

2024 学年八年级第二学期 3 月数学节点作业

一、选择题 (每小题 2 分, 共 12 分)

1. 下列函数中, 是一次函数的是 ()

- A. $y = x^2 + 2$ B. $y = \frac{1}{x} + 2$ C. $y = kx + 2$ D. $y = x + 2$

【答案】D

【解析】

【分析】一般地, 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数叫做一次函数, 据此进行判断即可.

【详解】解: A. $y = x^2 + 2$, 不是一次函数, 故 A 不符合题意;

B. $y = \frac{1}{x} + 2$, 不是一次函数, 故 B 不符合题意;

C. $y = kx + 2$, $k = 0$ 时不是一次函数, 故 C 不符合题意;

D. $y = x + 2$, 是一次函数, 故 D 符合题意;

故选: D.

【点睛】此题主要考查了一次函数的定义, 正确把握一次函数的定义是解题的关键.

2. 已知在四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , 那么下列条件中能判定这个四边形是正方形的是 ()

- A. $AC = BD$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$ B. $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$
C. $AO = BO = CO = DO$, $AC \perp BD$ D. $AO = CO$, $BO = DO$, $AB = BC$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的知识点是正方形的判定, 解题关键是熟练掌握正方形的判定方法.

根据正方形的判定: 对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形进行分析从而得到最后的答案.

【详解】解: A 选项, 不能, 只能判定为矩形, A 选项错误;

B 选项, 不能, 只能判定为平行四边形, B 选项错误;

C 选项, 能, 可判定为正方形, C 选项正确;

D 选项, 不能, 只能判定为菱形, D 选项错误.

故选: C.

3. 如果函数 $y = kx + 2$ 的图像不经过第三象限, 那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 0$ B. $k \geq 0$ C. $k < 0$ D. $k \leq 0$

【答案】D

【解析】

【分析】先判断出一次函数图像经过第一、二、四象限, 则说明 x 的系数不大于 0, 由此即可确定题目 k 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 函数 $y = kx + 2$ 的图像不经过第三象限,

$\therefore$ 当 $k=0$ 时, $y=2$, 直线经过第一、二象限

当 $k < 0$ 时, 一次函数 $y=kx+2$ 的图像经过第一、二、四象限,

$\therefore k \leq 0$.

故选: D.

【点睛】本题主要考查一次函数图像在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 解答本题注意理解: 直线 $y=kx+b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限; $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限; $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交; $b=0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

4. “五一”期间, 某中学数学兴趣小组的同学们租一辆小型巴士前去某地进行社会实践活动, 租车租价为 180 元. 出发时又增加了两位同学, 结果每位同学比原来少分摊了 3 元车费. 若小组原有 x 人, 则所列方程为 ()

- A. $\frac{180}{x+2} - \frac{180}{x} = 3$ B. $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+2} = 3$ C. $\frac{180}{x} - \frac{180}{x-2} = 3$ D. $\frac{180}{x-2} - \frac{180}{x} = 3$

【答案】B

【解析】

【分析】设小组原有 x 人, 则原有的几名同学每人分担的车费为: $\frac{180}{x}$ 元, 出发时每名同学分担的车费为: $\frac{180}{x+2}$, 根据每个同学比原来少分摊了 3 元车费即可得到等量关系.

【详解】解: 设小组原有 x 人,

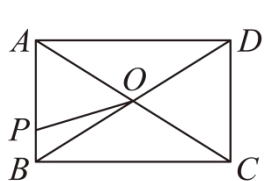
根据题意可得: $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+2} = 3$,

故选: B.

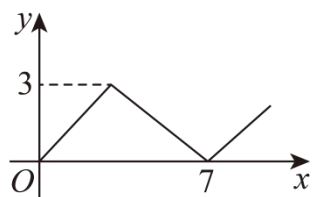
【点睛】本题主要考查了分式方程的应用, 解题的关键是首先弄清楚题意, 根据关键描述语, 找到合适的等量关系.

5. 如图①, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB < AD$, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 动点 P 由点 A 出发, 沿

$AB \rightarrow BC \rightarrow CD$ 向点 D 运动. 设点 P 的运动路程为 x , $\triangle AOP$ 的面积为 y , y 与 x 的函数关系图象如图②所示, 则对角线 BD 的长为 ()



图①



图②

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

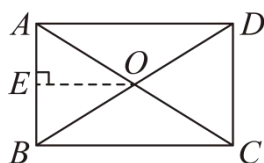
【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查动点问题的函数图象, 解题的关键是分析三角形面积随动点运动的变化过程, 找到分界点极值, 结合图象得到相关线段的具体数值.

