

2024 学年第二学期 5 月八年级自适应练习 数学学科

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象经过 ()

- A. 第一、二、三象限 B. 第一、三、四象限 C. 第一、二、四象限 D. 第二、三、四象限

【答案】C

【解析】

【分析】对于一次函数 $y = kx + b$, 当 $k > 0$ 时, 图象必过一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 图象必过二、四象限; 当 $b > 0$ 时, 图象必过一、二象限; 当 $b < 0$ 时, 图象必过三、四象限; 据此即可求解.

【详解】解: $\because k = -2 < 0, b = 1 > 0$

$\therefore$ 图象经过第一、二、四象限

故选: C

【点睛】本题考查根据一次函数解析式判定其图象经过的象限. 熟记相关结论即可.

2. 下列方程, 有实数解的是 ()

A. $\sqrt{x-2} + 1 = 0$

B. $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$

C. $(x+2)^4 - 1 = 0$

D. $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-3} = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】先移项, 再根据算术平方根的非负性即可判断 A; 方程两边都乘以 $x-2$, 求出 $x=2$, 再进行检验, 即可判断 B; 移项后开四次方, 即可判断 C; 根据算术平方根的非负性得出 $x-4=0$ 且 $x-3=0$, 即可判断 D.

【详解】解: A、 $\because \sqrt{x-2} + 1 = 0$,

$$\therefore \sqrt{x-2} = -1,$$

$\because \sqrt{x-2}$ 是非负数,

$\therefore$ 原方程无实数解, 故本选项不符合题意;

B、 $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$,

方程两边都乘以 $x-2$, 得 $x=2$,

检验: 当 $x=2$ 时, $x-2=0$, 所以 $x=2$ 是增根,

即原方程无实数解, 故本选项不符合题意;

C、 $\because (x+2)^4-1=0$,

$\therefore (x+2)^4=1$,

$\therefore x+2=\pm\sqrt[4]{1}$,

$\therefore x_1=-2+1=-1$, $x_2=-2-1=-3$, 即方程有实数解, 故本选项符合题意;

D、 $\because \sqrt{x-4}+\sqrt{x-3}=0$,

$\therefore x-4=0$ 且 $x-3=0$,

$\therefore x$ 不存在,

即原方程无实数解, 故本选项不符合题意;

故选: C.

【点睛】 本题考查了解无理方程, 算术平方根, 四次方根, 解分式方程等知识点, 能把无理方程转化成有理方程和把分式方程转化成整式方程是解此题的关键.

3. 如果 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$, 那么下列结论中正确的是 ()

A. $|\overrightarrow{EN}| = |\overrightarrow{FM}|$

B. $\overrightarrow{EM}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 是相等向量

C. $\overrightarrow{EN}$ 与 $\overrightarrow{MF}$ 是相反向量

D. $\overrightarrow{EN}$ 与 $\overrightarrow{MF}$ 是平行向量

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面向量, 解题的关键是根据题意判定四边形 $EMNF$ 是平行四边形. 根据已知条件可以判定四边形 $EMNF$ 是平行四边形, 结合平行四边形的性质和相等向量、平行向量的定义作出判断.

【详解】 解: $\because \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$,

$\therefore |\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{MN}|$, $EF \parallel MN$,

$\therefore$ 四边形 $EMNF$ 是平行四边形.

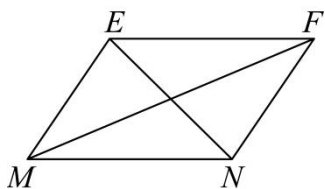
A、当平行四边形 $EMNF$ 是矩形时, $EN = FM$, 该结论才成立, 故不符合题意;

B、由四边形 $EMNF$ 是平行四边形得到: $EM = FN$, 且 $EM \parallel FN$, 则 $\overrightarrow{EM}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 是相等向量, 故符合题意;

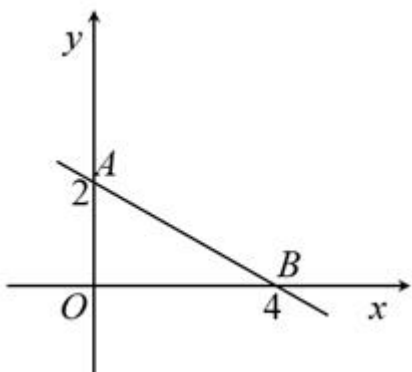
C、如图所示, $\overrightarrow{EN}$ 与 $\overrightarrow{MF}$ 不是相反向量, 故不符合题意;

D、如图所示, $\overrightarrow{EN}$ 与 $\overrightarrow{MF}$ 不是平行向量, 故不符合题意.

故选: B.



4. 如图，函数 $y = kx + b$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别相交于点 $A(0, 2)$ 和点 $B(4, 0)$ ，则关于 x 的不等式 $kx + b \geq 2$ 的解集为 ()



- A. $x \leq 0$ B. $x \leq 4$ C. $x \geq 0$ D. $x \geq 4$

【答案】A

【解析】

【分析】结合函数图象可得 $kx + b \geq 2$ 表示函数图象上的点要在 $(0, 2)$ 的上方，再根据图象可得答案.

【详解】解： $\because$ 直线 $y = kx + b$ 和 y 轴的交点是 $A(0, 2)$,

$\therefore$ 不等式 $kx + b \geq 2$ 的解集是 $x \leq 0$,

故选：A.

