

2024 学年第二学期阶段性作业评价 (二)

八年级数学试卷

(时间: 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 若点 $A(2, a)$ 、 $B(3, b)$ 在直线 $y = -x - 1$ 图像上, 则 ()

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. 不能确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的性质, 解题的关键是能够确定一次函数的增减性, 难度不大. 根据一次函数的性质确定其增减性, 然后根据横坐标的大小确定纵坐标的大小即可.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = -x - 1$ 中 $k = -1 < 0$,

$\therefore y$ 随着 x 的增大而减小,

$\because A(2, a)$ 、 $B(3, b)$ 在直线 $y = -x - 1$ 图象上, 且 $2 < 3$,

$\therefore a > b$,

故选: A.

2. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 是分式方程

B. $x^2 + 3y = 1$ 是二元二次方程

C. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 是无理方程

D. $x^2 - 2x = 0$ 是二项方程

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了分式方程、二元二次方程及无理方程的概念. 根据分式方程、二元二次方程及一元二次方程的概念进行判断即可,

【详解】解: A、 $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 为一元二次方程, 所以 A 选项的说法错误;

B、 $x^2 + 3y = 1$ 为二元二次方程, 所以 B 选项的说法正确;

C、 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 是一元二次方程, 所以 C 选项的说法错误;

D、 $x^2 - 2x = 0$ 是一元二次方程, 所以 D 选项的说法错误.

故选：B.

3. 下列命题中，假命题的是（ ）

- A. 平行四边形的对角线互相平分
- B. 对角线垂直的平行四边形是菱形
- C. 矩形的对角线互相平分且相等
- D. 对角线相等的平行四边形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了命题与定理的知识，掌握平行四边形的性质、菱形、正方形的判定及矩形的性质是解答本题的关键.

根据平行四边形的性质，菱形的性质及正方形的性质，矩形的判定定理，结合选项即可得出答案.

【详解】解：A、平行四边形的对角线互相平分，根据平行四边形的性质定理，是真命题，故此选项不符合题意；

B、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，根据菱形的判定定理，是真命题，故此选项不符合题意；

C、矩形的对角线互相平分且相等，根据矩形的性质定理，是真命题，故此选项不符合题意；

D、对角线相等的平行四边形是矩形，不一定是正方形，是假命题，故此选项符合题意；

故选：D.

4. 如果直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 经过第一、二、四象限，且与 x 轴的交点为 $(6, 0)$ ，那么当 $kx + b > 0$ 时 x 的取值范围是（ ）

- A. $x > 6$
- B. $x < 6$
- C. $x \geq 6$
- D. $x \leq 6$

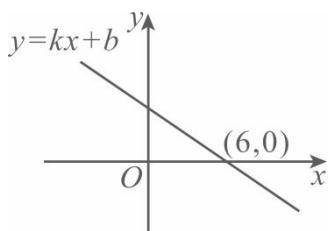
【答案】B

【解析】

【分析】根据题意大致画出图象，然后数形结合即可确定 x 的取值范围.

【详解】 $\because$ 直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 经过第一、二、四象限，且与 x 轴的交点为 $(6, 0)$,

$\therefore$ 图象大致如图：



由图可知，当 $kx + b > 0$ 时 x 的取值范围是 $x < 6$,

故选：B.

【点睛】本题主要考查一次函数的图象及性质，掌握一次函数的图象及性质并能够数形结合是解题的关键.

5. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，下列条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是（ ）

A. $AC = BD$

B. $OA = OB$

C. $\angle DAC = \angle BAC$

D. $\angle ABC = \angle BAD$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了添加一个条件是矩形，添加一个条件是菱形，平行四边形的性质，解题关键是掌握上述判定与性质.

根据添加一个条件是矩形，添加一个条件是菱形，平行四边形的性质，对四个条件逐一分析，再作判断.

【详解】解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

添加 $AC = BD$ ，根据对角线相等的平行四边形是矩形，

可判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 A 不符合；

添加 $OA = OB$ ，可得 $AC = BD$ ，

根据对角线相等的平行四边形是矩形，

可判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 B 不符合；

添加 $\angle DAC = \angle BAC$ ，可得出四边形 $ABCD$ 是菱形，

不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 C 符合；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ,$$

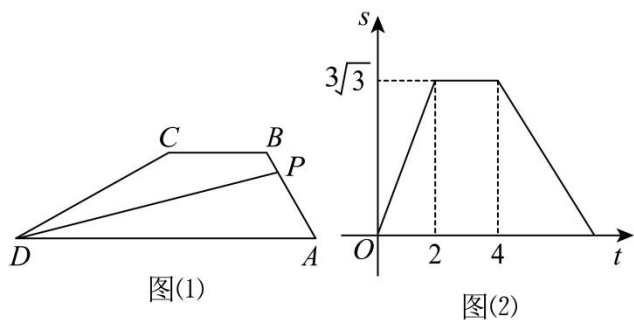
添加 $\angle ABC = \angle BAD$ ，可得出 $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ，

根据一个角是直角的平行四边形是矩形，

可判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 D 不符合，

故选：C.

6. 如图（1）在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，动点 P 从 A 点出发，以 1cm/s 的速度沿着 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的方向不停移动，直到点 P 到达点 D 后才停止. 已知 $\triangle PAD$ 的面积 S （单位： cm^2 ）与点 P 移动的时间 t （单位： s ）的函数关系如图（2）所示，则点 P 从开始移动到停止移动一共用了（ ） s .



