

2024-2025 学年上海市宝山实验学校八年级（下）第二次月考数学试卷

一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. 如果函数 $y = (m^2 - 1)x^{m-1} - m$ 是一次函数，那么 m 的值是（ ）

- A. 1 B. 2 C. ± 1 D. ± 2

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的定义“一次函数的一般形式为 $y = kx + b$ ，其中 k, b 是常数， $k \neq 0$ ”，熟练掌握一次函数的定义是解题关键。根据一次函数的定义可得 $m - 1 = 1$ ，且 $m^2 - 1 \neq 0$ ，由此即可得。

【详解】解： $\because$ 函数 $y = (m^2 - 1)x^{m-1} - m$ 是一次函数，

$\therefore m - 1 = 1$ ，且 $m^2 - 1 \neq 0$ ，

解得 $m = 2$ ，且 $m \neq \pm 1$ ，

综上， m 的值为 2，

故选：B。

2. 下列方程中，属于无理方程的是（ ）

- A. $x^2 - \sqrt{2} = 0$ B. $\sqrt{2x} = 1$ C. $\frac{\sqrt{2}}{x} = 1$ D. $\sqrt{2}x = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据无理方程的定义进行解答，根号内含有未知数的方程为无理方程。

【详解】A 项的根号内没有未知数，所以不是无理方程，故本选项错误，

B 项的根号内有未知数，所以是无理方程，故本选项正确，

C 项的根号内没有未知数，所以不是无理方程，故本选项错误，

D 项的根号内不含有未知数，所以不是无理方程，故本选项错误，

故选：B。

【点睛】本题主要考查无理方程的定义，关键在于分析看看哪一项符合无理方程的定义。

3. 在菱形 $ABCD$ 中，下列结论中不正确的是（ ）

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ B. $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$ C. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ D. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{CB}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质，向量，解题的关键是熟练掌握菱形的性质.

根据菱形的性质和向量的概念，对各选项进行分析判断即可.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{CB},$$

故选项 A，B，D 正确，不符合题意；选项 C 不正确，符合题意.

故选：C.

4. 某校修建一条 400 米长的跑道，开工后每天比原计划多修 10 米，结果提前 2 天完成了任务. 设原计划每天修 x 米，那么根据题意可列出方程 ()

A. $\frac{400}{x-10} - \frac{400}{x} = 2$

B. $\frac{400}{x+10} - \frac{400}{x} = 2$

C. $\frac{400}{x} - \frac{400}{x-10} = 2$

D. $\frac{400}{x} - \frac{400}{x+10} = 2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 设原计划每天修 x 米，根据结果提前 2 天完成了任务列方程即可.

【详解】 设原计划每天修 x 米，由题意得

$$\frac{400}{x} - \frac{400}{x+10} = 2.$$

故选 D.

【点睛】 本题考查了列分式方程解实际问题的运用及分式方程的解法的运用，解答时根据条件建立方程是关键，解答时对求出的根必须检验，这是解分式方程的必要步骤.

5. 已知四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，如果添加一个条件，即可推出该四边形是正方形，那么这个条件可以是 ()

A. $\angle D = 90^\circ$

B. $AB = CD$

C. $AC = BD$

D. $BC = CD$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的判定，正方形的判定等，解题关键是熟练掌握并能够灵活运用正方形的判定等. 先判断四边形 $ABCD$ 是矩形，由正方形的判定可直接判断 D 正确.

【详解】 解：在四边形 $ABCD$ 中，

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

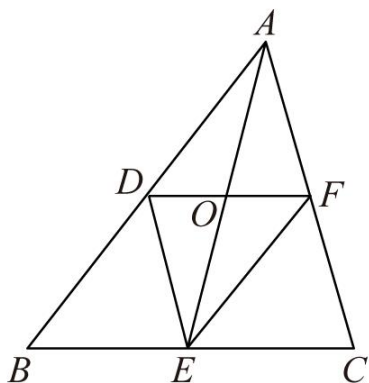
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

而判断矩形是正方形的判定定理为：有一组邻边相等的矩形是正方形，

故 D 正确，

故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 、 AC 的中点，分别连结 DE 、 EF 、 DF 、 AE ，点 O 是 AE 与 DF 的交点，下列结论中，正确的个数是（ ）



① $\triangle DEF$ 的周长是 $\triangle ABC$ 周长的一半；② AE 与 DF 互相平分；③如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ，那么点 O 到四边形 $ADEF$ 四个顶点的距离相等；④如果 $AB = AC$ ，那么点 O 到四边形 $ADEF$ 四条边的距离相等.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】①根据中位线的性质，即可判断；②根据中位线的性质、一组对边平行且相等的四边形是平行四边形、平行四边形的对角线互相平分，即可判断；③根据矩形的判定和性质，即可判断；④根据菱形的判定和性质，即可判断.

【详解】解：① $\because$ 点 D 、 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 、 AC 的中点，

$\therefore DE$ 、 EF 、 DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AC, EF = \frac{1}{2} AB, DF = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore DE + EF + DF = \frac{1}{2}(AC + AB + BC),$$

即 $\triangle DEF$ 的周长是 $\triangle ABC$ 周长的一半，

故①正确，符合题意；

② $\because$ 点 D 、 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 、 AC 的中点，

$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB$, EF 是 ABC 的中位线,

$\therefore EF = \frac{1}{2} AB$, $EF \parallel AB$,

$\therefore EF = AD$, $EF \parallel AD$,

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形,

$\therefore AE$ 与 DF 互相平分,

故②正确, 符合题意;