【点睛】本题主要考查了一次函数的图象解一元一次不等式，解题时应结合函数图象和不等式的关系找出正确的答案.

5. 下列图形中，是中心对称但不是轴对称图形的是 ()

- A. 菱形 B. 矩形 C. 等腰梯形 D. 平行四边形

【答案】D

【解析】

【分析】根据中心对称图形及轴对称图形的概念逐一判断即可.

【详解】解：A、菱形既是中心对称图形，也是轴对称图形，故 A 错误；

B、矩形既是中心对称图形，也是轴对称图形，故 B 错误；

C、等腰梯形是轴对称图形，但不是中心对称图形，故 C 错误；

D、平行四边形是中心对称但不是轴对称图形，故 D 正确，

故答案为: D.

【点睛】 本题考查了中心对称图形及轴对称图形的概念, 掌握基本概念是解题的关键.

6. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AC = BD$, 下列判断中的正确的是 ()

- A. 如果 $BC = AD$, 那么四边形 $ABCD$ 是等腰梯形
- B. 如果 $AD \parallel BC$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形
- C. 如果 AC 平分 BD , 那么四边形 $ABCD$ 是矩形
- D. 如果 $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是正方形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理进行判断即可.

- 【详解】 解: A. 如果 $BC=AD$, 那么四边形 $ABCD$ 可能是等腰梯形, 也可能是矩形, 错误;
- B. 如果 $AD \parallel BC$, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形, 错误;
- C. 如果 AC 平分 BD , 那么四边形 $ABCD$ 是矩形, 正确;
- D. 如果 $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 不一定是正方形, 错误;

故选: C.

【点睛】 此题考查等腰梯形的判定, 关键是根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理解答.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 已知直线 $y = ax + b$ 平行于直线 $y = 2x - 1$, 且在 y 轴上的截距是 3, 那么这条直线的解析式是_____.

【答案】 $y = 2x + 3$

【解析】

【分析】 根据互相平行的直线的解析式的一次项系数的值相等确定出 a , 根据在 y 轴上的截距为 3, 计算出 b 值, 即可得解.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = ax + b$ 平行于直线 $y = 2x - 1$,

$$\therefore k = 2,$$

又 $\because$ 直线 $y = ax + b$ 在 y 轴上的截距为 3,

$$\therefore b = 3,$$

$\therefore$ 这条直线的解析式是: $y = 2x + 3$.

故答案是: $y = 2x + 3$.

【点睛】 此题考查两条直线平行问题, 解题关键在于确定 k 的值.

8. 已知关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 0$ 是二项方程, 那么 $m =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了二项方程的定义, 根据关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 0$ 是二项方程, 即不含 mx 这一项, 可得 $m = 0$.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 0$ 是二项方程,

$\therefore m = 0$.

故答案为: 0.

9. 如果过多边形的一个顶点共有 6 条对角线, 那么这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 1260°

【解析】

【分析】 从多边形一个顶点可作 6 条对角线, 则这个多边形的边数是 9, n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 代入公式就可以求出内角和.

【详解】 解: $\because$ 过多边形的一个顶点共有 6 条对角线,

故该多边形边数为 9,

$\therefore (9-2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ$,

$\therefore$ 这个多边形的内角和为 1260° .

故答案为: 1260° .

【点睛】 本题主要考查了多边形的内角和公式, 是需要熟记的内容, 比较简单.

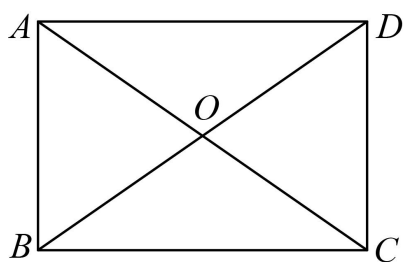
10. 矩形的两条对角线的夹角为 60° , 一条对角线与较短边的和为 6. 则较长边为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据四边形 $ABCD$ 是矩形, 得到 $OA = OC$, $OB = OD$, $AC = BD$, 推出 $OA = OB$, 根据等边三角形的判定得出 $\triangle OAB$ 是等边三角形, 即可求出 AB 长, 再运用勾股定理求解即可.

【详解】 解: 如图,



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $OA = OC$, $OB = OD$, $AC = BD$,

∴ $OA = OB$,

∴ $\angle AOB = 60^\circ$,

∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形,

∴ $AB = OB = OA = \frac{1}{3} \times 6 = 2$,

由勾股定理得: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3} > 2$,

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查对矩形的性质, 等边三角形的性质和判定、勾股定理等知识点的理解和掌握, 能根据性质得到等边三角形 OAB 是解此题的关键.

11. 用换元法解方程 $\frac{x^2-2}{x} + \frac{2x}{x^2-2} = 5$, 如果设 $y = \frac{x^2-2}{x}$, 则原方程可化为 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 5y + 2 = 0$

【解析】

【分析】 设 $y = \frac{x^2-2}{x}$, 则 $\frac{2x}{x^2-2} = \frac{2}{y}$, 根据换元法解答即可, 注意最后的形式是整式方程.