A. 6

B. 7

C. $4+3\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了动点问题的函数图象，勾股定理，矩形的判定与性质，掌握知识点的应用是解题的关键.

根据图（2）判断出 AB 、 BC 的长度，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，然后求出梯形 $ABCD$ 的高 BE ，再根据 $t=2$ 时 $\triangle PAD$ 的面积求出 AD 的长度，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F ，然后求出 DF 的长度，利用勾股定理列式求出 CD 的长度，然后求出 AB 、 BC 、 CD 的和，再根据时间 = 路程 $\div$ 速度计算即可得解.

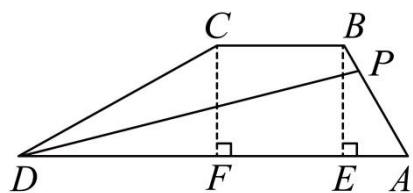
【详解】解：由图（2）可知， t 在 2 到 4 秒时， $\triangle PAD$ 的面积不发生变化，

$\therefore$ 在 AB 上运动的时间是 2 秒，在 BC 上运动的时间是 $4-2=2$ （秒），

$\therefore$ 动点 P 的运动速度是 1cm/s ，

$\therefore AB=2\text{cm}$ ， $BC=2\text{cm}$ ，

如图，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F ，



$\therefore \angle BEF = \angle CFE = \angle BEA = \angle DFC = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BEF + \angle CBE = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BEF = \angle CFE = \angle CBE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是矩形，

$\therefore BE = CF$ ， $BC = EF = 2\text{cm}$ ，

$\therefore \angle A = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE = 30^\circ$ ，

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AB = 1\text{cm},$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AD \times BE = 3\sqrt{3}, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times AD \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = 6\text{cm},$$

$$\therefore DF = AD - AE - EF = 6 - 1 - 2 = 3(\text{cm}),$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDF \text{ 中, } CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore \text{动点 } P \text{ 运动的总路程为 } AB + BC + CD = 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore \text{动点 } P \text{ 的运动速度是 } 1\text{cm/s},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 从开始移动到停止移动一共用了 } (4 + 2\sqrt{3}) \div 1 = 4 + 2\sqrt{3}(\text{秒}),$$

故选: D.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 已知函数 $f(x) = 3x - 1$, 那么 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5

【解析】

【分析】把 $x=2$ 代入 $3x-1$ 求解.

【详解】解: $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$.

故答案为: 5.

【点睛】本题考查函数的值, 解题关键是掌握函数的意义, 区分自变量与因变量, 了解函数的值的意义.

8. 关于 x 的方程 $b(x-3) = 2(b \neq 0)$ 的根是_____.

【答案】 $\frac{2}{b} + 3$

【解析】

【分析】本题考查解方程, 去括号, 移项, 合并, 系数化 1, 进行求解即可.

【详解】解: $b(x-3) = 2(b \neq 0),$

$$bx - 3b = 2,$$

$$bx = 2 + 3b,$$

$$\therefore x = \frac{2}{b} + 3;$$

故答案为: $\frac{2}{b}+3$

9. 方程 $\sqrt{2x+8}-x=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=4$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程, 将无理方程转化为整式方程, 求解后进行检验即可.

【详解】 解: $\sqrt{2x+8}-x=0$,

$$\therefore \sqrt{2x+8}=x,$$

$$\therefore 2x+8=x^2,$$

解得: $x_1=4, x_2=-2$,

经检验: $x=4$ 为原方程的解, $x=-2$ 是原方程的增根, 舍去;

故答案为: $x=4$.

10. 已知一个凸多边形的内角和等于五边形外角和的 2 倍, 则这个凸多边形的边数是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查多边形的内角和与外角和的综合应用, 根据多边形的内角和的计算公式, 以及任意多边形的外角和为 360 度, 列出方程进行求解即可.

【详解】 解: 设这个凸多边形为 n 边形,

由题意, 得: $(n-2) \cdot 180^\circ = 2 \times 360^\circ$,

解得: $n=6$;

故这个凸多边形为六边形;

故答案为: 6.

11. 等腰梯形的上下底边长分别为 2 和 6, 其两条对角线互相垂直, 则这个等腰梯形的面积为_____.

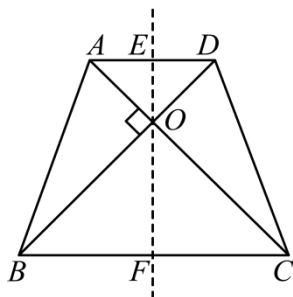
【答案】 16

【解析】

【分析】 本题需要先画图, 考查了等腰梯形的轴对称性, 等腰直角三角形的性质, 掌握以上知识是解答本题的关键;

本题先画图, 过 O 点作梯形对称轴 EF , 交 AD 于 E , 交 BC 于 F , $AD=2$, $BC=6$, 然后求得 $OE=1$, $OF=3$, $EF=4$, 然后即可求解;

【详解】解：过 O 点作梯形对称轴 EF ，交 AD 于 E ，交 BC 于 F ， $AD=2$ ， $BC=6$ ，如图：



根据等腰梯形的对称性可知， $OA=OD$ ， $OB=OC$ ，

又 $\because AC \perp BD$ ，

$\therefore \triangle AOD$ ， $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AD = 1, \quad OF = \frac{1}{2}BC = 3, \quad EF = OE + OF = 4,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} \times EF \times (AD + BC) = \frac{1}{2} \times 4 \times (2 + 6) = 16.$$

故答案为：16.