③由②得四边形 $ADEF$ 是平行四边形,

当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 如图 1,

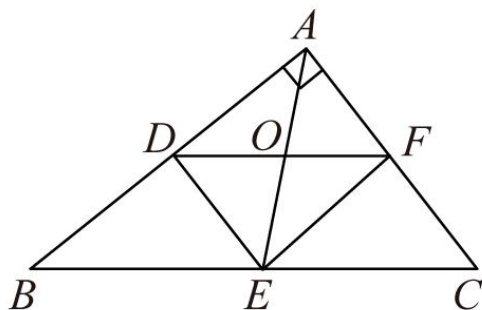


图1

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是矩形,

$\therefore OA = OE = \frac{1}{2} AE$, $OD = OF = \frac{1}{2} DF$, $AE = DF$,

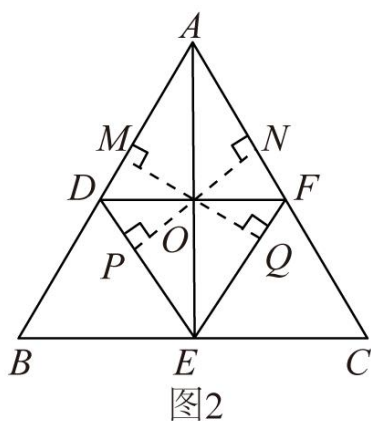
$\therefore OA = OE = OD = OF$,

$\therefore$ 点 O 到四边形 $ADEF$ 四个顶点的距离相等,

故③正确, 符合题意;

④由①得 $DE = \frac{1}{2} AC$, $EF = \frac{1}{2} AB$,

当 $AB = AC$ 时, 如图 2,



$$\therefore DE = EF,$$

由②得四边形 $ADEF$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是菱形,

$$\therefore AD = DE = EF = AF, AE \perp DF,$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle AFO \cong \triangle EFO \cong \triangle EDO,$$

$$\therefore S_{\triangle ADO} = S_{\triangle AFO} = S_{\triangle EFO} = S_{\triangle EDO},$$

$\therefore$ 点 O 到四边形 $ADEF$ 四条边的距离相等,

故④正确, 符合题意.

故选 D.

【点睛】 本题主要考查了中位线的性质、平行四边形的判定和性质、矩形的判定和性质、菱形的判定和性质.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 如果将一次函数 $y = 3x - 1$ 的图像沿 y 轴向上平移 7 个单位, 那么平移后所得图像的函数解析式为_____.

【答案】 $y = 3x + 6$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图像的平移问题, 根据“上加下减”的平移规律求解即可.

【详解】 解: 由题知, 将一次函数 $y = 3x - 1$ 的图像沿 y 轴向上平移 7 个单位后, 所得图像的函数解析式为

$$y = 3x - 1 + 7 = 3x + 6.$$

故答案为: $y = 3x + 6$.

8. 已知直线 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -7x + 4$, 且在 y 轴上的截距为 -1 , 那么该直线的解析式是_____.

【答案】 $y = -7x - 1$

【解析】

【分析】本题考查两条直线相交或平行问题，根据互相平行的直线的解析式的一次项系数的值相等确定出 k ，根据“在 y 轴上的截距为 -1 ” 计算求出 b 值，即可得解.

【详解】解： $\because$ 直线 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -7x + 4$,

$\therefore k = -7$.

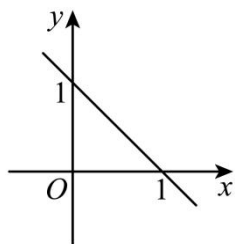
又 $\because$ 直线 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距为 -1 ,

$\therefore b = -1$,

$\therefore$ 这条直线的解析式是 $y = -7x - 1$.

故答案为: $y = -7x - 1$.

9. 如图，如果点 $A(2, m)$ 和点 $B(4, n)$ 在直线 l 的图象上，那么 m 、 n 的大小关系是: m _____ n . (用 “ $>$ ”、“ $=$ ” 或 “ $<$ ” 表示)



【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质，解题的关键是根据函数图象判断其增减性，再利用增减性比较函数值大小.

先根据直线 l 的图象判断函数的增减性，再比较点 A 、 B 横坐标大小，进而得出 m 、 n 的大小关系.

【详解】解：从图象看，函数 y 的值随 x 的增大而减小，

$\because 2 < 4$,

$\therefore m > n$,

故答案为: $>$.

10. 方程 $\sqrt{3x+4} = x$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】此题考查了解无理方程，涉及的知识点有二次根式的性质，一元二次方程的解法以及不等式组的解法，解题的关键在于掌握基本性质和运算法则．先将原方程两边同时平方可得到关于 x 的一元二次方程，解得 x ，再结合原方程中二次根式的双重非负性得出 x 的取值范围，从而可得出结果．

【详解】解：原方程变形为： $3x+4=x^2$ ，即 $x^2-3x-4=0$ ，

$$\therefore (x+1)(x-4)=0,$$

$$\therefore x=-1 \text{ 或 } x=4,$$

$$\text{又由题意可得} \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

解得， $x \geq 0$ ，

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时不满足题意，

$$\therefore x=4$$

故答案为： $x=4$

11. 用换元法解分式方程 $\frac{x^2+1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} = 3$ 时，如果设 $\frac{x}{x^2+1} = y$ ，那么原方程可以化为关于 y 的方程是

_____.

【答案】 $\frac{1}{y} - 2y = 3$

【解析】

【分析】设 $\frac{x}{x^2+1} = y$ ，则 $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{y}$ ，再把原方程变形，进行等量代换即可得到答案．

【详解】解： $\therefore \frac{x^2+1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} = 3$ ，

$$\therefore \frac{x^2+1}{x} - \frac{2}{1} \times \frac{x}{x^2+1} = 3,$$

$$\text{设 } \frac{x}{x^2+1} = y, \text{ 则 } \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{y},$$

$$\therefore \frac{1}{y} - 2y = 3,$$

故答案为： $\frac{1}{y} - 2y = 3$ ．

【点睛】 本题考查换元的方法解分式方程，寻找相关联的整体进行换元是解题的关键.