【详解】 解: 设 $y = \frac{x^2-2}{x}$, 则原方程可变形为: $y + \frac{2}{y} = 5$,

即为 $y^2 - 5y + 2 = 0$;

故答案为: $y^2 - 5y + 2 = 0$

【点睛】 本题考查了换元法解方程, 正确变形是关键.

12. 若一次函数 $y = (k+1)x + 2k - 4$ 的图像不经过第二象限, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $-1 < k \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了根据一次函数的图象不经过第二象限列出关于 k 的不等式组, 求出 k 的取值范围即可.

【详解】 解: ∵ 一次函数 $y = (k+1)x + 2k - 4$ 的图形不经过第二象限,

$$\therefore \begin{cases} k+1 > 0 \\ 2k-4 \leq 0 \end{cases},$$

解得: $-1 < k \leq 2$.

故答案为: $-1 < k \leq 2$.

13. 我们古代《四元玉鉴》中记载“二果问价”问题, 其内容如下: “九百九十九文钱, 甜果苦果共买千, 甜果九个十一文, 苦果七个四文钱, 试问甜苦果几个, 又问各该几个钱?” 如果设买甜果 x 个, 买苦果 y 个, 那么列出的关于 x, y 的二元一次方程组是_____.

【答案】
$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$$

【解析】

【分析】由甜果苦果共买千可得出 $x + y = 1000$, 利用总价 = 单价 $\times$ 数量可得出 $\frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999$, 联立两方程组成方程组即可得出结论.

【详解】解: $\because$ 甜果苦果共买千,

$$\therefore x + y = 1000;$$

$\because$ 甜果九个十一文, 苦果七个四文钱, 且购买两种果共花费九百九十九文钱,

$$\therefore \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999.$$

联立两方程组成方程组
$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}.$$

故答案为:
$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组, 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组是解题的关键.

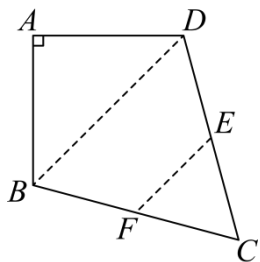
14. 如果四边形有一组邻边相等, 且一条对角线平分这组邻边的夹角, 我们把这样的四边形称为“准菱形”. 有一个四边形是“准菱形”, 它相等的邻边长为 2, 这两条边的夹角是 90° , 那么这个“准菱形”的另外一组邻边的中点间的距离是_____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】如图, 由勾股定理求出 BD , 再根据三角形中位线定理求出 EF 的长即可.

【详解】解: 如图所示, 四边形 $ABCD$ 是“准菱形”, 且 $AB = AD$, $\angle BAD = 90^\circ$, 连接 BD ,



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\because$ 点 E, F 分别是 CD, BC 边的中点,

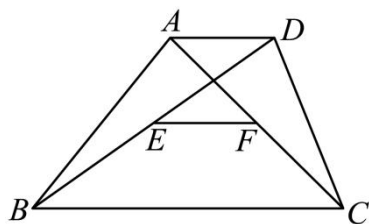
$\therefore EF$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2},$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查了勾股定理以及三角形中位线定理, 正确理解“准菱形”的概念是解答本题的关键.

15. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$. 点 E, F 分别是对角线 BD, AC 的中点, 如果 $AD = 2$, $EF = 3$, 那么 $BC =$ _____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 取 CD 的中点 G , 连接 FG, EG , 可证 $FG \parallel BC$, 所以 $BC = 2EG, AD = 2FG$, 于是 $BC = 2EF + AD = 8$.

【详解】 解: 取 CD 的中点 G , 连接 FG, EG , 则 $FG \parallel AD, EG \parallel BC$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore FG \parallel BC$.

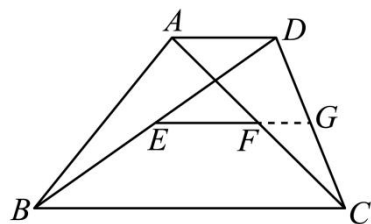
$\therefore E, F, G$ 三点共线.

$\therefore BC = 2EG, AD = 2FG$.

$\therefore BC - AD = 2(EG - FG) = 2EF$.

$\therefore BC = 2EF + AD = 2 \times 3 + 2 = 8$.

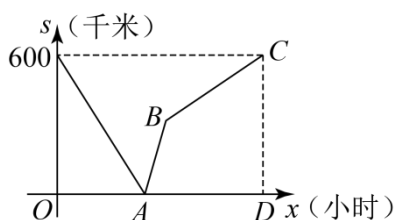
故答案为：8



【点睛】本题考查中位线的性质，平行线的性质，由中位线的性质得到线

段间的数量关系是解题的关键.

16. 一辆客车从甲地驶往乙地，同时一辆私家车从乙地驶往甲地. 两车之间的距离 s (千米) 与行驶的时间 x (小时) 之间的函数关系如图所示. 已知私家车的速度是 90 千米/时，客车的速度是 60 千米/时，那么点 A 的坐标是_____.



【答案】(4,0)

【解析】

【分析】观察图象得：点 A 的实际意义是两车此时相遇，甲乙两地之间的距离为 600 千米，再根据两车行驶的路程之和等于 600 千米，即可求解.