12. 已知由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组的解是 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ ，写出一个符合上述条件的二元二次方程组为_____.

【答案】 $\begin{cases} y-2x=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】本题考查了根据方程组的解写方程组，解题的关键是根据解之间的数量关系来表示方程组.

观察方程组的两组解，可以看出 $y=2x$ ， $x^2+y^2=5$ ，联立可得方程组.

【详解】解： $\because$ 根据方程组的解可以看出 $y=2x$ ， $x^2+y^2=5$

$$\therefore \text{方程组} \begin{cases} y-2x=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \text{符合条件}$$

故答案为： $\begin{cases} y-2x=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ (答案不唯一)

13. 已知方程 $\frac{x^2+1}{3x} - \frac{x}{x^2+1} = 1$ ，如果设 $\frac{x}{x^2+1} = y$ ，那么原方程可以变形为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $3y^2 + 3y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 先把方程变形为含 y 的分式方程，再去分母得整式方程.

【详解】 解：方程 $\frac{x^2+1}{3x} - \frac{x}{x^2+1} = 1$ ，可变形为： $\frac{1}{3} \times \frac{x^2+1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = 1$ ，

若设 $\frac{x}{x^2+1} = y$ ，则 $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{y}$

所以原方程可变形为： $\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} - y = 1$

两边都乘以 $3y$ ，得 $3y^2 + 3y - 1 = 0$.

故答案为： $3y^2 + 3y - 1 = 0$

【点睛】 本题考查了分式方程的换元法. 题目难度不大，注意式子的变形.

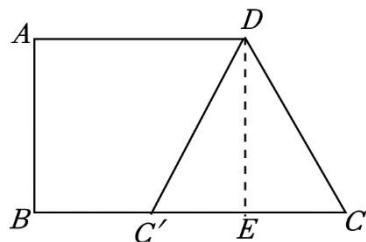
14. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AD = 6$ ， $AB = 4$ ， $CD = 5$ ，则 $BC =$ _____.

【答案】 9 或 3

【解析】

【分析】 本题考查的是梯形的性质、勾股定理，正确作出辅助线、灵活运用分情况讨论思想是解题的关键. 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ，根据勾股定理求出 EC ，分两种情况计算即可.

【详解】 解：如图，在梯形 $ABCD$ 中，过点 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ，



则四边形 $ABED$ 为矩形，

$\therefore BE = AD = 6$ ， $DE = AB = 4$ ， $\angle EDC = 90^\circ$ ，

由勾股定理得： $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2} = 5^2 - 4^2 = 3$ ，

$\therefore BC = BE + EC = 6 + 3 = 9$ ，

在梯形 $ABC'D$ 中， $BC' = BE - EC' = 6 - 3 = 3$ ，

则 BC 的长为 9 或 3，

故答案为： 9 或 3.

15. 我们把一条直线上满足横坐标是纵坐标 2 倍的点称为“加倍点”，那么直线 $y = x + 2$ 上的“加倍点”坐标是_____.

【答案】 $(-4, -2)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，根据加倍点的定义设出加倍点的坐标是解题的关键. 根据加倍点的定义，设出加倍点的坐标，代入直线的解析式，即可求解.

【详解】 解：设加倍点为： $(2a, a)$,

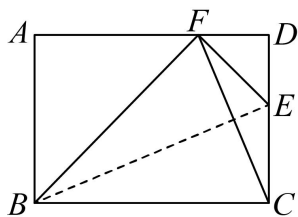
代入直线的解析式得： $a = 2a + 2$,

$\therefore a = -2$,

$\therefore$ 加倍点的坐标为： $(-4, -2)$.

故答案为： $(-4, -2)$.

16. 如图，已知在矩形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 2$ ，将这个矩形沿直线 BE 折叠，使点 C 落在边 AD 上的点 F 处，折痕 BE 交边 CD 于点 E ，那么 $\angle DCF$ 等于_____度.



【答案】 22.5

【解析】

【分析】 本题考查了翻折问题，解决本题的关键是由翻折得到 $BF = BC$.

由翻折得到 $BF = BC$ ，先根据勾股定理求出 AF ，得到 $\triangle BAF$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle ABF = \angle AFB = 45^\circ$ ，进而求出 $\angle FBC = 90^\circ - \angle ABF = 45^\circ$ ，再根据 $\triangle BCF$ 为等腰三角形，得到 $\angle BCF = \angle BFC = (180^\circ - \angle CBF) \div 2 = 67.5^\circ$ ，进而求出 $\angle DCF = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ$.

【详解】 解：由折叠可得： $BF = BC$,

$\therefore BC = 2$,

$\therefore BF = BC = 2$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore \angle A = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BAF$ 中, $AF = \sqrt{BF^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$,

$$\therefore AB = AF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = 90^\circ - \angle ABF = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle CBF \text{ 中, } BF = BC, \angle FBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle BFC = (180^\circ - \angle CBF) \div 2 = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ,$$

故答案为: 22.5.