12. 如果多边形的每个内角都等于 150° ，则它的边数为_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的内角与外角的关系，先求出这个多边形的每一个外角的度数，再用 360° 除以一个外角的度数即可得到边数.

【详解】 解： $\because$ 多边形的每个内角都等于 150° ，

$\therefore$ 多边形的每个外角都等于 $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ ，

则它的边数为 $360^\circ \div 30^\circ = 12$ ；

故答案为：12.

13. 梯形的中位线长 8cm，高 10cm，则该梯形的面积为_____ cm^2 .

【答案】 80

【解析】

【分析】 根据梯形中位线定理求出梯形的上底+下底，根据梯形的面积公式计算，得到答案.

【详解】 $\because$ 梯形的中位线长 8，

$\therefore$ 梯形的上底+下底=16，

$\therefore$ 该梯形的面积 $=\frac{1}{2} \times 16 \times 10 = 80 (cm^2)$ ，

故答案为：80.

【点睛】 本题考查了梯形的中位线定理，掌握梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半是解题的关键.

14. 已知菱形的周长是 48cm 一条较小的对角线的长是 12cm，则该菱形较大的内角是_____度.

【答案】 120

【解析】

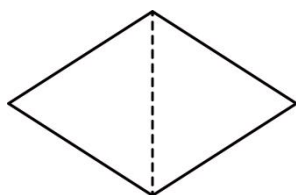
【分析】 先根据菱形的性质求出菱形的边长，然后根据对角线长为 12cm，可判断出菱形一个角的度数，继而可求得该菱形较大的内角度数.

【详解】 $\because$ 菱形的周长为 48cm，

$\therefore$ 菱形的边长为： $48 \div 4 = 12cm$ ，

$\therefore$ 一条对角线的长是 12cm，

$\therefore$ 这条对角线跟相邻的两边组成的三角形为等边三角形，



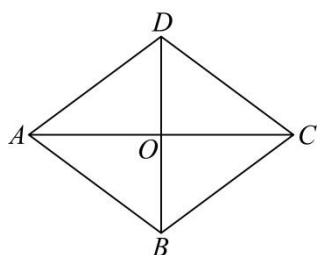
则菱形的较小的内角为 60° ,

则较大内角为 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

故答案为: 120.

【点睛】 本题主要考查了菱形的性质及等边三角形的判定和性质的综合运用, 难度一般, 如果不熟练菱形的性质, 解答本题的时候可以先画出草图.

15. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 若 $AB = 5$, $OA = 4$, 则菱形 $ABCD$ 的面积_____.



【答案】 24

【解析】

【分析】 根据菱形的性质: 菱形的两条对角线互相垂直可计算出该菱形的面积.

【详解】 解: 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,

所以 $AC \perp BD$.

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 利用勾股定理求得 $BO = 3$.

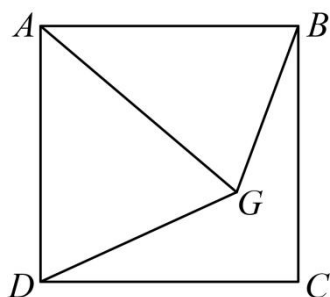
$\therefore BD = 6$, $AC = 8$.

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 面积为 $\frac{1}{2} \times AC \times BD = 24$.

故答案为 24.

【点睛】 本题考查了菱形的性质的灵活运用, 熟练运行菱形的性质来求其面积是解决此题的关键.

16. 如图, 点 G 为正方形 $ABCD$ 内一点, $AB = AG$, $\angle AGB = 70^\circ$, 联结 DG , 那么 $\angle BGD =$ _____度.



【答案】 135.

【解析】

【分析】根据正方形的性质可得出 $AB=AD$ 、 $\angle BAD=90^\circ$ ，由 $AB=AG$ 、 $\angle AGB=70^\circ$ 利用等腰三角形的性质及三角形内角和定理可求出 $\angle BAG$ 的度数，由 $\angle DAG=90^\circ - \angle BAG$ 可求出 $\angle DAG$ 的度数，由等腰三角形的性质结合三角形内角和定理可求出 $\angle AGD$ 的度数，再由 $\angle BGD=\angle AGB+\angle AGD$ 可求出 $\angle BGD$ 的度数.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore AB=AD, \quad \angle BAD=90^\circ.$$

$$\because AB=AG, \quad \angle AGB=70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAG=180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG=90^\circ - \angle BAG=50^\circ,$$

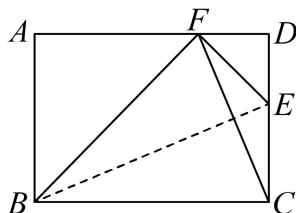
$$\therefore \angle AGD=\frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAG)=65^\circ,$$

$$\therefore \angle BGD=\angle AGB+\angle AGD=135^\circ.$$

故答案为 135.

【点睛】本题考查了正方形的性质、等腰三角形的性质以及三角形内角和定理，根据等腰三角形的性质结合三角形内角和定理求出 $\angle AGD$ 的度数是解题的关键.

17. 如图，已知在矩形 $ABCD$ 中， $AB=\sqrt{2}$ ， $BC=2$ ，将这个矩形沿直线 BE 折叠，使点 C 落在边 AD 上的点 F 处，折痕 BE 交边 CD 于点 E ，那么 $\angle DCF$ 等于_____度.



【答案】 22.5

【解析】

【分析】本题考查了翻折问题，解决本题的关键是由翻折得到 $BF=BC$.