【详解】解：观察图象得：点 A 的实际意义是两车此时相遇，

甲乙两地之间的距离为 600 千米，

因为私家车的速度是 90 千米/时，客车的速度是 60 千米/时，

$$\therefore 90x + 60x = 600,$$

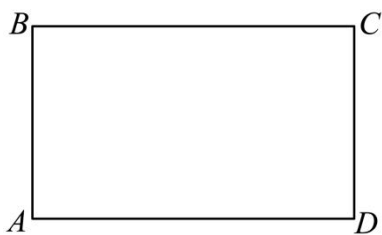
解得 $x = 4$,

$\therefore$ 点 A 的坐标是 (4,0).

故答案为：(4,0)

【点睛】本题主要考查了函数图象，明确题意准确从函数图象获取信息是解题的关键.

17. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转，点 D 落在 BC 边上点 E 处，将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折，点 B 落在平面内的点 F 处，那么 $\triangle AEF$ 和梯形 $AECD$ 重叠部分的面积为_____.

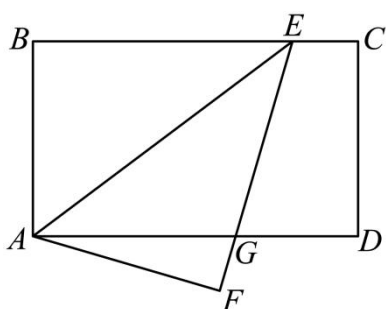


【答案】 $\frac{75}{4}$ 或 $18\frac{3}{4}$ 或 18.75

【解析】

【分析】 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，利用勾股定理求得 BE 的长，利用折叠的性质求得 $GA = GE$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，利用勾股定理列方程，计算即可求解。

【详解】解：设 EF 与 AD 相交于点 G ，



$\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle EAD$ ， $AE = AD = BC = 10$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $BE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ，

由折叠的性质得 $BE = EF = 8$ ， $AF = AB = 6$ ， $\angle GEA = \angle BEA$ ，

$\therefore \angle EAD = \angle GEA$ ，

$\therefore GA = GE$ ，

设 $GA = GE = x$ ，则 $GF = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AG^2 = AF^2 + GF^2$ ，即 $x^2 = 6^2 + (8 - x)^2$ ，

解得 $x = \frac{25}{4}$ ，即 $GA = \frac{25}{4}$ ，

$\therefore \triangle AEF$ 和梯形 $AECD$ 重叠部分的面积为 $\frac{1}{2} AG \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} \times 6 = \frac{75}{4}$ ，

故答案为： $\frac{75}{4}$ 。

【点睛】 本题考查了折叠的性质，折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。也考查了矩形的性质。

18. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ($AD < BC$)， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $CD = 3$ ，过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交

边 BC 于点 E ，过点 A 作 $AF \perp DE$ 交边 BC 于点 F ，交射线 DE 于点 P 。连接 DF ，当 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{5} S_{\text{梯形}ABCD}$ 时，求边 AD 的长为_____。

【答案】 $\frac{17\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{23\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】本题属于四边形综合题，含 30° 度的直角三角形的相关计算，勾股定理，平行四边形的判定和性质，三角形的面积等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会利用参数构建方程解决问题。分两种情形：当点 P 在梯形内部时，当点 P 在梯形外部时，分别画出图形，构建方程求解即可。

【详解】解： $\because AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形，

$$\therefore AD = BE, \quad ED = AB,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

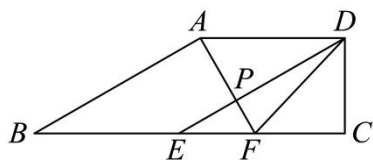
$$\therefore \angle DEC = \angle B = 30^\circ,$$

$$\because CD = 3,$$

$$\therefore DE = 2CD = 6,$$

$$\therefore CE = \sqrt{ED^2 - CD^2} = 3\sqrt{3},$$

如图，当点 P 在梯形内部时，设 $AD = m$ 。



则 $AD = BE = m$ ，

$$\because AF \perp DE,$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 30^\circ, \quad AB = DE = 6,$$

$$\therefore BF = 2AF,$$

$$\therefore BF^2 - AF^2 = AB^2,$$

$$\text{即 } BF^2 - \left(\frac{1}{2}BF\right)^2 = 6^2,$$

解得: $BF = 4\sqrt{3}$, 负值舍去,

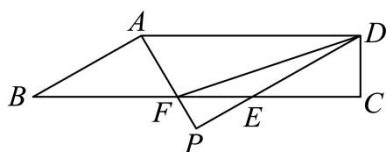
$$\therefore BC = BE + CE = m + 3\sqrt{3}, \quad EF = BF - BE = 4\sqrt{3} - m,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{5} S_{\text{梯形}ABCD}, \quad \text{即} \frac{1}{2} EF \cdot CD = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (4\sqrt{3} - m) \times 3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} (m + m + 3\sqrt{3}) \times 3,$$

$$\text{解得: } m = \frac{17\sqrt{3}}{7};$$

当点 P 在梯形外部时, 设 $AD = m$.