17. 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别为边 AB, BC, CD, DA 上的点, $HA=EB=FC=GD$, 连接 EG, FH , 交点为 O . 将正方形 $ABCD$ 沿线段 EG, HF 剪开, 再把得到的四个四边形按图 2 的方式拼接成一个四边形. 若正方形 $ABCD$ 的边长为 3cm , $HA=EB=FC=GD=1\text{cm}$, 则图 2 中阴影部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$.

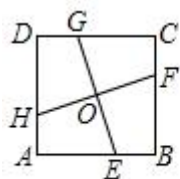


图1

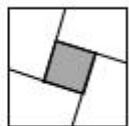


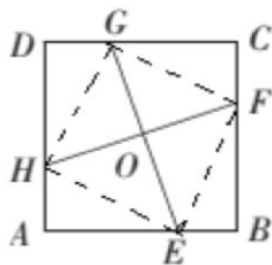
图2

【答案】 1

【解析】

【分析】先证明 $\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG$, 可得出四边形 $GHEF$ 是菱形, 再根据全等三角形角之间的关系, 又可得出菱形的一个角是直角, 那么就可得出四边形 $GHEF$ 是正方形; 再根据已知条件, 可以知道重新拼成的四边形是正方形, 利用勾股定理求出 GF 和 GO, FO 的长, 所的面积是 10 减去 4 个四边形 $GOFC$ 的面积就是阴影部分的面积.

【详解】连接 EF, FG, GH, HE .



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, AB = BC = CD = DA.$$

$$\therefore HA=EB=FC=GD,$$

$$\therefore AE=BF=CG=DH,$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG,$$

$$\therefore EF=FG=GH=HE,$$

$\therefore$ 四边形 EFGH 是菱形.

$$\therefore \triangle DHG \cong \triangle AEH,$$

$$\therefore \angle DHG = \angle AEH.$$

$$\therefore \angle AEH + \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHG + \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GHE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 EFGH 是正方形.

$$\therefore HA=EB=FC=GD=1, AB=BC=CD=AD=3,$$

$$\therefore GF=EF=EH=GH=\sqrt{5},$$

$\therefore$ 四边形 EFGH 是正方形,

$$\therefore GO=OF, \angle GOF=90^\circ,$$

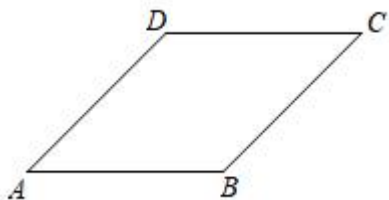
$$\text{由勾股定理得: } GO=OF=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形 FCGO}} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{9}{4},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 - S_{\text{四边形 FCGO}} \times 4 = 10 - 9 = 1.$$

【点睛】此题考查正方形的判定与性质，解题关键在于作辅助线和利用全等三角形的性质.

18. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2， $\angle A = 45^\circ$ ，将菱形 $ABCD$ 绕点 A 旋转 45° ，得到菱形 $AB_1C_1D_1$ ，其中 B 、 C 、 D 的对应点分别是 B_1 、 C_1 、 D_1 ，那么点 C 、 C_1 的距离为_____.

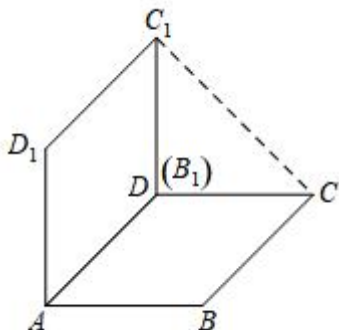


【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】首先由菱形的性质可知 $\angle ABC = \angle ADC = 135^\circ$ ，由旋转的性质可知： $\angle AB_1C_1 = 135^\circ$ ，从而可证明 $\triangle C_1DC$ 为直角三角形，然后由勾股定理即可求得 C_1C 的长度.

【详解】解：如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $\angle DAB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 135^\circ$.

由旋转的性质可知： $\angle AB_1C_1 = 135^\circ$ ， $B_1C_1 = DC = 2$ ，

$\therefore \angle C_1DC = 360^\circ - 135^\circ - 135^\circ = 90^\circ$.

在 $Rt \triangle C_1DC$ 中， $C_1C = \sqrt{C_1D^2 + DC^2} = 2\sqrt{2}$

故答案为： $2\sqrt{2}$

【点睛】本题主要考查的是旋转的性质和菱形的性质以及勾股定理的应用，证得 $\triangle C_1DC$ 为直角三角形是解题的关键.

三、简答题（每题 6 分，共 30 分）

19. 解方程： $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，能把分式方程转化成整式方程是解此题的关键；方程两边都乘以 $x^2 - 4$ 得出 $x(x-2) + (x+2)^2 = 8$ ，求出方程的解，再进行检验即可.

