\text{由勾股定理得 } (4 - m)^2 + (\sqrt{3}m)^2 = (6 - 2m)^2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{5}{4},$$

$$\therefore EC = 6 - 2m = 6 - 2 \times \frac{5}{4} = \frac{7}{2},$$

$$\therefore CF = EC = \frac{7}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{2}.$$

【点睛】本题考查的是轴对称的性质，平行四边形的性质， 30° 角直角三角形的性质，勾股定理的应用，作出合适的辅助线是解本题的关键.

三、解答题 (共 58 分)

$$19. \quad (\text{本题 } 6 \text{ 分}) \text{ 解方程组: } \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ (x - y)^2 - 3(x - y) + 2 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

【分析】本题考查了解二元二次方程组，利用因式分解法解方程是解题的关键。利用因式分解法对每个方程进行化简，再联立化简后的方程即可求解。

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \text{ ①} \\ (x - y)^2 - 3(x - y) + 2 = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{由 ① 得, } (x + y)^2 = 9,$$

解得: $x+y=3$ 或 $x+y=-3$,

由②得, $(x-y-1)(x-y-2)=0$,

解得: $x-y=1$ 或 $x-y=2$,

当 $x+y=3$, $x-y=1$ 时, 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$;

当 $x+y=3$, $x-y=2$ 时, 解得 $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$;

当 $x+y=-3$, $x-y=1$ 时, 解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$;

当 $x+y=-3$, $x-y=2$ 时, 解得 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$;

$\therefore$ 综上所述, 方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$.

20. (本题 6 分) 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(0,-4)$ 和点 $B(6,4)$.

(1) 求一次函数的解析式;

(2) 在 x 轴上有一点 P , 且 $\angle PBA=90^\circ$, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y=\frac{4}{3}x-4$

(2) $\left(\frac{34}{3}, 0\right)$

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 勾股定理, 解方程等知识.

(1) 用待定系数法求解即可;

(2) 设点 P 的坐标为 $(m, 0)$, 由勾股定理分别求得 AB^2 、 BP^2 、 AP^2 , 再由 $\angle PBA=90^\circ$, 根据勾股定理得 $AB^2+BP^2=AP^2$,

即可得关于 m 的方程，解方程即可.

【详解】 (1) 解：将 $A(0, -4)$ 和 $B(6, 4)$ 代入 $y = kx + b$,

$$\text{得} \begin{cases} -4 = b \\ 4 = 6k + b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -4 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = \frac{4}{3}x - 4$;

(2) 解：设点 P 的坐标为 $(m, 0)$ ，由勾股定理得 $AB^2 = 6^2 + (-4 - 4)^2$, $BP^2 = (6 - m)^2 + 4^2$, $AP^2 = m^2 + 4^2$,

$\therefore \angle PBA = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $AB^2 + BP^2 = AP^2$,

$$\therefore 6^2 + (-4 - 4)^2 + (6 - m)^2 + 4^2 = m^2 + 4^2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{34}{3},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{34}{3}, 0\right)$,

21. (本题 6 分) 解下列关于 x 的方程

$$(1) \frac{x-3}{x-1} + \frac{4}{1-x^2} = 1$$

$$(2) \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$$

$$(3) x^2 + x - \frac{6}{x^2 + x} + 1 = 0$$

$$(4) ax^2 - 2 = 2x^2$$

【答案】 (1) $x = -3$

(2) $x = 20$

(3) $x_1 = -2$ $x_2 = 1$

(4) $a-2 \leq 0$, 方程无解; $a-2 > 0$, $x_1 = \sqrt{\frac{2}{a-2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{a-2}}$

【分析】 (1) 根据去分母, 移项, 合并同类项, 系数化为一, 检验即可.

(2) 根据移项, 两边平方, 再两边平方, 检验即可.

(3) 设 $x^2+x=y$, 则 $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{y}$, 原方程可化为 $y - \frac{6}{y} + 1 = 0$, 去分母得 $y^2 + y - 6 = 0$, 解得 $y_1 = -3$, $y_2 = 2$, 再分别解 $x^2+x = -3$ 和 $x^2+x = 2$, 然后进行检验确定原方程的解.

(4) 移项得到 $x^2(a-2) = 2$, 在分别计算: $a-2 \leq 0$ 时; $a-2 > 0$ 时, 即可解答.