则 $BE = AD = m$,

$$\therefore AF \perp DE,$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ, \quad AB = DE = 6,$$

$$\therefore BF = 2AF,$$

$$\therefore BF^2 - AF^2 = AB^2,$$

$$\text{即 } BF^2 - \left(\frac{1}{2}BF\right)^2 = 6^2,$$

解得: $BF = 4\sqrt{3}$, 负值舍去,

$$\therefore BC = BE + CE = m + 3\sqrt{3}, \quad EF = BE - BF = m - 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{5} S_{\text{梯形}ABCD}, \quad \text{即} \frac{1}{2} EF \cdot CD = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (m - 4\sqrt{3}) \times 3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} (m + m + 3\sqrt{3}) \times 3$$

$$\text{解得: } m = \frac{23\sqrt{3}}{3};$$

综上所述, 满足条件的 AD 长为 $\frac{17\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{23\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{17\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{23\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19、20 题每题 6 分, 第 21 题每题 7 分, 第 22、23 题每题 9 分, 第 24 题 10 分, 第 25 题 11 分, 满分 58 分)

19. 解方程: $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】 方程两边同时乘以 $(x+2)(x-2)$ 得到关于 x 的一元二次方程, 解一元二次方程, 最后检验即可求解.

【详解】 解: $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$

方程两边同时乘以 $(x+2)(x-2)$ 得,

$$x(x-2) + (x+2)^2 = 8$$

$$\therefore x^2 - 2x + x^2 + 4 + 4x = 8$$

$$\text{即 } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\therefore (x+2)(x-1) = 0$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, x_2 = -2$$

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $(x+2)(x-2) = 0$, 不合题意,

$$\therefore x = 1$$

【点睛】 本题考查了解分式方程, 解一元二次方程, 去分母把分式方程化为一元二次方程是解题的关键.

20. 解方程组: $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0 & \text{①} \\ x + y = 4 & \text{②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = -4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 由②得: $y=4-x$ ③, 把③代入①得: $x^2-x(4-x)-6(4-x)^2=0$, 解得 $x_1=8$, $x_2=3$, 即可得到方程组的解.

【详解】 解: 由②得: $y=4-x$ ③,

把③代入①得: $x^2 - x(4-x) - 6(4-x)^2 = 0$,

整理得 $x^2 - 11x + 24 = 0$,

解得 $x_1 = 8$, $x_2 = 3$,

当 $x_1 = 8$ 时, $y = 4 - 8 = -4$,

当 $x_2 = 3$ 时, $y = 4 - 3 = 1$,

∴ 方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = -4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查解二元二次方程组, 解题的关键是用代入消元法, 把二元二次方程组转化为一元二次方程.

21. 上海轨道交通 23 号线全长约 28.6 公里, 共设 22 座站. 该线路串联了闵行开发区、紫竹高新、吴泾、徐汇滨江等区域, 途经闵行区和徐汇区两区. 甲乙两个工程队修建地铁 23 号线. 如果甲乙两队合作, 48 个月可以完成建设工程; 如果甲队单独做 40 个月后, 剩下的工程由乙队独做, 还需 60 个月才能完成建设工程. 甲乙两队单独完成地铁 23 号线的修建各需要几个月?

【答案】 甲队单独做需 80 个月, 乙队单独做需 120 个月

【解析】

【分析】 设甲队单独做需 a 个月, 乙队单独做需 b 个月, 根据甲工效+乙工效 $= \frac{1}{48}$, 甲工效 $\times 40$ + 乙工效 $\times 60 = 1$ 进行列式求解即可.

【详解】 解: 设甲队单独做需 a 个月, 乙队单独做需 b 个月,

根据题意, 得: $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{48} \\ \frac{40}{a} + \frac{60}{b} = 1 \end{cases}$,

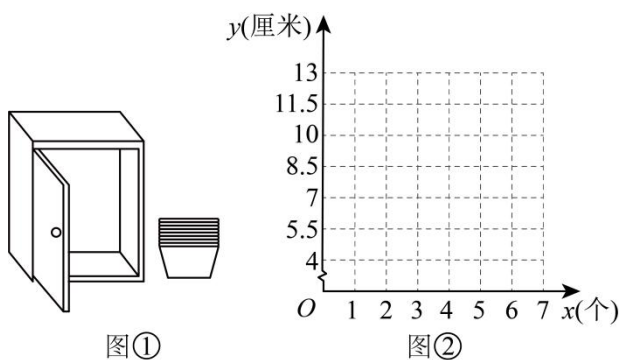
解得: $\begin{cases} a = 80 \\ b = 120 \end{cases}$

经检验 $a = 80$, $b = 120$ 是原方程组的解.

故甲队单独做需 80 个月, 乙队单独做需 120 个月.

【点睛】 本题主要考查了分式方程的应用, 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 列出方程组, 再求解.

22. 小丽在帮妈妈整理厨房时, 想把一些规格相同的碗尽可能多地放入内侧高为 35cm 的柜子里. 她把碗按如图那样整齐地叠放成一摞 (如图①), 但她不知道一摞最多叠放几个碗可以一次性放进柜子里.