【详解】解： $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ ，

去分母得： $x(x-2) + (x+2)^2 = 8$ ，

$\therefore x^2 - 2x + x^2 + 4x + 4 = 8$ ，

$$\therefore 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$\text{即 } x^2 + x - 2 = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2,$$

检验: $x=1$ 时, $x^2 - 4 \neq 0$, $x=1$ 是原分式方程的解,

$x=-2$ 时, $x^2 - 4 = 0$, $x=-2$ 不是原分式方程的解,

$\therefore$ 原分式方程的解为: $x=1$.

$$20. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组, 利用因式分解法解方程是解题的关键. 利用因式分解法对每个方程进行化简, 再联立化简后的方程即可求解.

$$\text{【详解】 解: } \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \text{ ①} \\ (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{由①得, } (x+y)^2 = 9,$$

$$\text{解得: } x+y=3 \text{ 或 } x+y=-3,$$

$$\text{由②得, } (x-y-1)(x-y-2)=0,$$

$$\text{解得: } x-y=1 \text{ 或 } x-y=2,$$

$$\text{当 } x+y=3, \quad x-y=1 \text{ 时, 解得 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases};$$

$$\text{当 } x+y=3, \quad x-y=2 \text{ 时, 解得 } \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\text{当 } x+y=-3, \quad x-y=1 \text{ 时, 解得 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases};$$

$$\text{当 } x+y=-3, \quad x-y=2 \text{ 时, 解得 } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases};$$

$$\therefore \text{综上所述, 方程组的解为 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

21. A 、 B 两城间的铁路路程为 1800 千米. 为了缩短从 A 城到 B 城的行驶时间, 列车实施提速, 提速后速度比提速前速度每小时增加 20 千米, 如果提速后从 A 城到 B 城的行驶时间减少 3 小时, 且这条铁路规定: 列车安全行驶速度不超过每小时 140 千米. 问列车提速后速度是否符合规定? 请说明理由

【答案】 符合规定, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程应用题, 熟练掌握“路程=速度 $\times$ 时间”列方程, 是解决问题的关键.

设列车提速前速度是每小时 x 千米, 根据“提速后从 A 城到 B 城的行驶时间减少 3 小时”列分式方程, 注意检验.

【详解】 解: 列车提速后速度符合规定. 理由:

设列车提速前速度是每小时 x 千米,

$$\text{则 } \frac{1800}{x} - \frac{1800}{x+20} = 3,$$

解得 $x=100$, 或 $x=-120$ (舍去),

$\therefore$ 提速后的速度为 $100+20=120 < 140$,

经检验, $x=100$ 是原方程的解,

又因速度不能为负,

故 $x=-120$ 舍去,

$\therefore$ 提速后的速度为 $100+20=120 < 140$,

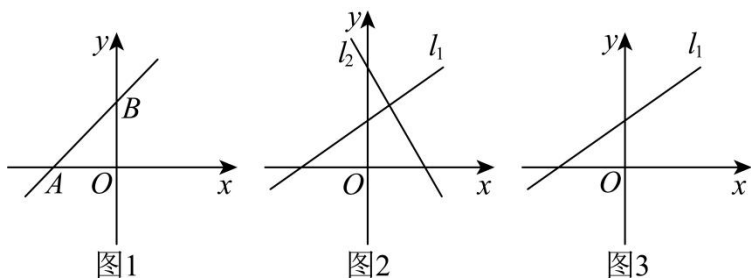
故符合规定符合规定.

22. 一个数学兴趣小组尝试探究一次函数图象与两坐标轴所围成三角形面积的问题. 为了较为全面地研究这个问题, 他们准备把它分成两种类型问题来分别进行研究:

类型 I: 一条直线 $y = kx + b$ (k 、 b 都不为 0) 与两条坐标轴所围成的三角形面积大小;

类型 II: 两条直线 $l_1: y_1 = k_1x + b_1$ 和 $l_2: y_2 = k_2x + b_2$ ($k_1 \neq k_2$ 、 $b_1 \neq b_2$, 且都不为零) 与坐标轴所围成的三角形的面积、直线 l_1 与两条坐标轴所围成的三角形面积、直线 l_2 与两条坐标轴所围成的三角形面积之间的关系.

小组成员认为第一类问题只要将直线与两坐标轴的交点坐标分别求出来, 就能解决; 而第二类的问题需要根据两个函数 k 和 b 符号的不同情况, 分别进行研究, 才能得出相应的结论.



(1) 如图 1, 请你帮助小组求出 $\triangle ABO$ 的面积 S (用含 k 和 b 的式子表示).

(2) 将直线 l_1 与两条坐标轴所围成的三角形面积记为 S_1 , 直线 l_2 与两条坐标轴所围成的三角形面积记为 S_2 , 直线 l_1 、 l_2 和 x 轴所围成的三角形面积记为 S_x , 它们和 y 轴所围成的三角形面积记为 S_y .

①在图 2 中已经画出了直线 l_1 和 l_2 大致图象的一种情况, 那么关于这两个一次函数的 k 和 b 符号选项正确的是_____.

- A. $k_1 > 0$, $b_1 > 0$, $k_2 > 0$, $b_2 > 0$ B. $k_1 > 0$, $b_1 > 0$, $k_2 < 0$, $b_2 < 0$
C. $k_1 > 0$, $b_1 < 0$, $k_2 < 0$, $b_2 > 0$ D. $k_1 > 0$, $b_1 > 0$, $k_2 < 0$, $b_2 > 0$

此时 S_1 、 S_2 、 S_x 和 S_y 之间的关系式是_____.

②如图 3, 保持直线 l_1 不变, 改变直线 l_2 中 k_2 和 b_2 的符号 (不考虑 $|k_2|$ 和 $|b_2|$ 的大小), 请在图中画出直线 l_2 的大致图象, 此时 S_1 、 S_2 、 S_x 和 S_y 之间的关系式是_____.