假设 $AB = x, BC = y$, 由图可知 $x + y = 7$, 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , 利用矩形的面积和三角形的中位线表示出 OE , 结合 $\triangle ABO$ 的面积, 得到 $xy = 12$, 最后利用勾股定理和完全平方式进行求解即可.

【详解】 解: 假设 $AB = x, BC = y$, 由图可知 $x + y = 7$, 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E ,



又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore$ 点 O 为 AC 中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}y,$$

由图 2 可知 $\triangle ABO$ 的面积为 3,

$$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot OE = \frac{1}{2}x \frac{1}{2}y = 3,$$

即 $xy = 12$,

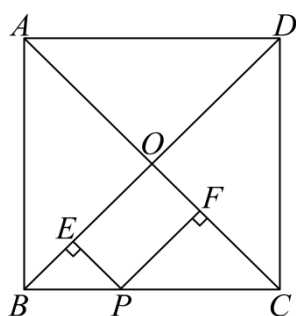
由勾股定理得,

$$BD = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 2xy} = \sqrt{49 - 24} = 5,$$

故选: C.

6. 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 P 是 BC 上任意一点, $PE \perp BD$ 于点 E ,

$PF \perp AC$ 于点 F ，若 $AC = 2\sqrt{2}$ ，则 EF 的长的最小值为（ ）



A. 2

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 如图，连接 OP 、 EF ，根据已知条件和正方形的性质可以得到当 EF 最小就是 OP 最小，然后利用垂线段最短即可求解.

【详解】 解：如图，连接 OP 、 EF ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 P 是 BC 上任意一点， $PE \perp BD$ 于点 E ， $PF \perp AC$ 于点 F ，

$\therefore$ 四边形 $OEFP$ 为矩形，

$\therefore EF = OP$ ，

$\therefore EF$ 最小时 OP 最小，

当 $OP \perp BC$ 于 P 的时候 OP 最小，

而当 $OP \perp BC$ 时， P 为 BC 的中点，

$\therefore OP = \frac{1}{2} BC$ ，

$\because AC = 2\sqrt{2}$ ，

则 $BC = 2$ ，

$\therefore OP = 1$ ，

$\therefore EF$ 的长的最小值为 1.

故选：B.

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质，同时也利用了垂线段最短解决问题.

二、填空题（每小题 2 分，共 24 分）

7. 一个多边形有 20 条对角线，则这个多边形有多少条边 ____.

【答案】 8

【解析】

【分析】根据多边形对角线条数与边数的关系求解.

【详解】解: 设多边形的边数为 n ,

$$\text{则 } \frac{n(n-3)}{2} = 20,$$

$$\text{整理得: } n^2 - 3n - 40 = 0,$$

$$\text{解得 } n_1 = 8, \quad n_2 = -5 \text{ (舍去)}.$$

因此这个多边形的边数是 8.

故答案为: 8.

【点睛】本题考查利用多边形对角线条数求多边形的边数, 以及解一元二次方程, 解题的关键是掌握多边形对角线条数与边数的关系. n 边形的对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$, 其中 $n \geq 3$.

8. 一次函数 $y = -2(x-1)$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查一次函数与 y 轴的交点, 求出 $x = 0$ 时, y 的值, 即可得出结果.

$$\text{【详解】解: } \because y = -2(x-1),$$

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -2 \times (0-1) = 2,$$

$$\therefore \text{一次函数 } y = -2(x-1) \text{ 在 } y \text{ 轴上的截距是 } 2;$$

故答案为: 2.

9. 方程 $x^4 - 9 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = \sqrt{3}$ 或 $x = -\sqrt{3}$

【解析】

【分析】将左边因式分解, 降次后化为两个一元二次方程即可解得答案.

$$\text{【详解】解: 由 } x^4 - 9 = 0 \text{ 得 } (x^2 + 3)(x^2 - 3) = 0,$$

$$\therefore x^2 + 3 = 0 \text{ 或 } x^2 - 3 = 0,$$

而 $x^2 + 3 = 0$ 无实数解,

$$\text{解 } x^2 - 3 = 0 \text{ 得 } x = \sqrt{3} \text{ 或 } x = -\sqrt{3},$$

故答案为: $x = \sqrt{3}$ 或 $x = -\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查解一元高次方程，解题的关键是将方程左边因式分解，把原方程降次，化为一元二次方程.

10. 用换元法解方程 $\frac{x^2-2}{x} + \frac{x}{x^2-2} = 5$ ，如果设 $y = \frac{x^2-2}{x}$ ，则原方程可化为 y 的整式方程是_____

【答案】 $y^2 - 5y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解方程，正确变形是关键.

设 $y = \frac{x^2-2}{x}$ ，则 $\frac{x}{x^2-2} = \frac{1}{y}$ ，根据换元法解答即可，注意最后的形式是整式方程.