本题考查了解分式方程, 解无理方程, 换元法将分式方程转化为整式方程, 公式法解一元二次方程, 熟练掌握其运算法则是解题的关键.

【详解】 (1) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{4}{1-x^2} = 1$

方程两边同时乘 $(x-1)(x+1)$ 得, $(x-3)(x+1) - 4 = (x-1)(x+1)$,

$$x^2 + x - 3x - 3 - 4 = x^2 - 1,$$

$$-2x = -1 + 7,$$

$$x = -3,$$

检验: 当 $x = -3$ 时, $(x-1)(x+1) \neq 0$,

$\therefore x = -3$ 是原方程的解.

(2) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$

移项得: $\sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x+5}$,

两边平方得: $2x-4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x+5$,

整理得: $x-10 = 2\sqrt{x+5}$,

再两边平方得: $x^2 - 24x + 80 = 0$,

$$(x-20)(x-4) = 0,$$

解得： $x_1 = 20$ ， $x_2 = 4$ ，

经检验 $x_2 = 4$ 是原方程的增根，舍去，

故答案为： $x = 20$.

$$(3) \quad x^2 + x - \frac{6}{x^2 + x} + 1 = 0$$

设 $x^2 + x = y$ ，则 $\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{y}$ ，

$\therefore$ 原方程可化为 $y - \frac{6}{y} + 1 = 0$ ，

去分母得 $y^2 + y - 6 = 0$ ，

解得 $y_1 = -3$ ， $y_2 = 2$ ，

当 $y_1 = -3$ ， $x^2 + x = -3$ ，此方程无实数解，

当 $y_2 = 2$ ， $x^2 + x = 2$ ，解得 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$ ，

经检验 $x_1 = -2$ 、 $x_2 = 1$ 是原方程的解，

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$.

$$(4) \quad ax^2 - 2 = 2x^2$$

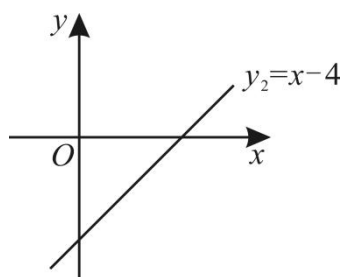
$$ax^2 - 2x^2 = 2，$$

$$x^2(a - 2) = 2，$$

当 $a - 2 \leq 0$ 时， $a \leq 2$ ， $x^2(a - 2) \leq 0$ ，方程无解，

当 $a - 2 > 0$ 时， $a > 2$ ， $x^2 = \frac{2}{a - 2}$ ，解得 $x_1 = \sqrt{\frac{2}{a - 2}}$ ， $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{a - 2}}$.

22. （本题 6 分）已知直线 $y_1 = kx + 1$ 与直线 $y_2 = x - 4$ 都经过点 $A(2, m)$.



(1)求 m, k 的值;

(2)当 x _____ 时, $y_1 \geq y_2$;

(3)求这两条直线与 y 轴围成的三角形的面积.

【答案】(1) $m = -2$, $k = -\frac{3}{2}$

(2) ≤ 2

(3) 5

【分析】 本题考查了求一次函数的解析式、一次函数的几何应用，熟练掌握一次函数的图像与性质是解题关键.

(1) 先将点 $A(2, m)$ 代入直线 $y_2 = x - 4$ 得 m 的值，从而可得点 A 的坐标，再将点 A 的坐标代入直线 $y_1 = kx + 1$ 即可得 k 的值；

(2) 画出两个一次函数的大致图像，结合函数图像求解即可得；

(3) 先分别求出两个一次函数与 y 轴的交点坐标，再利用三角形的面积公式求解即可得.

【详解】 (1) 解：将点 $A(2, m)$ 代入直线 $y_2 = x - 4$ 得： $m = 2 - 4 = -2$,

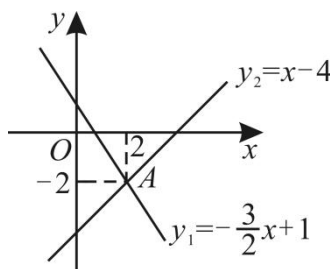
$\therefore A(2, -2)$,

将点 $A(2, -2)$ 代入直线 $y_1 = kx + 1$ 得： $2k + 1 = -2$,

解得 $k = -\frac{3}{2}$.