【答案】(1) $\frac{b^2}{2k}$

(2) ①D, $S_1 + S_2 = S_x + S_y$; ② $S_1 - S_2 = S_x - S_y$.

【解析】

【分析】 本题考查了函数与不等式的关系，掌握函数的性质和三角形的面积公式是解题的关键.

(1) 根据三角形的面积公式求解;

(2) ①根据一次函数的性质求解;

②根据三角形的面积的和差求解.

【小问 1 详解】

解: 当 $x=0$ 时, $y=kx+b=b$,

当 $y=0$ 时, $0=kx+b$, 解得: $x=-\frac{b}{k}$,

$$\therefore A(0,b), B\left(-\frac{b}{k},0\right),$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}\times b\cdot\left|-\frac{b}{k}\right|=\frac{b^2}{2k};$$

【小问 2 详解】

解: ①观察图形得: l_1 经过一二三象限, l_2 经过一二四象限,

$$\therefore k_1>0, b_1>0, k_2<0, b_2>0, S_1+S_2=S_x+S_y,$$

故选: D; $S_1+S_2=S_x+S_y$,

$$\textcircled{2}\because k_2>0, b_2<0,$$

$\therefore$ 图象如下:

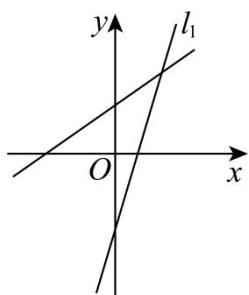
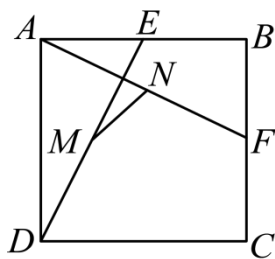


图3

由图象得: $S_1-S_2=S_x-S_y$.

23. 如图所示, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB=2\sqrt{2}$. E 、 F 分别为边 AB 、 BC 的中点, 连接 AF 、 DE , 点 N 、 M 分别为 AF 、 DE 的中点, 连接 MN , 求 MN 的长度.



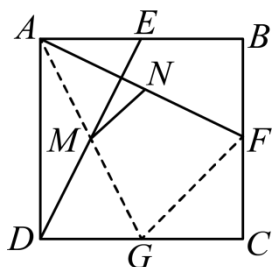
【答案】 $MN = 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质和判定、勾股定理，三角形中位线定理，正确做出辅助线且证出 $AM = MG$ 是解决问题的关键.

连接 AM ，延长 AM 交 CD 于 G ，连接 FG ，由正方形 $ABCD$ 推出 $AB = CD = BC = 2\sqrt{2}$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，证得 $\triangle AEM \cong \triangle GDM$ ，得到 $AM = MG$ ， $AE = DG = \frac{1}{2}AB$ ，根据三角形中位线定理得到 $MN = \frac{1}{2}FG$ ，由勾股定理求出 FG 即可得到 MN 。

【详解】 解：连接 AM ，延长 AM 交 CD 于 G ，连接 FG ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = CD = BC = 2\sqrt{2}$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEM = \angle GDM, \angle EAM = \angle DGM$ ，

$\because M$ 为 DE 的中点，

$\therefore ME = MD$ ，

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle GDM$ 中，

$$\begin{cases} \angle EAM = \angle DGM \\ \angle AEM = \angle GDM \\ ME = MD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle GDM$ (AAS)，

$$\therefore AM = MG, \quad AE = DG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}CD = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 N 为 AF 的中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}FG,$$

$\therefore F$ 为 BC 的中点,

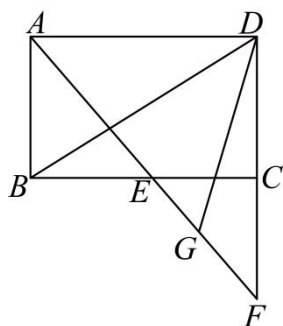
$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2},$$

$$\therefore FG = \sqrt{CF^2 + CG^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\therefore MN = 1.$$

四、综合题 (24、25 题每题 8 分, 26 题 12 分, 共 28 分)

24. 如图, 已知: 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线分别与边 BC 及边 DC 的延长线相交于点 E 、 F , G 为 EF 的中点, 连接 DG .



(1) 如果 $AB = 2$, $BC = 4$, 求 $\triangle ADG$ 的面积;

(2) 连接 BD , 求 $\angle BDG$ 的度数.

【答案】 (1) 6 (2) 45°

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质和判定、相似三角形的性质和判定、矩形、正方形的性质和判定、角平分线的定义、等腰直角三角形的性质, 熟练掌握以上知识点是解题的关键.