【详解】 解： 设 $y = \frac{x^2-2}{x}$ ，则原方程可变形为： $y + \frac{1}{y} = 5$ ，

即为 $y^2 - 5y + 1 = 0$ ；

故答案为： $y^2 - 5y + 1 = 0$

11. 把直线 $y = -2x + 4$ 向左平移 3 个单位后，新的直线的解析式为_____.

【答案】 $y = -2x - 2$

【解析】

【分析】 本题考查图形的平移变换和函数解析式之间的关系，在平面直角坐标系中，平移后解析式有一个规律“左加右减，上加下减”. 根据图象上加下减，左加右减的规律即可求解.

【详解】 解： 直线 $y = -2x + 4$ 向左平移 3 个单位长度后： $y = -2(x+3) + 4$ ，即 $y = -2x - 2$.

故答案为： $y = -2x - 2$.

12. 用 20cm 长的绳子围成一个等腰三角形，设它的底长为 y cm，腰长为 x cm，则 y 与 x 之间的函数关系式为_____（写出自变量 x 的取值范围）

【答案】 $y = 20 - 2x (5 < x < 10)$

【解析】

【分析】 根据三角形的周长写成 y 与 x 的函数关系式，根据三角形两边之和大于第三边即可确定 x 的取值范围.

【详解】 解： $\because$ 三角形的周长为 20

$\therefore y + 2x = 20$,

$$\therefore y=20-2x, \text{ 即 } x < 10$$

$\because$ 三角形两边之和大于第三边

$$\therefore x > 5$$

$$\therefore 5 < x < 10.$$

故填 $y=20-2x(5 < x < 10)$.

【点睛】本题主要考查了根据实际问题列一次函数关系式、等腰三角形的性质及三角形三边关系等知识点；根据三角形三边关系求得 x 的取值范围是解答本题的关键.

13. 若关于 x 的分式方程 $\frac{2x-4}{x-1} + \frac{m-3x}{1-x} = 1$ 的解是非负数，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -3$ 且 $m \neq 1$

【解析】

【分析】本题考查根据分式方程的解的情况，求参数的范围，求出方程的解，根据方程的解的情况结合分式有意义的条件，列出不等式组进行求解即可.

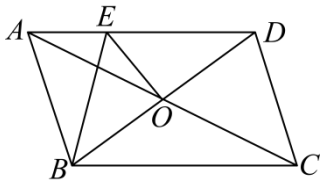
【详解】解：解 $\frac{2x-4}{x-1} + \frac{m-3x}{1-x} = 1$ ，得： $x = \frac{3+m}{4}$ ，

$\because$ 分式方程 $\frac{2x-4}{x-1} + \frac{m-3x}{1-x} = 1$ 的解是非负数，

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{3+m}{4} \geq 0 \\ x-1 = \frac{3+m}{4} - 1 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得: } m \geq -3 \text{ 且 } m \neq 1;$$

故答案为： $m \geq -3$ 且 $m \neq 1$.

14. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的周长是 14cm，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $OE \perp BD$ 交 AD 于点 E ，则 $\triangle ABE$ 的周长为_____ cm.



【答案】 7

【解析】

【分析】此题考查了平行四边形的性质、线段的中垂线的性质以及三角形周长等知识，熟练掌握平行四边形的性质解题的关键.

由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则 $OB = OD$, $AB = CD$, $AD = BC$, 故有 $AB + AD = 7\text{cm}$, 又 $OE \perp BD$, 则 OE 垂直平分 BD , 所以 $BE = DE$, 再根据周长公式即可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OB = OD, AB = CD, AD = BC,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长是 14cm ,

$$\therefore AB + AD = 7\text{cm},$$

$$\because OE \perp BD,$$

$\therefore OE$ 垂直平分 BD ,

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的周长 } AB + AE + BE$$

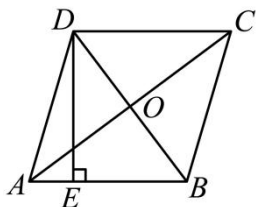
$$= AB + AE + DE$$

$$= AB + AD$$

$$= 7(\text{cm}),$$

故答案为: 7.

15. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AC = 8$, $BD = 6$, $DE \perp AB$ 于点 E , 则 DE 的长为_____.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质以及勾股定理的应用. 注意菱形的面积等于对角线积的一半或底乘以高. 首先利用勾股定理求得菱形的边长, 然后由菱形的两个面积计算, 求得边 AB 上的高 DE 的长即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 8$, $BD = 6$,

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

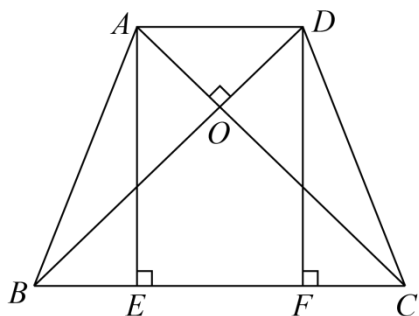
$$\therefore AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2} AC = 4, OB = OD = 3,$$

$$\therefore \text{在直角三角形 } AOB \text{ 中, } AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore DE = \frac{S_{\text{菱形}ABCD}}{AB} = \frac{24}{5}.$$

故答案为: $\frac{24}{5}$.

16. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 $AC \perp BD$ 于点 O , $AE \perp BC$, $DF \perp BC$, 垂足分别为 E 、 F , $AD = 4$, $BC = 8$, 则 $AE =$ _____.

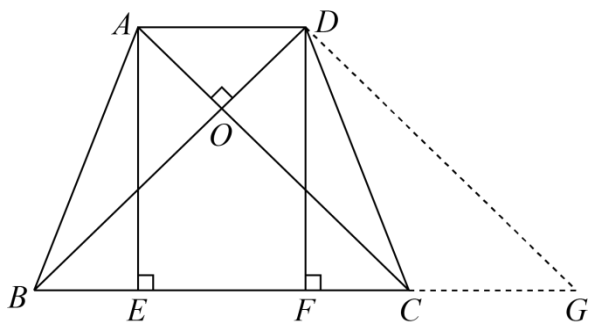


【答案】6

【解析】

【分析】过 D 作 $DG \parallel AC$ 交 BC 延长线于点 G , 则 $\angle BOC = \angle BDG$, 证四边形 $ADGC$ 为平行四边形得证 $\triangle DBG$ 为等腰直角三角形, 利用勾股定理得 $BD = DG = 6\sqrt{2}$, 再根据等腰三角形的三线合一得及直角三角形的性质得 $DF = FG$, 从而求得 $DF = 6$, 再四边形 $AEFD$ 是平行四边形, 即可得解.

【详解】解: 过 D 作 $DG \parallel AC$ 交 BC 延长线于点 G , 则 $\angle BOC = \angle BDG$,



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADGC$ 为平行四边形,

$\therefore DG = AC$, $AD = CG$,

$\because AC \perp BD$,

$\therefore \angle BOC = \angle BDG = 90^\circ$,

$\therefore DG \perp BD$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

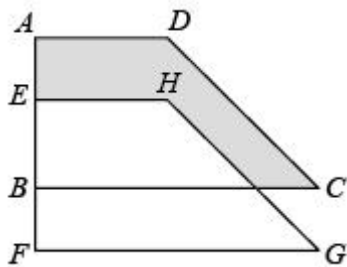
$\therefore AC = BD$,

$\therefore DG = BD$,
 $\therefore \triangle DBG$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore BD^2 + DG^2 = BG^2$,
 $\therefore BG^2 = 2BD^2$,
 $\therefore (BC + AD)^2 = 2BD^2$, 即 $(8 + 4)^2 = 2BD^2$,
 $\therefore BD = DG = 6\sqrt{2}$,
 $\because DF \perp BG$, $BD = DG = AC$,
 $\therefore BF = FG$,
 $\because DF \perp BG$,
 $\therefore DF = FG$,
 $\therefore 2DF^2 = (6\sqrt{2})^2$,
 $\therefore DF = 6$,
 $\because AE \perp BC$, $DF \perp BC$,
 $\therefore DF \parallel AE$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,
 $\therefore AE = DF = 6$.

故答案为: 6.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的判定及性质, 等腰三角形的判定及性质, 等腰梯形的性质, 勾股定理, 熟练掌握平行四边形的判定及性质, 等腰三角形的判定及性质以及等腰梯形的性质是解题的关键.

17. 如图, 将直角梯形 $ABCD$ 沿 AB 方向向下平移 2 个单位得到直角梯形 $EFGH$, 已知 $BC = 6$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, 则阴影部分的面积为_____.

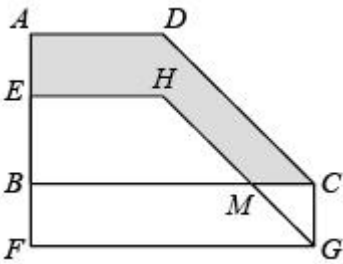


【答案】 10

【解析】

【分析】设 HC 与 BC 交于点 M ，连接 CG ，根据图中阴影部分面积等于四边形 $BFGM$ 即可求解。

【详解】解：设 HC 与 BC 交于点 M ，连接 CG ，



$\because$ 直角梯形 $ABCD$ 沿 AB 方向向下平移 2 个单位得到直角梯形 $EFGH$ ，

$$\therefore BF = CG = 2, S_{\text{阴影}} + S_{\text{四边形EHMB}} = S_{\text{四边形BFGM}} + S_{\text{四边形EHMB}},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{四边形BFGM}},$$