由翻折得到 $BF=BC$ ，先根据勾股定理求出 AF ，得到 $\triangle BAF$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle ABF=\angle AFB=45^\circ$ ，进而求出 $\angle FBC=90^\circ - \angle ABF=45^\circ$ ，再根据 $\triangle BCF$ 为等腰三角形，得到 $\angle BCF=\angle BFC=(180^\circ - \angle CBF) \div 2=67.5^\circ$ ，进而求出 $\angle DCF=90^\circ - \angle BCF=90^\circ - 67.5^\circ=22.5^\circ$.

【详解】解：由折叠可得： $BF=BC$ ，

$$\because BC=2,$$

$$\therefore BF = BC = 2,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle A = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BAF \text{ 中, } AF = \sqrt{BF^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB = AF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = 90^\circ - \angle ABF = 45^\circ,$$

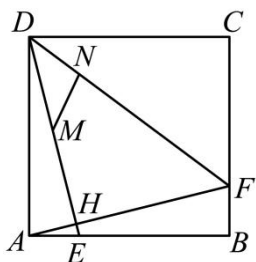
$\therefore$ 在 $\triangle CBF$ 中, $BF = BC$, $\angle FBC = 45^\circ$,

$$\therefore \angle BCF = \angle BFC = (180^\circ - \angle CBF) \div 2 = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ,$$

故答案为: 22.5.

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 E 、 F 分别为 AB 、 BC 上一点, $AE = BF = 1$, DE 与 AF 交于点 H , 点 M 为 DH 的中点, 点 N 为线段 DF 靠近 D 的四等分点, 则 $MN =$ _____.



【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的性质, 三角形中位线定理, 勾股定理, 全等三角形的性质与判定, 由正方形的性质得到 $AB = AD$, $\angle DAE = \angle B = \angle C = 90^\circ$, 证明 $\triangle ADE \cong \triangle BAF$ (SAS), 得到

$\angle ADE = \angle BAF$, 则可证明 $\angle DHF = 90^\circ$, 取 DF 的中点 G , 连接 HG , 由勾股定理可得

$$DF = \sqrt{DC^2 + CF^2} = 5, \text{ 则 } HG = DG = FG = \frac{1}{2}DF = \frac{5}{2}, \text{ 证明 } MN \text{ 是 } \triangle DHG \text{ 的中位线, 即可得到}$$

$$MN = \frac{1}{2}HG = \frac{5}{4}.$$

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, \angle DAE = \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BAF$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAE = \angle B, \\ AE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAF \text{ (SAS)},$$

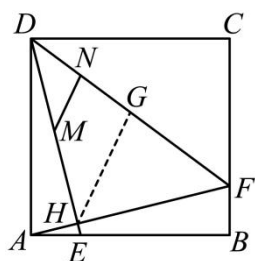
$$\therefore \angle ADE = \angle BAF,$$

$$\therefore \angle ADH + \angle DAH = \angle DAH + \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHF = 90^\circ,$$

如图所示，取 DF 的中点 G ，连接 HG ，



$$\because CD = BC = 4, \quad BF = 1,$$

$$\therefore CF = 3,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DC^2 + CF^2} = 5,$$

$$\therefore HG = DG = FG = \frac{1}{2}DF = \frac{5}{2},$$

$\because$ 点 M 为 DH 的中点，点 N 为线段 DF 靠近 D 的四等分点，

$$\therefore DM = HM, \quad DN = \frac{1}{4}DF = \frac{1}{2}DG,$$

$\therefore MN$ 是 $\triangle DHG$ 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}HG = \frac{5}{4}.$$

故答案为： $\frac{5}{4}$.

三、解答题：（本大题共 7 题，19、20、21、22 每题 10 分，23、24 每题 12 分，25 题 14 分，满分 78 分）

19. 解方程： $\frac{4}{x^2 - 4} + \frac{1}{2 - x} = 1$.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程、解一元二次方程，熟练掌握分式方程的解法步骤是解答的关键，注意计算

结果要检验.

【详解】解: 去分母, 得 $4 - (x+2) = (x+2)(x-2)$,

整理, 得 $2 - x = (x+2)(x-2)$,

则 $(x-2)(x+3) = 0$,

$\therefore x-2=0$ 或 $x+3=0$,

解得 $x=2$ 或 $x=-3$,

检验: 当 $x=2$ 时, $(x+2)(x-2)=0$, 则 $x=2$ 是分式方程的增根;

当 $x=-3$ 时, $(x+2)(x-2) \neq 0$, 则 $x=-3$ 是分式方程的解,

综上, 该分式方程的解为 $x=-3$.

20. 如图 1, 由单位小正方形拼成的 5×5 的大正方形中. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

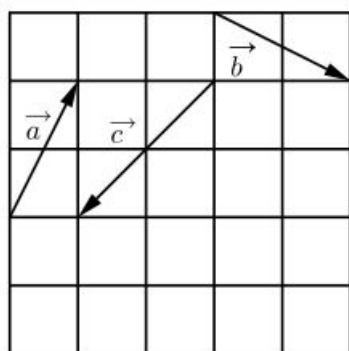


图1

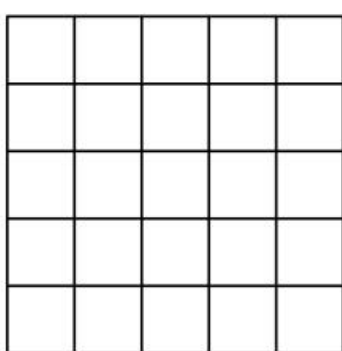


图2

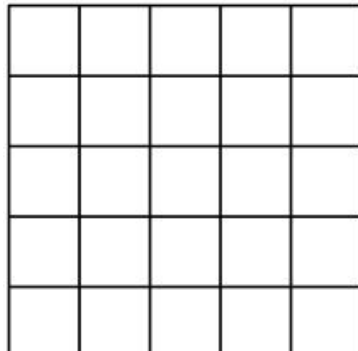


图3

(1) 在图 2 中求作 $\vec{x}$, 使得 $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. (写出结果, 不要求写作法)

(2) 在图 3 中求作 $\vec{y}$, 使得 $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$. (写出结果, 不要求写作法)

【答案】(1) 画图见解析

(2) 画图见解析

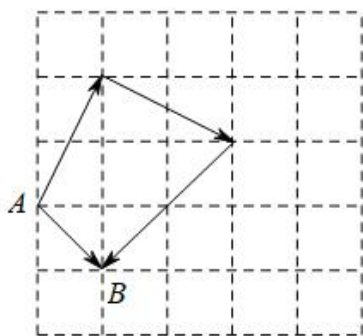
【解析】

【分析】(1) 根据勾股定理与网格的特点求得 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的长, 根据三角形法则即可求解.