(2) 解：由 (1) 可知， $y_1 = -\frac{3}{2}x + 1$, $A(2, -2)$,

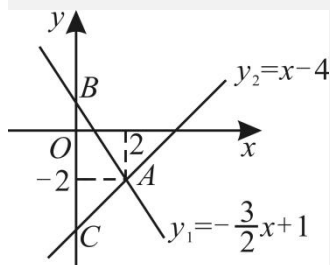
在平面直角坐标系中，画出两个一次函数的大致图像如下：



由函数图像可知，当 $x \leq 2$ 时， $y_1 \geq y_2$ ，

故答案为： ≤ 2 ．

(3) 解：如图，设直线 $y_1 = -\frac{3}{2}x + 1$ 与 y 轴交于点 B ，直线 $y_2 = x - 4$ 与 y 轴交于点 C ，



对于直线 $y_1 = -\frac{3}{2}x + 1$ ，当 $x = 0$ 时， $y_1 = 1$ ，即 $B(0, 1)$ ，

对于直线 $y_2 = x - 4$ ，当 $x = 0$ 时， $y_2 = -4$ ，即 $C(0, -4)$ ，

$$\therefore BC = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5,$$

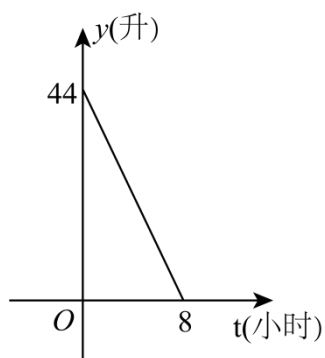
$$\therefore A(2, -2),$$

$$\therefore ABC \text{ 的 } BC \text{ 边上的高为 } |2| = 2,$$

$$\therefore ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5,$$

即这两条直线与 y 轴围成的三角形的面积为 5.

23. （本题 6 分）在行驶完某段全程 600 千米的高速公路时，李师傅对张师傅说：“你的车速太快了，平均每小时比我还多跑 20 千米，比我少用 1.5 小时就跑完了全程．”



(1) 已知这段高速公路全程限速 110 千米/小时，如果两人全程均匀速行驶，那么张师傅超速了吗？请说明理由；

(2) 张师傅所行驶的车内油箱余油量 y （升）与行驶时间 t （小时）的函数关系如图所示，当张师傅行驶完这段高速公路时，求油箱里的剩余油量。

【答案】(1) 张师傅没有超速，理由见解析

(2) 当张师傅行驶完这段高速公路时，油箱里的剩余油量 11 升

【分析】此题考查分式方程的应用和从函数图象获取信息等知识，读懂题意和从函数图象获取有效信息是关键。

(1) 设张师傅的速度为 x 千米/时，根据时间关系列方程并解方程即可进行解答；

(2) 从函数图象获取信息进行解答即可。

【详解】(1) 解：张师傅没有超速，

理由：设张师傅的速度为 x 千米/时，

$$\frac{600}{x} + 1.5 = \frac{600}{x - 20}.$$

$$\therefore x_1 = -80 \text{ (舍去)}, x_2 = 100.$$

经检验， $x = 100$ 是原分式方程的解。

$$\therefore 100 < 110,$$

$\therefore$ 张师傅没有超速。

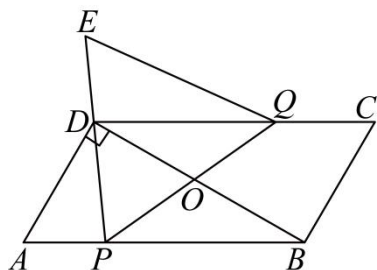
(2) 由函数图象可得，张师傅每小时耗油量为： $44 \div 8 = 5.5$ （升），

$$\therefore \text{行驶完这段高速公路，张师傅至少需要：} \frac{600}{100} \times 5.5 = 33 \text{（升）。}$$

$\therefore$ 即行驶完这段高速公路，他至少需要 33 升.

$\therefore$ 当张师傅行驶完这段高速公路时，油箱里的剩余油量 $= 44 - 33 = 11$ (升) .

24. (本题 6 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， O 为对角线 BD 的中点， $\angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AD = 4$. 动点 P 从点 A 出发，以每秒 2 个单位的速度沿折线 $AB - BC$ 向终点 C 匀速运动，连结 PO 并延长交折线 $CD - DA$ 于点 Q . 将线段 PQ 绕着点 P 逆时针旋转 60° 得到线段 PE ，连结 QE ，设点 P 的运动时间为 t (s).