$\because BC = 6, \angle C = 45^\circ, GC \perp BC$,

$\therefore \triangle GCM$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore CM = CG = 2,$$

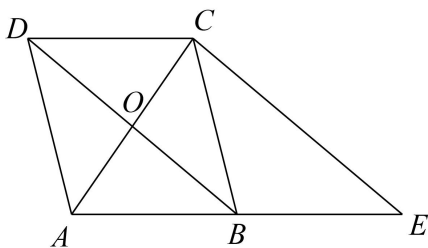
$$\therefore BM = BC - CM = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{四边形BFGM}} = \frac{1}{2}(BM + FC) \times BF = \frac{1}{2} \times (4 + 6) \times 2 = 10,$$

故答案为：10.

【点睛】本题考查了平移的性质，直角梯形，仔细观察图形，得到阴影部分的面积等于四边形 $BFGM$ 的面积是解题的关键。

18. 如图，将平行四边形 $DBEC$ 沿 BD 折叠，点 C 恰好落在 EB 的延长线上点 A 处，连接 AC ， BD 交于点 O ， $AC = 6$ ， $BD = 8$ ．若直线 AE 上有一点 F ，当 $\triangle FCE$ 为等腰三角形时，线段 AF 的长为_____.



【答案】18 或 2 或 $\frac{14}{5}$ 或 5

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质和折叠的性质，可证明 $\triangle OAB \cong \triangle OCD$ ，可得到四边形 $ABCD$ 是菱形，然后分三种情况讨论：当 $CF = EF$ 时，当 $EF = EC = 8$ 时，当 $CF = EC = 8$ 时，即可求解。

【详解】解：∵ 四边形 $DBEC$ 是平行四边形，

∴ $BE \parallel CD$ ， $BD \parallel CE$ ， $CE = BD = 8$ ， $CD = BE$ ，即 $AB \parallel CD$ ，

∴ $\angle ODC = \angle OBA$ ，

由折叠的性质得： $BD \perp AC$ ， $OA = OC$ ， $AB = CB$ ，

∴ $CE \perp AC$ ，

∴ $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = 10$ ，

在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中，

$$\begin{cases} \angle OBA = \angle ODC \\ \angle AOB = \angle COD, \\ OA = OC \end{cases}$$

∴ $\triangle OAB \cong \triangle OCD (AAS)$ ，

∴ $AB = CD$ ，

∴ $AB \parallel CD$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

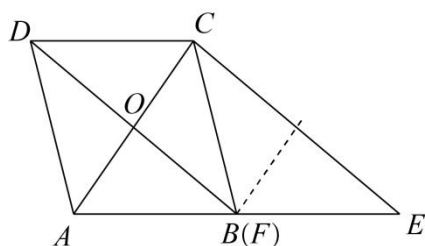
∴ $BD \perp AC$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB = CD = BE = BC$ ，

∴ 点 B 在 CE 的垂直平分线上，

当 $CF = EF$ 时，点 F 在 CE 的垂直平分线上，如图，



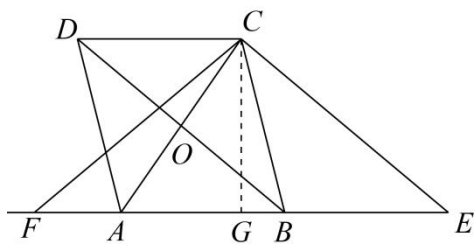
此时点 B 与点 F 重合，

∴ $AF = \frac{1}{2} AE = 5$ ；

当 $EF = EC = 8$ 时，

$AF = AE + EF = 18$ 或 $AF = AE - EF = 2$ ；

当 $CF = EC = 8$ 时，如图，过点 C 作 $CG \perp EF$ ，则 $FG = EG$ ，



$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CG = \frac{1}{2} AC \cdot CE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 10 \times CG = \frac{1}{2} \times 6 \times 8, \text{ 解得: } CG = \frac{24}{5},$$

$$\therefore FG = \sqrt{CF^2 - CG^2} = \frac{32}{5},$$

$$\therefore EF = 2FG = \frac{64}{5},$$

$$\therefore AF = EF - AE = \frac{14}{5};$$

综上所述, 线段 AF 的长为 18 或 2 或 $\frac{14}{5}$ 或 5.