(2) 根据三角形法则可得 $\overrightarrow{FG} = \vec{b} + \vec{c}$, 进而表示出 $\overrightarrow{EF} = \vec{y}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图 2 中, $\overline{AB}$ 为所求.



【小问 2 详解】

图2

如图 3 中, $\overrightarrow{FG} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{FG} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{y}$, $\overrightarrow{EF}$ 为所求.

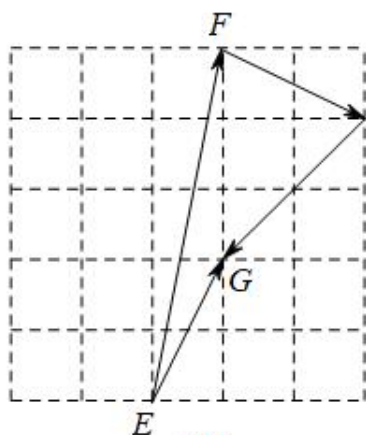
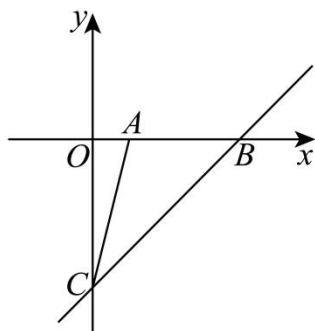


图3

【点睛】 本题考查了平面向量的线性运算, 网格作图, 掌握三角形法则以及多边形法则是解题的关键.

21. 如图, 已知点 $A(1,0)$, 点 $B(4,0)$, 点 C 在 y 轴负半轴上, 且 $S_{\triangle ABC} = 6$, 点 P 为直线 BC 上一点.



- (1) 求直线 BC 的解析式;
- (2) 若 $\triangle OBP$ 的面积为 5, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) 直线 BC 的解析式为 $y = x - 4$

(2) 点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数解析式的求解以及三角形面积与点坐标的关系，解题的关键是利用三角形面积公式求出点 C 坐标，再结合待定系数法求直线解析式，最后根据面积求点 P 坐标.

(1) 先根据 A 、 B 坐标求出 AB 长度，再结合三角形面积公式求出 OC 长度，确定 C 坐标，最后用待定系数法求直线 BC 解析式；

(2) 设 $P(m, m-4)$ ，根据三角形面积公式列出关于 P 纵坐标的方程，求解点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

解： $\because A(1,0)$ ，点 $B(4,0)$ ，

$$\therefore AB = 3,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 3 \times OC = 6,$$

$$\therefore OC = 4,$$

$\because$ 点 C 在 y 轴负半轴上，

$$\therefore C(0, -4),$$

设直线 BC 的解析式是 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = -4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = x - 4$ ；

【小问 2 详解】

解： 设 $P(m, m-4)$ ，

$\because \triangle OBP$ 的面积为 5，

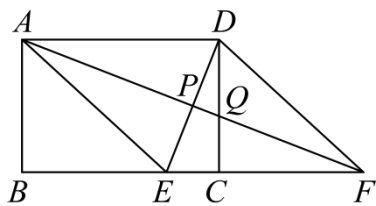
$$\therefore \frac{1}{2} OB \cdot |P_y| = \frac{1}{2} \times 4 \times |m-4| = 5,$$

$$\text{解得 } m = \frac{3}{2} \text{ 或 } m = \frac{13}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 BC 的延长线上，四边形 $AEFD$

的对角线 AF 分别交 DE 、 DC 于点 P 、 Q ，且 $PD = PE$ ， DE 平分 $\angle ADF$ 。



(1) 求证：四边形 $AEFD$ 是菱形；

(2) 如果 $BC = EF$ ， $\angle EDC = \angle EFP$ ，求证：四边形 $ABCD$ 为矩形。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质与判定，矩形的判定，熟练掌握以上知识是解题的关键。

(1) 证明 $\triangle ADP \cong \triangle FEP$ (AAS) 得出 $AD = EF$ ，即可得出四边形 $AEFD$ 是平行四边形，根据角平分线的定义，以及平行线的性质得出 $\angle FDE = \angle FED$ ，进而可得 $FD = FE$ ，即可得证；

(2) 根据 (1) 的结论得出 $AD = EF$ ，结合已知条件得出 $AD = BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，根据菱形的性质得出 $\angle EPF = 90^\circ$ ，即 $\angle PEF + \angle EFP = 90^\circ$ ，根据已知 $\angle EDC = \angle EFP$ ，等量代换得出 $\angle PEF + \angle EDC = 90^\circ$ ，即 $\angle BCD = 90^\circ$ ，即可得证。

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DAP = \angle EFP, \angle ADP = \angle FEP$ ，