(1) 用含 t 的代数式表示 PB 的长.

(2) 当点 P 在边 AB 上运动时，求证： $AP = CQ$.

(3) 当点 E 在 $\triangle ABD$ 边上时，求 t 的值.

【答案】 (1) 当 $0 \leq t \leq 4$ 时， $PB = 8 - 2t$ ；当 $4 < t \leq 6$ 时， $PB = 2t - 8$

(2) 见解析

(3) 2 或 3

【分析】 本题主要考查了平行四边形的性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，利用分类讨论的思想方法解答.

(1) 利用含 30° 角的直角三角形的性质，平行四边形的性质解答即可；

(2) 连接 AC ，利用平行四边形的性质和全等三角形的判定与性质解答即可；

(3) 利用平行四边形的性质，等边三角形的判定与性质求得点 E 与点 D 重合或点 E 在 AB 边上时的 t 值，从而得到 t 的取值范围.

【详解】 (1) 解： $\because \angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AD = 4$ ，

$\therefore \angle ABD = 30^\circ$ ，

$\therefore AB = 2AD = 8$ ，

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 4\sqrt{3},$$

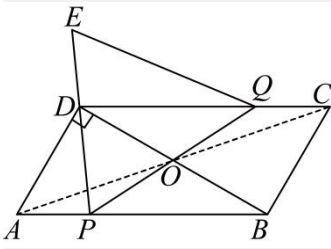
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore BC = AD = 4,$$

①当 $0 \leq t \leq 4$ 时, $PB = AB - AP = 8 - 2t$,

②当 $4 < t \leq 6$ 时, $PB = 2t - 8$;

(2) 证明: 连接 AC , 如图,



在 $\square ABCD$ 中, O 为对角线 BD 的中点,

$\therefore AC$ 经过点 O , $OA = OC$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle QCO = \angle PAO$,

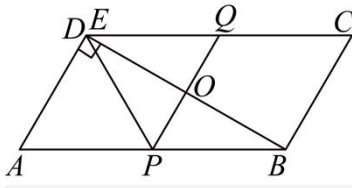
在 $\triangle APO$ 和 $\triangle CQO$ 中,

$$\begin{cases} \angle AOP = \angle COQ \\ OA = OC \\ \angle OAP = \angle OCQ \end{cases},$$

$\therefore \triangle APO \cong \triangle CQO$ (ASA),

$\therefore AP = CQ$;

(3) 解: ①当点 E 与点 D 重合时, 如图,



由题意得： $\triangle PQE$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle PQE = \angle QPE = 60^\circ,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle QPB = \angle PQE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle QPB = 60^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel PQ,$$

$\therefore$ 四边形 $APQD$ 为平行四边形，

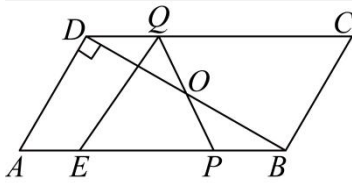
$$\therefore PQ = AD = 4,$$

$$\therefore DQ = PQ = AP = 4,$$

$$\therefore 2t = 4,$$

$$\therefore t = 2,$$

②当点 E 落在 AB 边上时，如图，



由题意得： $\triangle PQE$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle PEQ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle PEQ = 60^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel EQ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEQD$ 为平行四边形，

$$\therefore EQ = AD = 4, AE = DQ,$$

$$\therefore PE = 4,$$

$$\therefore AE = AP - PE = 2t - 4,$$

在 $\triangle DOQ$ 和 $\triangle BOP$ 中,

$$\begin{cases} \angle DOQ = \angle BOP \\ OD = OB \\ \angle QDO = \angle PBO \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DOQ \cong \triangle BOP (\text{AAS}),$$

$$\therefore DQ = PB,$$

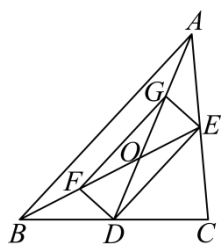
$$\therefore PB = AE,$$

$$\therefore 8 - 2t = 2t - 4,$$

$$\therefore t = 3,$$

$\therefore$ 当点 E 在 $\triangle ABD$ 边上时, t 的值为: 2 或 3.

25. (本题 6 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, AD 与 BE 交于点 O , 点 F 、 G 分别是 BO 、 AO 的中点, 连接 DE 、 EG 、 GF 、 FD .