故答案为: 18 或 2 或 $\frac{14}{5}$ 或 5

【点睛】本题是四边形综合题目, 考查了菱形的判定、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、折叠的性质、勾股定理、三角形面积以及分类讨论等知识; 本题综合性强, 熟练掌握平行四边形的判定与性质和勾股定理是解题的关键, 属于中考常考题型,

三、计算题

19. 解方程 (组):

$$(1) \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$$

$$(2) \frac{x-2}{x+2} - \frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{x-2}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$(4) \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \frac{10}{3}$$

【答案】(1) $x = 20$

(2) $x = 2$

$$(3) \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}.$$

$$(4) x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = -\frac{9}{4}$$

【解析】

【分析】此题考查无理方程，二元二次方程组，分式方程的解法，熟练掌握解题步骤是关键.

(1) 根据移项、平方、整理的步骤得到 $x-10=2\sqrt{x+5}$ ，再平方得到 $(x-10)^2=4(x+5)$ ，解一元二次方程并检验即可；

(2) 去分母并整理得到 $x^2-5x+6=0$ ，解方程并检验即可；

(3) 先将 $x^2+4xy+4y^2=9$ 转化为 $(x+2y)^2=9$ ，进而得 $x+2y=\pm 3$ ，据此可将原方程中转化为

① $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=6 \end{cases}$ ，② $\begin{cases} x+2y=-3 \\ x-y=6 \end{cases}$ ，然后解这两个二元一次方程组即可得出原方程中的解.

(4) 设 $\sqrt{1+\frac{2}{x}}=y(y>0)$ ，整理得到， $3y^2-10y+3=0$ ，解得 $y_1=3, y_2=\frac{1}{3}$ ，分别解无理方程并检验即可.

【小问 1 详解】

解: $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

移项得, $\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}$,

两边平方得 $2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$,

整理得到 $x-10=2\sqrt{x+5}$,

两边平方得到, $(x-10)^2=4(x+5)$,

整理得到 $x^2-24x+80=0$,

解得, $x_1=20, x_2=4$,

经检验, $x_2=4$ 是增根, 舍去,

$\therefore x=20$;

【小问 2 详解】

解: $\frac{x-2}{x+2}-\frac{4}{4-x^2}=\frac{1}{x-2}$

去分母得到, $x^2-4x+4+4=x+2$,

整理得到, $x^2-5x+6=0$ 即 $(x-2)(x-3)=0$,

解得, $x_1 = 2, x_2 = 3$,

经检验, $x_1 = 2$ 是增根, 舍去,

$\therefore x = 3$;

【小问 3 详解】

解: 由 $x^2 + 4xy + 4y^2 = 9$, 得: $(x + 2y)^2 = 9$,

$\therefore x + 2y = \pm 3$,

$\therefore$ 原方程中可转化为① $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}$, ② $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ x - y = 6 \end{cases}$,

解①得: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$;

解②得: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$.

$\therefore$ 原方程组的解为: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$.

【小问 4 详解】

解: $\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \frac{10}{3}$

解: 设 $\sqrt{1 + \frac{2}{x}} = y (y > 0)$,

则原方程变为, $y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3}$

整理得到, $3y^2 - 10y + 3 = 0$,

解得 $y_1 = 3, y_2 = \frac{1}{3}$

当 $y_1 = 3$ 时, $\sqrt{1 + \frac{2}{x}} = 3$, 解得 $x_1 = \frac{1}{4}$,

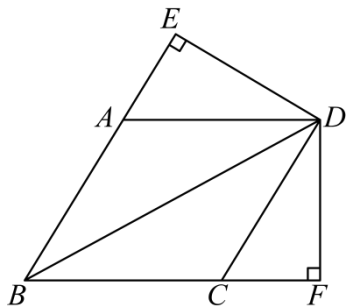
当 $y_2 = \frac{1}{3}$ 时, $\sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$, 解得 $x_2 = -\frac{9}{4}$,

经检验, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{9}{4}$ 都是原方程的根,

$$\therefore x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{9}{4}$$

四、解答题

20. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC < 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, $DE \perp AB$, $DF \perp BC$, 垂足分别为 E 、 F , $DE = DF$.



(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 为菱形;

(2) 联结 AC 交 BD 于点 O , 联结 OF , 求证: $\angle BDC = \angle OFB$.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】该题主要考查了菱形的性质和判定, 等腰三角形的性质, 全等三角形的性质和判定, 直角三角形的性质等知识点, 解题的关键是掌握以上知识点.