(1) 过 G 作 $GH \perp AD$ 于 H , 交 BC 于 M , 证明 $\triangle ABE \cong \triangle FCE$, 根据角平分线和矩形的对边平行得: $DF = AD = 4$, 并求出 CF , 由 $\triangle AGH \sim \triangle AFD$, 列比例式求 DG 的长, 代入面积公式可得结论;

(2) 证明 $\triangle BMG \cong \triangle DNG$, 推出 $\triangle BGD$ 是等腰直角三角形, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过 G 作 $GH \perp AD$ 于 H , 交 BC 于 M ,

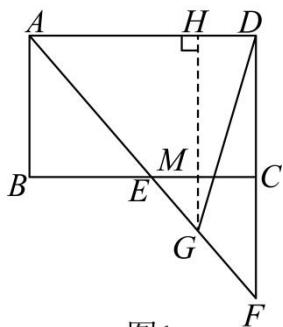


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AD = BC = 4$, $DC = AB = 2$,

$\therefore \angle BAE = \angle AFD$,

$\because AF$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAE = \angle FAD$,

$\therefore \angle AFD = \angle FAD$,

$\therefore DF = AD = 4$,

$\therefore CF = DF - DC = 4 - 2 = 2$,

$\therefore AB = CF$,

$\because \angle AEB = \angle FEC$, $\angle BAE = \angle AFD$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle FEC \\ \angle BAE = \angle AFD, \\ AB = CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCE (AAS)$,

$\therefore AE = EF$,

$\because G$ 是 EF 的中点,

$\therefore EG = GF = \frac{1}{2}EF$,

$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{3}{4}$,

$\because GH \parallel DF$,

$\therefore \triangle AGH \sim \triangle AFD$,

$\therefore \frac{GH}{DF} = \frac{AG}{AF}$,

$$\therefore \frac{GH}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore GH = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6;$$

【小问 2 详解】

解：如图，过 G 作 $GN \perp DF$ 于 N ，连接 CG ，

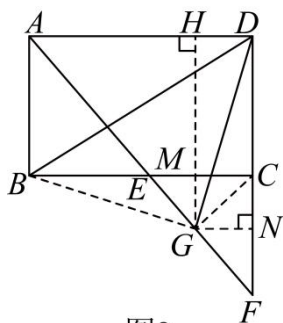


图2

$$\because \angle GHD = \angle HDN = \angle GND = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $HGND$ 是矩形,

$$\therefore DH = GN,$$

在 $Rt\triangle ECF$ 中, $\angle F = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ECF$ 是等腰直角三角形,

$\because G$ 是 EF 的中点,

$$\therefore CG \perp EF,$$

$$\because \angle F = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CGN = 45^\circ,$$

$$\therefore GN = NC,$$

$\therefore$ 四边形 $MGNC$ 是正方形,

$$\therefore GM = GN = CN = FN,$$

$$\because BC = AD = FD,$$

$$\therefore BC - CM = DF - FN,$$

即 $BM = DN$,

$$\because \angle BMG = \angle GNC = 90^\circ,$$

在 $\triangle BMG$ 和 $\triangle DNG$ 中,

$$\begin{cases} BM = DN \\ \angle BMG = \angle GNC = 90^\circ, \\ MG = GN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BMG \cong \triangle DNG (SAS),$$

$$\therefore BG = DG,$$

$$\angle BGM = \angle DGN,$$

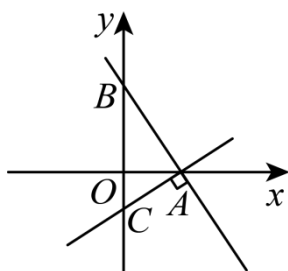
$$\therefore \angle BGM + \angle MGD = \angle DGN + \angle MGD,$$

$$\text{即 } \angle BGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BGD \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore \angle BDG = 45^\circ.$$

25. 已知直线 l_1 的解析式为 $y = -\sqrt{3}x + 3$ 与 x 轴交于点 A 与 y 轴交于点 B , 直线 l_2 过点 A 且与 l_1 垂直交 y 轴于点 C .



(1) 求出直线 l_2 的解析式.

(2) 点 D 在直线 l_2 上, 平面内是否存在点 E 使四边形 $CDBE$ 是菱形, 若存在求出点 E 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 直线 l_2 的解析式 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$

(2) 存在, $E(-2\sqrt{3}, 1)$

【解析】

【分析】 题目主要考查一次函数的相关性质, 菱形的性质, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 理解题意, 综合运用这些知识点是解题关键.

(1) 根据一次函数的解析式得出 $A(\sqrt{3}, 0), B(0, 3)$, 确定 $AB = 2\sqrt{3}$, 得出 $\angle ABO = 30^\circ, \angle CAO = 30^\circ$, 再由含 30° 度角的直角三角形的性质确定 $OC = 1$, 得出 $C(0, -1)$, 设直线 l_2 的解析式 $y = kx + b$, 利用待定系数法求解即可;

(2) 根据菱形的性质得出 BC 垂直平分 DE ，确定点 D 、 E 在直线 $y=1$ 上，然后代入 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$ ，确定

$D(2\sqrt{3},1)$ ，再由菱形的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解: $y=-\sqrt{3}x+3$

当 $x=0$ 时, $y=3$, 当 $y=0$ 时, $x=\sqrt{3}$,

$$\therefore A(\sqrt{3},0), B(0,3),$$

$$\therefore OA=\sqrt{3}, OB=3,$$

$$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{OA}{AB}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ABO=30^\circ,$$

$\therefore$ 直线 l_2 过点 A 且与 l_1 垂直交 y 轴于点 C ,

$$\therefore \angle BAC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA=60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAO=30^\circ,$$

$$\therefore AC=2OC,$$

$$\therefore AC^2-OC^2=AO^2 \text{ 即 } 3OC^2=3,$$

$$\therefore OC=1 \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore C(0,-1),$$