(1) 求证: $FG \parallel DE$;

(2) 若 $AC = BC$, 求证: 四边形 $EDFG$ 是矩形.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

【分析】 (1) 根据点 F 、 G 分别是 BO 、 AO 的中点, 得到 $FG \parallel AB$, 由 AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, 得到 $DE \parallel AB$, 即可证明 $FG \parallel DE$;

(2) 根据第一问结论, 可得 $FG \parallel DE$, $FG = DE$, 即证得四边形 $EDFG$ 是平行四边形, 根据 $AC = BC$, 证得 $\triangle BAE \cong \triangle ABD$, 得到 $\angle ABE = \angle BAD$, 结合 $FG \parallel AB$, 得到 $GO = FO$, 再根据平行四边形对角线互相平分, 得到 $GD = EF$, 即证明四边形 $EDFG$ 是矩形.

【详解】 (1) $\because$ 点 F 、 G 分别是 BO 、 AO 的中点

$$\therefore FG \parallel AB, \quad FG = \frac{1}{2}AB$$

$\because AD$ 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线

$\therefore DE$ 是 ABC 的中位线

$$\therefore DE \parallel AB, \quad DE = \frac{1}{2}AB$$

$$\therefore FG \parallel DE, \quad FG = DE.$$

(2) $\because AD$ 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AC, \quad BD = \frac{1}{2}BC$$

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore AE = BD, \quad \angle BAE = \angle ABD$$

$$\text{在 } \triangle BAE \text{ 与 } \triangle ABD \text{ 中, } \begin{cases} AB = AB \\ \angle BAE = \angle ABD \\ AE = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle ABD (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BAD$$

$$\because FG \parallel AB,$$

$$\therefore \angle GFO = \angle ABE, \quad \angle FGO = \angle BAD$$

$$\therefore \angle GFO = \angle FGO,$$

$$\therefore GO = FO$$

$$\because FG \parallel DE, \quad FG = DE$$

∴ 四边形 $EDFG$ 是平行四边形

∴ GD ， FE 互相平分

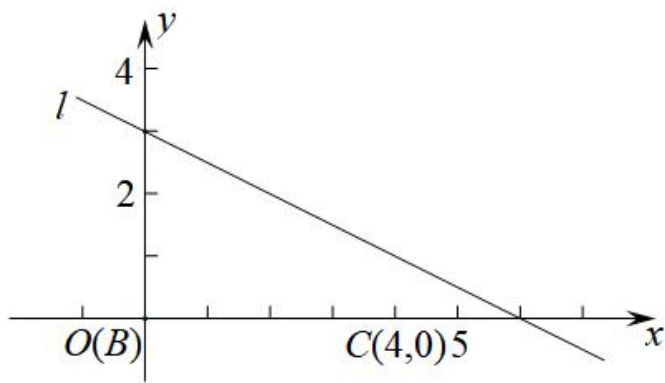
∴ $GD = 2GO$ ， $EF = 2FO$

∴ $GD = EF$.

∴ 四边形 $EDFG$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了三角形中位线的性质，平行线的判定和性质，三角形全等的判定和性质，等腰三角形的性质，平行四边形的判定和性质，矩形的判定，熟练掌握相关性质和判定是解题的关键.

26. (本题 8 分) 如图, $\triangle ABC$ 的两顶点分别为 $B(0, 0)$, $C(4, 0)$, 顶点 A 在直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$ 上.



(1) 当 $\triangle ABC$ 是以 BC 为底的等腰三角形时, 求点 A 的坐标;

(2) 当 $\triangle ABC$ 的面积为 4 时, 求点 A 的坐标;

(3) 在直线 l 上是否存在点 A , 使 $\angle BAC = 90^\circ$? 若存在, 求出点 A 的坐标; 若不存在请说明理由.