【探究发现】小丽测量后发现，按这样叠放，这摞碗的总高度随着碗个数的变化而变化，记录的数据如下表：

碗的个数 x (个)	1	2	3	4	5
这摞碗的总高度 y (厘米)	5.5	7	8.5	10	11.5

【建立模型】

- (1) 建立平面直角坐标系，如图②，横轴表示碗的个数 x ，纵轴表示这摞碗的总高度 y ，请根据表中信息描出对应点；
- (2) 观察上述各点的分布规律，判断它们是否在同一条直线上，如果在同一条直线上，求出这条直线所对应的函数表达式，如果不在同一条直线上，说明理由；

【结论应用】应用上述发现的规律计算：

- (3) 当碗的个数量为 12 个时，求这摞碗的总高度。
- (4) 请帮小丽算一算，一摞最多能叠几个碗可以一次性放进柜子里？

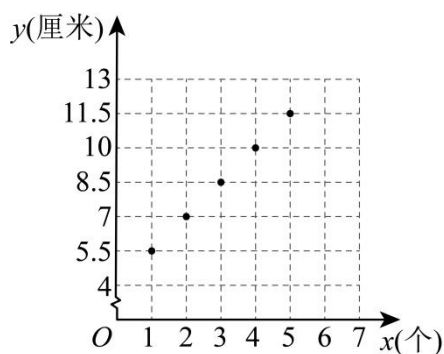
【答案】(1) 见解析；(2) 它们在同一条直线上； $y = 1.5x + 4$ ；(3) 22 厘米；(4) 一摞最多能叠 20 个碗可以一次性放进柜子里

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的应用，求一次函数解析式，画一次函数图象，解题的关键是熟练掌握待定系数法。

- (1) 根据表格中数据描点即可；
- (2) 用待定系数法求出函数解析式即可；
- (3) 把 $x = 12$ 代入函数解析式，求出 y 的值即可；
- (4) 把 $y = 35$ 代入函数解析式，求出 x 的值，得出答案即可。

【详解】解：(1) 描点如图所示：



(2) 这些点在一条直线上.

设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$).

将点 $(1, 5.5)$ 、 $(2, 7)$ 代入, 得:

$$\begin{cases} 5.5 = k + b \\ 7 = 2k + b \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} k = 1.5 \\ b = 4 \end{cases}$,

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y = 1.5x + 4$.

(3) 把 $x = 12$ 代入 $y = 1.5x + 4$ 得: $y = 1.5 \times 12 + 4 = 22$,

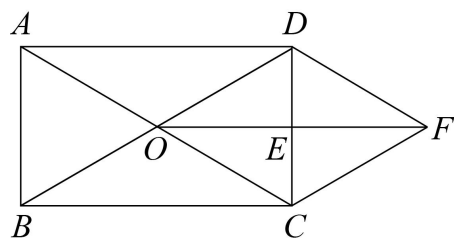
$\therefore$ 当碗的个数为 12 个时, 这摞碗的总高度为 22 厘米.

(4) 把 $y = 35$ 代入 $y = 1.5x + 4$ 得: $35 = 1.5x + 4$,

解得: $x = \frac{62}{3}$,

$\therefore$ 一摞最多能叠 20 个碗可以一次性放进柜子里.

23. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , E 为 CD 的中点, 连接 OE 并延长至点 F , 使 $EF = EO$, 连接 DF 、 CF .



(1) 求证: 四边形 $DOCF$ 是菱形;

(2) 已知 $AB = 6$, $\angle DOE = 30^\circ$, 求 AC 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 12

【解析】

【分析】(1) 首先证明四边形 $DOCF$ 是平行四边形, 再由 $OD = OC$ 即可推出四边形 $DOCF$ 是菱形;

(2) 由菱形性质可得 $OF \perp DC$, $DE = EC = \frac{1}{2}DC$, 利用直角三角形中 30° 角所对边是斜边的一半求出 $DE = \frac{1}{2}OD$, 利用矩形性质推出 $AC = BD = 2OD$, 即可得出最后结果.

【小问 1 详解】

证明: $\because E$ 为 CD 的中点,

$$\therefore ED = CD,$$

在 $\triangle OED$ 和 $\triangle FEC$ 中,

$$\begin{cases} ED = CD \\ \angle OED = \angle FEC, \\ EF = EO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OED \cong \triangle FEC (\text{SAS}),$$

$$\therefore OD = FC, \quad \angle DOE = \angle CEF,$$

$$\therefore OD \parallel FC,$$

$\therefore$ 四边形 $DOCF$ 为平行四边形,

$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O ,

$$\therefore OD = OC,$$

$\therefore$ 四边形 $DOCF$ 为菱形;

【小问 2 详解】

由 (1) 可知四边形 $DOCF$ 为菱形,

$$\therefore OF \perp DC, \quad DE = EC = \frac{1}{2}DC,$$

$$\therefore \angle DEO = 90^\circ,$$

$$\because \angle DOE = 30^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}OD,$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore OD = CD = AB = 6,$$

$$\therefore AC = BD = 2OD = 12.$$

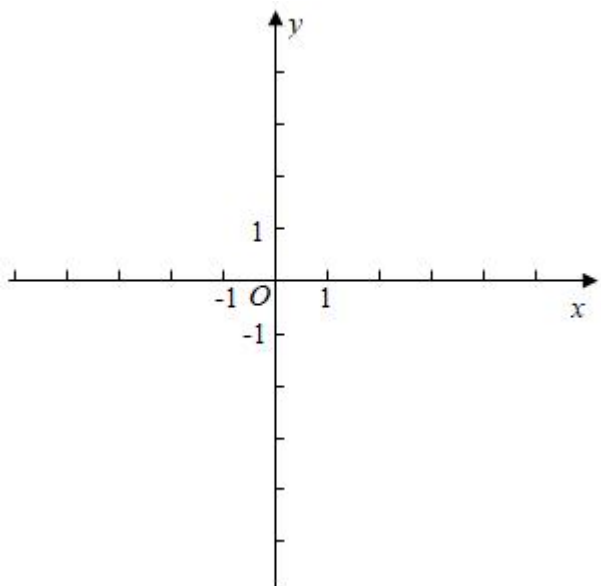
【点睛】 本题考查了全等三角形的判定与性质, 平行四边形的判定与性质, 菱形的判定与性质, 矩形的性

质，利用三角形全等推出四边形 $DOCF$ 为平行四边形是解答本题的关键.