又 $PD = PE$ ，

$\therefore \triangle ADP \cong \triangle FEP$ (AAS)，

$\therefore AD = EF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

$\because DE$ 平分 $\angle ADF$ ，

$\therefore \angle PDA = \angle PDF$ ，

又 $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle DEF$ ，

$\therefore \angle FDE = \angle FED$ ，

$\therefore FD = FE$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

证明: $\because$ 四边形 $AEFD$ 是菱形;

$$\therefore AD = EF,$$

$$\because EF = BC,$$

$$\therefore AD = BC,$$

又 $AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because$ 四边形 $AEFD$ 是菱形;

$$\therefore AF \perp DE,$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEF + \angle EFP = 90^\circ,$$

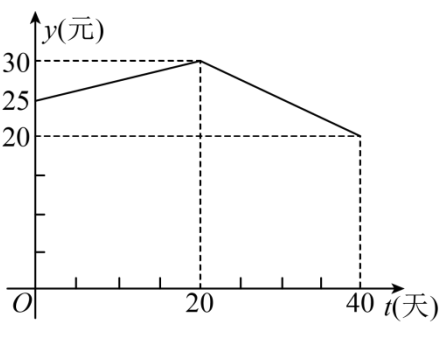
$$\because \angle EDC = \angle EFP,$$

$$\therefore \angle PEF + \angle EDC = 90^\circ,$$

即 $\angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

23. 利用以下素材解决问题.

商品利润问题	
素材 1	某公司生产的某种时令商品每件成本为 22 元, 经过市场调研发现: ①这种商品在未来 40 天内的日销售量 m (件) 与时间 t (天) 的关系为: $m = -2t + 96$.
素材 2	②未来 40 天内, 该商品每天的单价 y (元/件) 与时间 t (天) (t 为整数) 之间关系的函数图象如图所示. 
任务 1	经计算得, 当 $0 < t \leq 20$ 时, y 关于 t 的函数关系式为_____; 则当 $21 \leq t \leq 40$ 时, y 关于 t 的函数关系式为_____.

任务 2	请预测未来 40 天中哪一天的单价是 26 元?
任务 3	请预测未来 40 天中哪一天的日销售利润最大, 最大日销售利润是多少?

【答案】 任务 1: $y = \frac{1}{4}t + 25$, $y = -\frac{1}{2}t + 40$; 任务 2: 未来 40 天中第 4 天和第 28 天的单价是 26 元; 任务 3: 第 18 天的日销售利润最大, 最大日销售利润是 450 元

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求函数解析式, 一次函数和二次函数的应用, 关键是能够根据题意分两种情况列出函数关系式.

任务 1: 分别利用待定系数法求解即可;

任务 2: 分别令 $y = \frac{1}{4}t + 25 = 26$, $y = -\frac{1}{2}t + 40 = 26$, 解方程即可;

任务 3: 设前 20 天的销售利润为 P_1 元, 后 20 天的销售利润为 P_2 元, 根据利润 = 单件利润 × 销售量列出函数关系式, 再根据二次函数的性质分别求出最大值即可.

【详解】 解: 任务 1: 当 $0 < t \leq 20$ 时, 设 y 关于 t 的函数关系式为 $y = kt + b$,

代入 $(0, 25), (20, 30)$ 得:
$$\begin{cases} b = 25 \\ 20k + b = 30 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ b = 25 \end{cases}$$

$\therefore y$ 关于 t 的函数关系式为 $y = \frac{1}{4}t + 25$;

当 $20 < t \leq 40$ 时, 设 y 关于 t 的函数关系式为 $y = mt + n$,

代入 $(40, 20), (20, 30)$, 得:
$$\begin{cases} 20m + n = 30 \\ 40m + n = 20 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 40 \end{cases}$$

$\therefore y$ 关于 t 的函数关系式为 $y = -\frac{1}{2}t + 40$;

故答案为: $y = \frac{1}{4}t + 25$, $y = -\frac{1}{2}t + 40$;

任务 2: ①当 $0 < t \leq 20$ 时, 令 $y = \frac{1}{4}t + 25 = 26$,

解得: $t = 4$,

②当 $20 < t \leq 40$ 时, 令 $y = -\frac{1}{2}t + 40 = 26$,

解得: $t = 28$,

$\therefore$ 未来 40 天中第 4 天和第 28 天的单价是 26 元;

任务 3: 设前 20 天的销售利润为 P_1 元, 后 20 天的销售利润为 P_2 元,

①由题意得: $P_1 = \left(\frac{1}{4}t + 25 - 22\right)(-2t + 96) = -\frac{1}{2}t^2 + 18t + 288 = -\frac{1}{2}(t - 18)^2 + 450$,

$\therefore$ 当 $t = 18$ 时, P_1 取最大值 450,

即当 $0 < t \leq 20$ 时, 第 18 天的日销售利润最大, 最大日销售利润是 450 元;

②由题意得: $P_2 = \left(-\frac{1}{2}t + 40 - 22\right)(-2t + 96) = t^2 - 84t + 1728$,

$\therefore 1 > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, 对称轴为 $t = 42$,

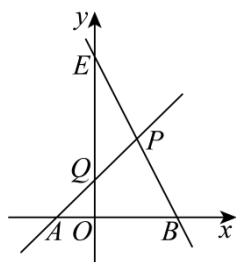
$\therefore$ 当 $20 < t \leq 40$ 时, P_2 随 t 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $t = 21$ 时, P_2 取最大值 405,

即当 $20 < t \leq 40$ 时, 第 21 天的日销售利润最大, 最大日销售利润是 405 元;

综上, 第 18 天的日销售利润最大, 最大日销售利润是 450 元.

24. 如图, 已知直线 AQ 与 x 轴负半轴交于点 A , 与 y 轴正半轴交于点 Q , $\angle QAO = 45^\circ$, 直线 AQ 在 y 轴上的截距为 2, 直线 $BE: y = -2x + 8$ 与直线 AQ 交于点 P .



(1) 求直线 AQ 的解析式;

(2) 在平面直角坐标系中, 有一点 F , 使得四边形 $BPFO$ 是直角梯形, 求点 F 的坐标.