【答案】(1) $A(2, 2)$;

(2) $(2, 2)$ 或 $(10, -2)$;

(3) 在直线 l 上存在点 A , 使 $\angle BAC = 90^\circ$, 此时点 A 的坐标是 $(2, 2)$ 或 $(3.6, 1.2)$

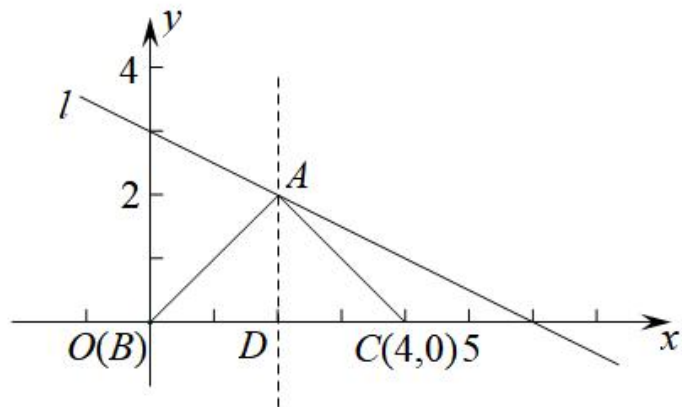
【分析】 (1) 以 BC 为底的等腰三角形, 点 A 是 BC 的中垂线与直线 l 的交点, 据此求解即可;

(2) 根据 $\triangle ABC$ 的面积求得点 A 的纵坐标, 把点 A 的纵坐标代入直线方程即可求得其横坐标;

(3) 设点 A 的坐标为 $(t, 3 - \frac{1}{2}t)$, 根据两点间距离公式表示出 $AB^2 = t^2 + (3 - \frac{1}{2}t)^2 = \frac{5}{4}t^2 - 3t + 9$,

$AC^2 = (t-4)^2 + (3-\frac{1}{2}t)^2 = \frac{5}{4}t^2 - 11t + 25$ ， $BC^2 = 4^2 = 16$ ，再利用勾股定理建立方程，求解即可。

【详解】（1）如图，当 $\triangle ABC$ 是以 BC 为底的等腰三角形时，点 A 在 BC 的中垂线上。



$\therefore B(0, 0)$ ， $C(4, 0)$ ，

$\therefore BC$ 的中垂线为 $x=2$ 。

又点 A 在直线 $l: y = -\frac{1}{2}x+3$ 上，

$\therefore y = -\frac{1}{2} \times 2 + 3 = 2$ ，

即 $A(2, 2)$ ；

（2）设 $A(a, b)$ 。则依题意得

$\frac{1}{2}BC \cdot |b| = 4$ ，即 $\frac{1}{2} \times 4|b| = 4$ ，

解得 $|b| = 2$

$\therefore b = \pm 2$ 。

①当 $b = 2$ 时， $2 = -\frac{1}{2}a+3$ ，

解得 $a = 2$

则 $A(2, 2)$ ；

②当 $b = -2$ 时， $-2 = -\frac{1}{2}a+3$ ，

解得 $a = 10$

则 $A(10, -2)$.

综上所述, 点 A 的坐标是 $(2, 2)$ 或 $(10, -2)$;

(3) 设点 A 的坐标为 $(t, 3 - \frac{1}{2}t)$,

$\therefore B(0, 0)$, $C(4, 0)$,

$$\therefore AB^2 = t^2 + (3 - \frac{1}{2}t)^2 = \frac{5}{4}t^2 - 3t + 9, \quad AC^2 = (t - 4)^2 + (3 - \frac{1}{2}t)^2 = \frac{5}{4}t^2 - 11t + 25, \quad BC^2 = 4^2 = 16,$$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

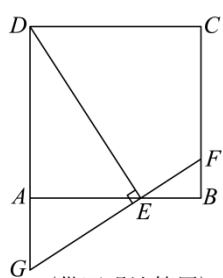
$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2, \quad \text{即} \quad \frac{5}{4}t^2 - 3t + 9 + \frac{5}{4}t^2 - 11t + 25 = 16,$$

解得 $t = 2$ 或 $t = 3.6$,

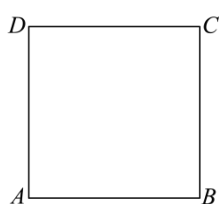
所以, 在直线 l 上存在点 A , 使 $\angle BAC = 90^\circ$, 此时点 A 的坐标是 $(2, 2)$ 或 $(3.6, 1.2)$.

【点睛】本题综合考查了等腰三角形的性质, 一次函数图象上点的坐标特征, 三角形的面积公式以及勾股定理等知识. 解 (2) 题的过程中, 一定要对点 A 的纵坐标进行分类讨论, 以防漏解.

27. (本题 8 分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上 (点 E 与点 A 、 B 不重合), 过点 E 作 $FG \perp DE$, FG 与边 BC 相交于点 F , 与边 DA 的延长线相交于点 G .