24. 如图，已知在平面直角坐标系中，直线 $y = kx + 2$ 和双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 都经过点 $A(1, 4)$ 和点 B .

(1) 求线段 AB 的长；

(2) 如果点 P 在 y 轴上，点 Q 在此双曲线上，当以 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时，直接写出 P 、 Q 的坐标.



【答案】 (1) $3\sqrt{5}$ ； (2) $P(0, -1)$ ， $Q(\frac{4}{3}, 3)$ 或 $P(0, -\frac{14}{3})$ ， $Q(3, \frac{4}{3})$ 或 $P(0, \frac{14}{3})$ ， $Q(-3, -\frac{4}{3})$.

【解析】

【分析】 (1) 将点 A 的坐标代入直线和双曲线的解析式中，求出直线和双曲线的解析式，再联立求解得出点 B 坐标，最后用两点间距离公式求解，即可得出结论；

(2) 设 $Q(q, \frac{4}{q})$ ， $P(0, p)$ ，分三种情况，利用平行四边形的对角线互相平分建立方程组求解，即可得出结论.

【详解】 解：(1) $\because$ 点 $A(1, 4)$ 在直线 $y = kx + 2$ 上，

$$\therefore k + 2 = 4.$$

$$\therefore k = 2,$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = 2x + 2 \text{ ①},$$

$\because$ 点 $A(1, 4)$ 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上，

$$\therefore m = 1 \times 4 = 4,$$

$\therefore$ 双曲线的解析式为 $y = \frac{4}{x}$ ②,

联立①②解得, $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$,

$\therefore B(-2, -2)$,

$\therefore A(1, 4)$,

$\therefore AB = \sqrt{(1+2)^2 + (4+2)^2} = 3\sqrt{5}$;

(2) 由 (1) 知, 双曲线的解析式为 $y = \frac{4}{x}$,

$\therefore$ 点 Q 在双曲线上,

$\therefore$ 设 $Q(q, \frac{4}{q})$,

$\therefore$ 点 P 在 y 轴上,

$\therefore$ 设 $P(0, p)$,

由 (1) 知, $B(-2, -2)$,

$\therefore$ 以 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形,

$\therefore$ ①当 AB 与 PQ 为对角线时,

$\therefore \frac{1}{2}(1-2) = \frac{1}{2}(0+q), \quad \frac{1}{2}(4-2) = \frac{1}{2}(p+\frac{4}{q})$,

$\therefore q = -1, \quad p = 6$,

$\therefore P(0, 6), \quad Q(-1, -4)$,

②当 AP 与 BQ 是对角线时,

$\therefore \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}(-2+q), \quad \frac{1}{2}(4+p) = \frac{1}{2}(-2+\frac{4}{q})$,

$\therefore q = 3, \quad p = -\frac{14}{3}$,

$\therefore P(0, -\frac{14}{3}), \quad Q(3, \frac{4}{3})$,

③当 AQ 与 BP 是对角线时,

$\therefore \frac{1}{2}(1+q) = \frac{1}{2}(-2+0), \quad \frac{1}{2}(4+\frac{4}{q}) = \frac{1}{2}(-2+p)$,

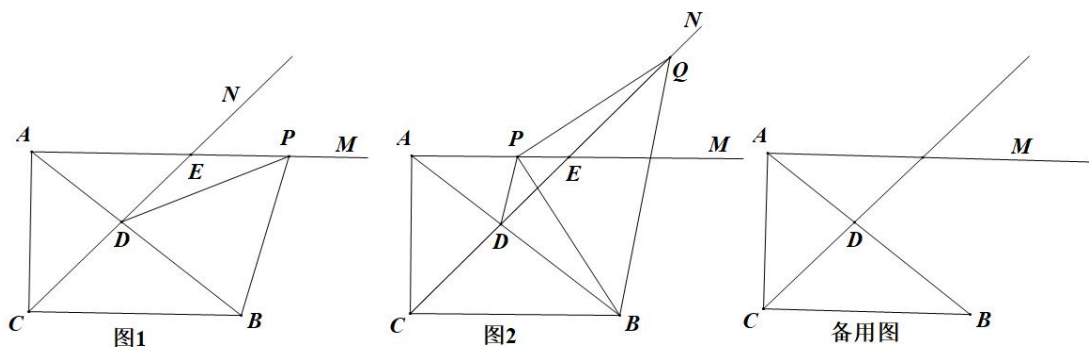
$$\therefore p = \frac{14}{3}, \quad q = -3,$$

$$\therefore P(0, \frac{14}{3}), \quad Q(-3, -\frac{4}{3}),$$

即满足条件的点 P, Q 的坐标分别为 $P(0, 6), Q(-1, -4)$ 或 $P(0, -\frac{14}{3}), Q(3, \frac{4}{3})$ 或 $P(0, \frac{14}{3}), Q(-3, -\frac{4}{3})$.