(3) 若点 C 在 y 轴负半轴上, 点 M 在直线 PA 上, 点 N 在直线 PB 上, 是否存在以 Q 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形, 若存在请求出点 C 的坐标; 若不存在请说明理由.

【答案】(1) $y = x + 2$

(2) $(0, 4)$ 或 $\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$

(3) 存在, 点 C 的坐标为 $(0, -10)$ 或 $\left(0, \frac{2-18\sqrt{2}}{7}\right)$

【解析】

【分析】(1) 运用待定系数法即可求得答案;

(2) 先求得 $P(2, 4)$, 根据四边形 $BPFO$ 是直角梯形, 可得 $\angle BOF = \angle PFO = 90^\circ$ 或 $\angle BPF = \angle PFO = 90^\circ$, 分两种情况分别求出点 F 的坐标即可;

(3) 分两种情况: ①当 CQ 为菱形对角线时, ②当 CQ 为菱形边时, 分别利用菱形性质求得点 C 的坐标即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 AQ 在 y 轴上的截距为 2,

$$\therefore OQ = 2,$$

$$\therefore Q(0, 2),$$

$$\because \angle QAO = 45^\circ, \angle AOQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AQO = 45^\circ = \angle QAO,$$

$$\therefore OA = OQ = 2,$$

$$\therefore A(-2, 0),$$

设直线 AQ 的解析式为 $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} -2k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AQ 的解析式为 $y = x + 2$;

【小问 2 详解】

解：联立得：
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x + 8 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases},$$

$\therefore P(2, 4),$

$\because$ 四边形 $BPFO$ 是直角梯形,

$\therefore \angle BOF = \angle PFO = 90^\circ$ 或 $\angle BOF = \angle PFO = 90^\circ,$

当 $\angle BOF = \angle PFO = 90^\circ$ 时, 如图 1,

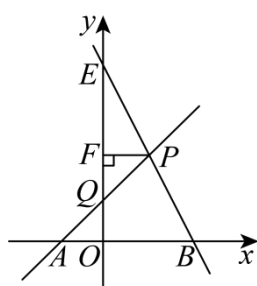


图1

则 $PF \parallel BO,$

$\therefore F(0, 4);$

当 $\angle BPF = \angle PFO = 90^\circ$ 时, 如图 2,

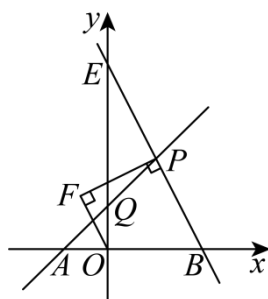


图2

则 $OF \parallel BE, PF \perp BE,$

$\therefore$ 直线 OF 的解析式为 $y = -2x,$

设直线 PF 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + e,$ 把 $P(2, 4)$ 代入得: $4 = \frac{1}{2} \times 2 + e,$

解得: $e = 3,$

$\therefore$ 直线 PF 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 3,$

$$\text{联立得: } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = -2x \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases},$$

$$\therefore F\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right);$$

综上, 点 F 的坐标为 $(0, 4)$ 或 $\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$;

【小问 3 详解】

解: 设 $C(0, c)(c < 0)$, $M(m, m+2)$, $N(n, -2n+8)$, 又 $Q(0, 2)$,

$\therefore$ 以 Q, C, M, N 为顶点的四边形是菱形, 设菱形的中心为点 K ,

$\therefore$ 分两种情况:

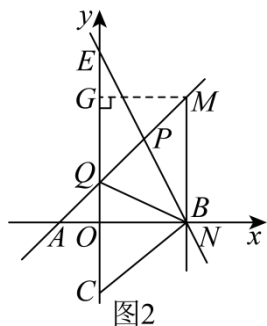
①当 CQ 为菱形对角线时, $MN \perp CQ$, CQ 与 MN 互相平分,

$$\therefore \begin{cases} m+2 = -2n+8 \\ m+n = 0 \\ 2+c = 2(m+2) \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -6 \\ n = 6 \\ c = -10 \end{cases},$$

$$\therefore C(0, -10);$$

②当 CQ 为菱形边时, $BM \parallel CQ$, $BC \parallel PA$, $MQ = CQ$, 如图 2, 过点 M 作 $MG \perp y$ 轴于点 G ,



则 $\angle MGQ = 90^\circ$, $MG \parallel AB$,

$$\therefore \angle GMQ = \angle QAO = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle QMG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore MQ = \sqrt{2}MG = \sqrt{2}m,$$

$$\therefore \begin{cases} m = n \\ 2 - c = (m + 2) - (-2n + 8), \\ \sqrt{2}m = 2 - c \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \frac{18 + 6\sqrt{2}}{7} \\ n = \frac{18 + 6\sqrt{2}}{7}, \\ c = \frac{2 - 18\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

$$\therefore C\left(0, \frac{2 - 18\sqrt{2}}{7}\right).$$

综上, 点 C 的坐标为 $(0, -10)$ 或 $\left(0, \frac{2 - 18\sqrt{2}}{7}\right)$.

【点睛】本题是一次函数综合题, 主要考查了待定系数法, 直角梯形的性质, 两直线的交点坐标的求法, 菱形的性质, 用方程的思想和分类讨论思想解决问题是解本题的关键.

25. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB \neq BC$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折, 点 B 落在点 E 处, AD 与 CE 相交于点 O , 连接 DE .