(1) 根据两组对边分别平行证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 再证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$, 根据全等三角形的性质得出 $AD = DC$, 即可证明四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 根据四边形 $ABCD$ 是菱形, 得出 $OB = OD$, $\angle OBF = \angle BDC$, 再根据直角三角形的性质得出 $OF = OB$, 根据等腰三角形的性质即可证明;

【小问 1 详解】

$\because AD \parallel BC, AB \parallel CD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle BAD = \angle BCD,$

$\therefore \angle EAD = \angle DCF,$

$\because DE \perp AB, DF \perp BC,$

$\therefore \angle E = \angle F = 90^\circ,$

$\because DE = DF, \angle E = \angle F = 90^\circ, \angle EAD = \angle DCF,$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (AAS),$

$$\therefore AD = DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

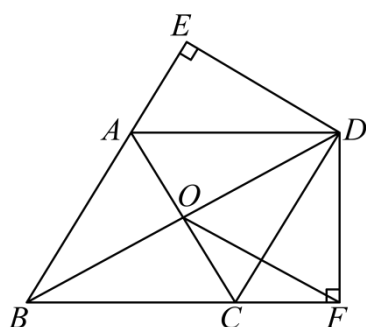
$$\therefore OB = OD, \angle OBF = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle DFB = 90^\circ,$$

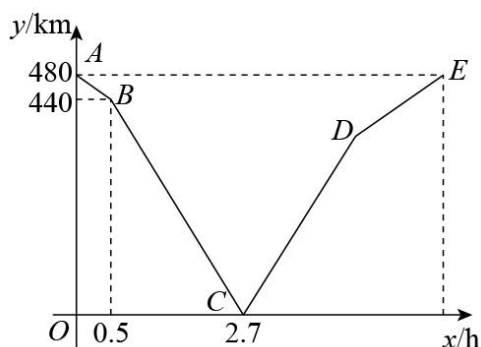
$$\therefore OF = OB = OD,$$

$$\therefore \angle OBF = \angle OFB,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle OFB.$$



21. 如图, 一辆快车从甲地驶向乙地, 一辆慢车从乙地驶向甲地, 设先出发的车辆行驶时间为 x (小时), 两车之间的距离为 y (km), 如下的函数图像表示 y 与 x 之间的函数关系.



(1) 慢车速度为 _____ km/h, 快车速度为 _____ km/h.

(2) 快车出发多少时间后, 两车之间的距离为 300km.

【答案】(1) 80,120

(2) 快车出发 0.7 或 3.7 小时时, 两车之间的距离为 300km.

【解析】

【分析】(1) 根据图象可知先出发的车行驶 0.5 小时, 行驶 40m, 可得先出发的车的速度, 根据两车相遇的时间可得后出发的车的速度, 即可得答案;

(2) 设快车出发 x h 时, 两车之间的距离为 300km, 分相遇前和相遇后, 两车相距 300km 两种情况, 利用

距离=时间×速度列方程即可得答案.

【小问 1 详解】

由图象可知：先出发的车行驶 0.5 小时，行驶距离为 $480 - 440 = 40\text{m}$,

∴先出发的车的行驶速度为 $40 \div 0.5 = 80\text{km/h}$,

∴后出发的车行驶 $2.7 - 0.5 = 2.2$ 小时时两车相遇,

∴后出发的车的速度为 $440 \div (2.7 - 0.5) - 80 = 120\text{km/h}$,

∴先出发的车为慢车，速度为 80km/h ，后出发的车为快车，速度为 120km/h .

故答案为：80；120

【小问 2 详解】

设快车出发 $x\text{h}$ 时，两车之间的距离为 300km ,

由题意，可知两车行驶的过程中有 2 次两车之间的距离为 300km ,

相遇前相距 300km 时， $(80 + 120)x = (480 - 40) - 300$,

解得： $x = 0.7$ (h),

相遇后相距 300km 时， $(80 + 120)x = (480 - 40) + 300$,

解得： $x = 3.7$ (h),

答：快车出发 0.7 或 3.7 小时时，两车之间的距离为 300km .

【点睛】本题考查函数图象，理解题意，正确提取函数图象的信息是解题关键.

22. 已知方程 $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{4x+a}{(x+1)(x+2)}$ 只有一个根，求 a 的值.

【答案】5 或 9 或 $\frac{9}{2}$;

【解析】

【分析】去分母化为一元二次方程，分别讨论一元二次方程有一根为 $x=-1$ 、有一根为 $x=-2$ 、有两个相同根时，求得 a 的值再代入验证即可；

【详解】解： $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{4x+a}{(x+1)(x+2)}$

去分母得： $(x+1)^2 + (x+2)^2 = 4x+a$

去括号得： $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$

① $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$ 有一根为 $x=-1$ 时，代入得 $a=5$,

$2x^2 + 2x = 0$ ，则另一个根为 $x=0$,

此时分式方程只有一个根 $x=0$ ，且分母不等于零，符合题意；

② $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$ 有一根为 $x=-2$ 时，代入得 $a=9$ ，

$2x^2 + 2x - 4 = 0$ ，则另一个根为 $x=1$ ，

此时分式方程只有一个根 $x=1$ ，且分母不等于零，符合题意；

③ $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$ 有两个相同根时， $4 - 8(5 - a) = 0$ ， $a = \frac{9}{2}$ ，