【点睛】此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，两点间的距离公式，平行四边形的性质，用方程组的思想解决问题是解本题的关键.

25. 如图 1, 已知 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, 射线 $AM \parallel BC$, 射线 CN 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D , 交 AM 于点 E , P 是射线 AM 上的动点.



(1) 求线段 AE 的长; (2) 连结 PD, BP .

①若 $AB = AP$, 求 BP 的长.

②如图 2, 若点 Q 是射线 CN 上的动点, 当 BPQ 是以 BP 为直角边的等腰直角三角形时, 求出 AP 的长.

【答案】(1) $AE = 6$; (2) ① $PB = 2\sqrt{10}$; ② 4 或 10.

【解析】

【分析】(1) 由平分线的定义证明 $\angle ACE = \angle BCE$, 再由平行线的性质证明 $\angle AEC = \angle BCE$, 从而可得 $\angle AEC = \angle ACE$, 可得 $AC = AE$, 于是可得答案;

(2) ①如图, 过 B 作 $BF \perp AM$ 于 F , 证明四边形 $ACBF$ 为矩形, $BF = AC = 6$, $AF = CB = 8$, 再求解 $AP = 10$, $PF = 2$, 利用勾股定理可得答案; ②分两种情况讨论, 如图 2, BPQ 为等腰直角三角形, $BP = QP$, 作 $BF \perp AM$ 于 F , 作 $QG \perp AM$ 于 G , 证明 $\triangle PFB \cong \triangle QGP$, 可得 $PF = QG$, $BF = PG$, 再证明 $AP = PF$, 即可得到答案, 如图 3, $\triangle PBQ$ 为等腰直角三角形, $PB = QB$, 过 Q 作 $QF \perp CB$ 于 F , 过 P 作 $PG \perp CB$ 于 G , 证明 $QF = BG = 2$, 从而可得答案.

【详解】解: (1) $\because CN$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ACE = \angle BCE,$$

$$\therefore AM \parallel BC$$

$$\therefore \angle AEC = \angle BCE,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACE,$$

$$\therefore AC = AE,$$

$$\because AC = 6,$$

$$\therefore AE = 6.$$

(2) ①如图 1, 过 B 作 $BF \perp AM$ 于 F ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AM \parallel CB,$$

$$\therefore \angle CAM = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ACBF$ 为矩形,

$$\therefore BF = AC = 6, AF = CB = 8,$$

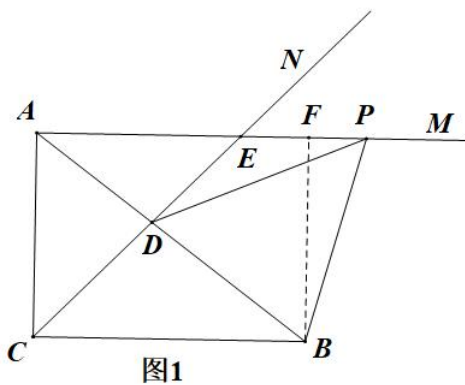
$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 6, BC = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\because AP = AB = 10,$$

$$\therefore PF = 2,$$

$$\therefore PB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$



②如图 2, 作 $BF \perp AM$ 于 F , 作 $QG \perp AM$ 于 G ,

$$\therefore \angle PFB = \angle QGP = 90^\circ,$$

$\because \triangle BPQ$ 为等腰直角三角形, $BP = QP$,

$$\therefore \angle BPF + \angle QPG = 90^\circ = \angle BPF + \angle PBF,$$

如图 3, $\because \triangle PBQ$ 为等腰直角三角形, $PB = QB$,

过 Q 作 $QF \perp CB$ 于 F , 过 P 作 $PG \perp CB$ 于 G ,

同理可得: $\triangle BFQ \cong \triangle PGB$,

$\therefore BF = PG = 6, FQ = GB$,

$\because CB = 8$,

$\therefore FC = 2$,

同理 $\triangle FCQ$ 为等腰直角三角形,

$\therefore QF = BG = 2$,

$\therefore AP = CG = CB + BG = 8 + 2 = 10$.

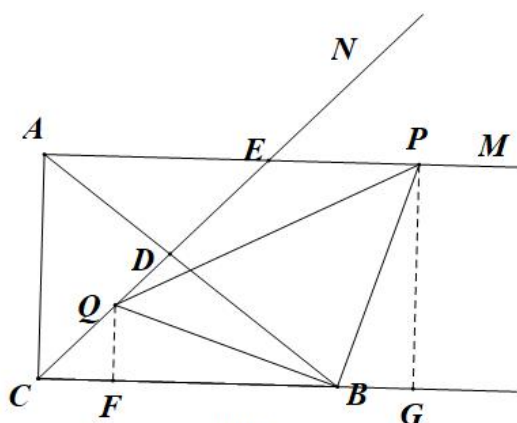


图3

综上: $AP = 4$ 或 $AP = 10$

【点睛】 本题考查的是角平分线的定义, 平行线的性质, 等腰三角形的判定, 勾股定理的应用, 等腰直角三角形的判定与性质, 三角形全等的判定与性质, 矩形的判定与性质, 掌握以上知识是解题的关键.