(供证明计算用)



(供操作实验用)

(1) 由几个不同的位置, 分别测量 BF 、 AG 、 AE 的长, 从中你能发现 BF 、 AG 、 AE 的数量之间具有怎样的关系? 并证明你所得到的结论;

(2) 连接 DF , 如果正方形的边长为 2, 设 $AE = x$, $\triangle DFG$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3)如果正方形的边长为 2, FG 的长为 $\frac{5}{2}$, 求点 C 到直线 DE 的距离.

【答案】(1) $BF + AG = AE$, 见解析

(2) $y = \frac{4+x^2}{2}$, $0 < x < 2$

(3)点 C 到直线 DE 的距离为 $\frac{8}{5}$

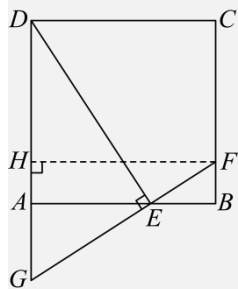
【分析】(1) 过点 F 作 $FH \perp DA$, 垂足为 H , 易得四边形 $ABFH$ 是矩形, 可得 $FH = AB = DA$, $BF = AH$, 再证明 $\triangle FHG \cong \triangle DAE$, 由全等三角形的性质可得 $GH = AE$, 即 $HA + AG = AE$, 结合 $BF = HA$, 即可证明结论;

(2) 连接 DF , 结合全等三角形的性质以及勾股定理可得 $FG = DE = \sqrt{4+x^2}$, 根据三角形面积公式即可获得 y 与 x 之间的函数解析式, 并确定该函数解析式的定义域即可;

(3) 连接 CE , 首先确定 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot AD = 2$, 故可设点 C 到直线 DE 的距离为 h , 则有 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}DE \cdot h = 2$, 代入数值并求解, 即可获得答案.

【详解】(1) 解: $BF + AG = AE$, 证明如下:

过点 F 作 $FH \perp DA$, 垂足为 H , 如下图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore AB = AD$, $\angle DAB = \angle B = 90^\circ$,

$\because FH \perp DA$,

$\therefore \angle AHF = \angle DAB = \angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABFH$ 是矩形,

$\therefore FH = AB = DA$, $BF = AH$,

$$\therefore FG \perp DE ,$$

$$\therefore \angle G + \angle ADE = \angle ADE + \angle AED = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle G = \angle AED ,$$

在 $\triangle FHG$ 和 $\triangle DAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle FHG = 90^\circ \\ \angle AED = \angle G \\ DA = FH \end{cases} ,$$

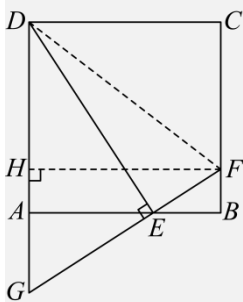
$$\therefore \triangle FHG \cong \triangle DAE (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore GH = AE , \text{ 即 } HA + AG = AE ,$$

$$\therefore BF = HA ,$$

$$\therefore BF + AG = AE ;$$

(2) 连接 DF , 如下图,



由 (1) 可知, $\triangle FHG \cong \triangle DAE$,

$$\therefore FG = DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{4 + x^2} ,$$

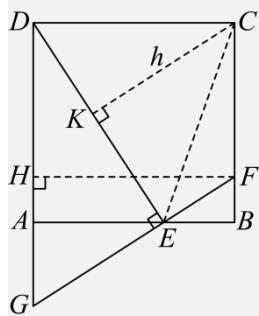
$$\therefore S_{\triangle DGF} = \frac{1}{2} FG \cdot DE ,$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数解析式为 } y = \frac{4 + x^2}{2} ,$$

$\therefore$ 点 E 在边 AB 上, 且点 E 与点 A 、 B 不重合,

$\therefore$ 该函数解析式的定义域为 $0 < x < 2$.

(3) 连接 CE ，如下图，



$$\because S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot AD = 2,$$

$$\therefore \text{可设点 } C \text{ 到直线 } DE \text{ 的距离为 } h, \text{ 则有 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}DE \cdot h = 2,$$

$$\because DE = FG = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}h = 2,$$

$$\therefore h = \frac{8}{5},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 到直线 } DE \text{ 的距离为 } \frac{8}{5}.$$

【点睛】本题主要考查了正方形的性质、矩形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理、三角形面积公式、一次函数的应用等知识，熟练掌握相关知识，正确作出辅助线是解题关键.