设直线 l_2 的解析式 $y=kx+b$,

将点 A 、 C 代入得:
$$\begin{cases} -1=b \\ \sqrt{3}k+b=0 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} b=-1 \\ k=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

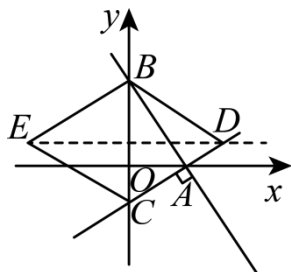
$$\therefore \text{直线 } l_2 \text{ 的解析式 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1;$$

【小问2 详解】

由 (1) 得 $C(0, -1)$, $B(0, 3)$,

$\therefore$ 四边形 $CDBE$ 是菱形,

$\therefore BC$ 垂直平分 DE ,



$\therefore$ 点 D 、 E 在线段 BC 的垂直平分线上, 即点 D 、 E 在直线 $y=1$ 上,

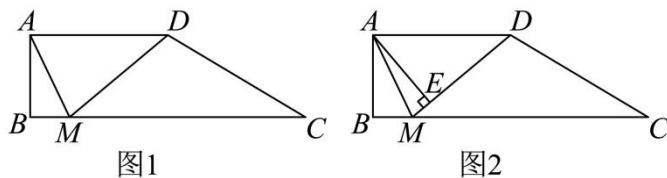
将 $y=1$ 代入 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$ 得: $x=2\sqrt{3}$,

$\therefore D(2\sqrt{3}, 1)$,

$\therefore$ 点 D 、 E 关于 BC 对称,

$\therefore E(-2\sqrt{3}, 1)$.

26. 已知, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 10$, $AD = 5$, M 是 BC 边上的任意一点, 连接 DM , 连接 AM .



(1) 若 AM 平分 $\angle BMD$, 求 BM 的长;

(2) 过点 A 作 $AE \perp DM$, 交 DM 所在直线于点 E .

① 设 $BM = x$, $AE = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式;

② 连接 BE , 当点 E 是 DM 的中点时, 求 BE 的长.

【答案】(1) 满足条件的 BM 的值为 1 或 9;

(2) ① $y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34}$; ② $BE = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 作 $DH \perp BC$ 于 H ，则四边形 $ABHD$ 是矩形，则 $AD = BH = 5$ ， $AB = DH = 3$ ，分两种情形求解即可解决问题；

(1) ① 作 $MH \perp AD$ 于 H 利用面积法构建函数关系式即可；

② 延长 AE 交 BC 于点 N ，证 $\triangle ADE \cong \triangle NME$ ，得 $MN = AD = 5$ ，再由 AE 垂直平分 DM ，知 $AM = AD = 5$ ，又 $AB = 3$ ，则 $BM = 4$ ，据此得 $BN = 9$ ， $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = 3\sqrt{10}$ ，根据 $BE = \frac{1}{2}AN$ 可得答案．

【小问 1 详解】

解：如图 1 中，作 $DH \perp BC$ 于 H ，则四边形 $ABHD$ 是矩形，

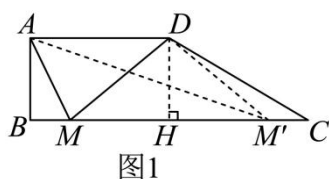


图1

$$\therefore AD = BH = 5, \quad AB = DH = 3,$$

当 MA 平分 $\angle DMB$ 时，

$$\therefore \angle AMB = \angle AMD = \angle DAM,$$

$$\therefore DA = DM = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle DMH$ 中， $DM = AD = 5$ ， $DH = 3$ ，

$$\therefore MH = \sqrt{DM^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BM = BH - MH = 1;$$

当 AM' 平分 $\angle BM'D$ 时，同法可证： $DA = DM'$ ， $HM' = 4$ ，

$$\therefore BM' = BH + HM' = 9;$$

综上所述，满足条件的 BM 的值为 1 或 9；

【小问 2 详解】

解：① 如图 2 中，作 $MH \perp AD$ 于 H ，

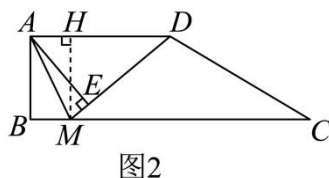


图2

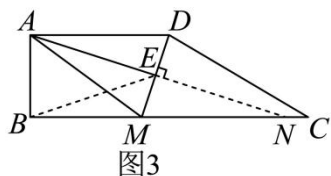
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle DMH \text{ 中, } DM = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 34},$$

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot AE,$$

$$\therefore 5 \times 3 = y \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 34},$$

$$\therefore y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34};$$

② 如图3，延长 AE 交 BC 于点 N ，



$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle MNE, \quad \angle ADE = \angle NME,$$

$\therefore E$ 是 DM 中点,

$$\therefore DE = ME,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle NME \text{ (AAS)},$$

$$\therefore MN = AD = 5,$$

$\therefore AE$ 垂直平分 DM ,

$$\therefore AM = AD = 5,$$

$$\therefore AB = 3,$$

$$\therefore BM = 4,$$

$$\therefore BN = 9,$$

$$\therefore AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AN = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定和性质，勾股定理，三角形的面积，函数解析式，垂直平分线的性质，全等三角形的判定与性质等知识，正确添加常用辅助线，构造直角三角形及掌握知识点的应用是解题的关键.