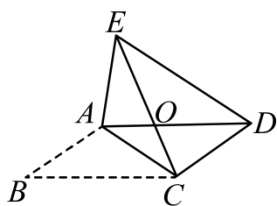


图1

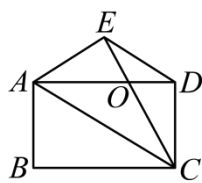
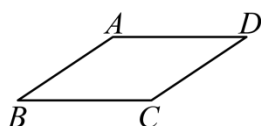


图2



备用图

- (1) 如图 2, 如果 $\angle B = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 3$, 求 $\triangle OAC$ 的面积;
- (2) 如图 1, 若 AE 不平行于 CD , 求证: 四边形 $AEDC$ 是等腰梯形;
- (3) 如果 $\angle B = 30^\circ$, $AB = 6$, 当 $\triangle AED$ 是直角三角形时, 求 BC 的长.

【答案】(1) $\triangle OAC$ 的面积 $= \frac{13}{6}$

(2) 见解析 (3) BC 的长为 $4\sqrt{3}$ 或 $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题是四边形综合题目，考查了翻折变换的性质、平行四边形的性质、平行线的判定与性质、矩形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、勾股定理、直角三角形的性质等知识；本题综合性强，熟练掌握翻折变换的性质和平行四边形的性质是解题的关键.

- (1) 利用矩形性质和勾股定理求三角形面积；
- (2) 通过折叠和平行四边形性质证明四边形是等腰梯形；
- (3) 分情况讨论直角三角形中不同角为直角时 BC 的长度.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle CDO = 90^\circ, CD = AB = 2, AD = BC = 3$,

由 (1) 得: $OA = OC$,

设 $OA = OC = x$, 则 $OD = 3 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, 由勾股定理得 $2^2 + (3 - x)^2 = x^2$,

解得: $x = \frac{13}{6}$,

$\therefore OA = \frac{13}{6}$,

$\therefore \triangle OAC$ 的面积 $= \frac{1}{2} OA \times CD = \frac{1}{2} \times \frac{13}{6} \times 2 = \frac{13}{6}$;

【小问 2 详解】

证明: 由折叠的性质得: $\triangle ABC \cong \triangle AEC$,

$\therefore \angle ACB = \angle ACE, BC = EC, AB = AE$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC, AD \parallel BC, AB = CD$,

$\therefore EC = AD, \angle ACB = \angle CAD, AE = CD$,

$\therefore \angle ACE = \angle CAD$,

$\therefore OA = OC$,

$\therefore OD = OE$,

$\therefore \angle ODE = \angle OED$,

$\therefore \angle AOC = \angle DOE$,

$$\therefore \angle CAD = \angle ACE = \angle OED = \angle ODE,$$

$$\therefore AC \parallel DE,$$

$\because$ 若 AE 不平行于 CD

$\therefore$ 四边形 $AEDC$ 是梯形

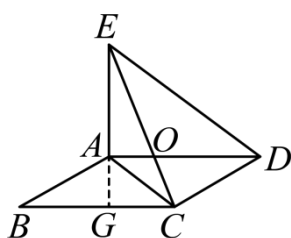
$$\therefore AE = CD$$

$\therefore$ 四边形 $AEDC$ 是等腰梯形

【小问 3 详解】

解：分 4 种情况：

如图，当 $\angle EAD = 90^\circ$ 时，延长 EA 交 BC 于 G ，



$$\because AD = BC, BC = EC,$$

$$\therefore AD = EC,$$

$$\because AD \parallel BC, \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EGC = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 30^\circ, AB = 6,$$

$$\therefore \angle AEC = 30^\circ,$$

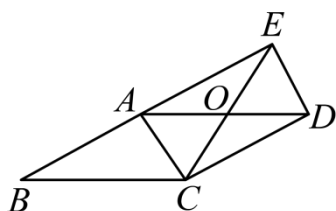
$$\therefore GC = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore G$ 是 BC 的中点，

$$\text{在 Rt}\triangle ABG \text{ 中, } BG = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2BG = 6\sqrt{3};$$

如图，当 $\angle AED = 90^\circ$ 时，



$$\because AD = BC, BC = EC,$$

$$\therefore AD = EC,$$

由折叠的性质得: $AE = AB$,

$$\therefore AE = CD,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle CAD$ 中,

$$\begin{cases} AE = CD \\ CE = AD, \\ AC = CA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CAD (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle ECA = \angle DAC,$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore OE = OD,$$

$$\therefore \angle OED = \angle ODE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle CDE,$$

$$\because \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OED = \angle ODE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle CDE,$$

$$\because \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \parallel CD,$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

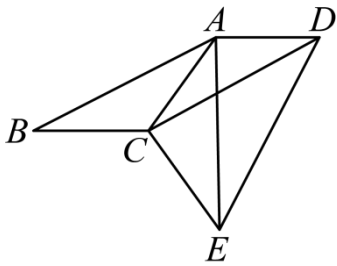
$$\therefore B, A, E \text{ 在同一直线上},$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 中, } \angle B = 30^\circ, AB = 6,$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{3}}{3} AB = 2\sqrt{3}, BC = 2AC = 4\sqrt{3};$$

当 $\angle EAD = 90^\circ$ 时, 如图所示:



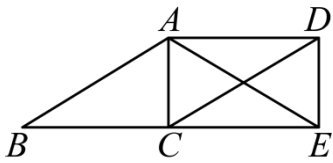
$\therefore \angle AED = \angle B = 30^\circ, AE = AB = 6,$

$\therefore BC = AD = 2\sqrt{3},$

$\therefore AD$ 与 CE 交于点 $O,$

$\therefore$ 不符合题意舍去;

当 $\angle ADE = 90^\circ$ 时, 如图所示:



$\therefore \angle DAE = \angle AEC = \angle B = 30^\circ, AE = AB = 6,$

$\therefore BC = AD = 3\sqrt{3},$

$\therefore AD$ 与 CE 交于点 $O,$

$\therefore$ 不符合题意舍去。

综上所述, 当 $\triangle AED$ 是直角三角形时, BC 的长为 $4\sqrt{3}$ 或 $6\sqrt{3}$.