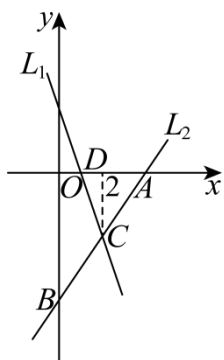
$2x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$ ， $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ ，

此时分式方程只有一个根 $x = -\frac{1}{2}$ ，且分母不等于零，符合题意；

$\therefore a$ 的值为 5 或 9 或 $\frac{9}{2}$ ；

【点睛】 本题考查了分式方程的增根，掌握分式方程的分母不能为零是解题关键.

23. 如图，直线 L_1 的解析表达式为： $y = -3x + 3$ ，且 L_1 与 x 轴交于点 D ，直线 L_2 经过点 A 、 $B(0, -6)$ ，直线 L_1 ， L_2 交于点 C ，点 C 的横坐标为 2.



(1) 点 D 的坐标为_____；直线 L_2 的解析式为_____.

(2) 在直线 L_1 上有一点 P ，使得 $\triangle ACP$ 与 $\triangle AOB$ 的面积相等，求出点 P 的坐标.

(3) 点 M 在直线 L_1 ，点 N 在 y 轴上，若点 M 、 N 、 A 、 C 构成平行四边形，直接写出点 M 的坐标.

【答案】 (1) $(1, 0)$ ， $y = \frac{3}{2}x - 6$

(2) $P\left(-\frac{2}{3}, 5\right)$ 或 $P\left(\frac{14}{3}, -11\right)$

(3) $M(6, -15)$ 或 $M(-2, 9)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与几何的综合应用，平行四边形的性质，正确的求出函数解析式，利用数形结

合和分类讨论的思想进行求解，是解题的关键：

(1) 令 $y=0$ ，求出 D 点坐标，令 $x=2$ ，求出 C 点坐标，待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 求出 A 点坐标，进而求出 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ ，设点 $P(m, -3m+3)$ ，作 $PE \perp x$ 轴交 AC 于点 F ，
则 $F\left(m, \frac{3}{2}m-6\right)$ ，分点 P 在点 C 上方和点 P 在点 C 下方，两种情况进行讨论求解即可；

(3) 分 AC 为对称轴， AN 为对称轴， CN 为对角线三种情况进行讨论求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because y = -3x + 3$ ，

$\therefore$ 当 $y = -3x + 3 = 0$ 时，则： $x = 1$ ，当 $x = 2$ 时，则： $y = -3 \times 2 + 3 = -3$ ，

$\therefore D(1, 0)$ ， $C(2, -3)$ ，

$\therefore B(0, -6)$ ，

$\therefore$ 设直线 L_2 的解析式为 $y = kx - 6$ ，把 $C(2, -3)$ 代入，得： $-3 = 2k - 6$ ，解得： $k = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore y = \frac{3}{2}x - 6$ ；

【小问 2 详解】

$\therefore y = \frac{3}{2}x - 6$ ，

$\therefore y = \frac{3}{2}x - 6 = 0$ 时， $x = 4$ ，

$\therefore A(4, 0)$ ，

$\therefore B(0, -6)$ ，

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ ；

设点 $P(m, -3m+3)$ ，作 $PE \perp x$ 轴交 AC 于点 F ，则 $F\left(m, \frac{3}{2}m-6\right)$ ，

当点 P 在点 C 上方时，则： $PF = -3m + 3 - \frac{3}{2}m + 6 = -\frac{9}{2}m + 9$ ，

$\therefore C(2, -3)$ ，

$\therefore S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} PF \cdot (x_A - x_C) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{9}{2}m + 9\right) \cdot 2 = 12$ ，

$$\text{解得: } m = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore P\left(-\frac{2}{3}, 5\right);$$

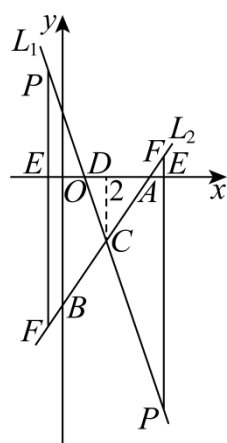
$$\text{当点 } P \text{ 在点 } C \text{ 下方时, 则: } PF = \frac{3}{2}m - 6 + 3m - 3 = \frac{9}{2}m - 9,$$

$$\therefore S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}PF \cdot (x_A - x_C) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{2}m - 9\right) \cdot 2 = 12,$$

$$\text{解得: } m = \frac{14}{3},$$

$$\therefore P\left(\frac{14}{3}, -11\right);$$

$$\text{综上: } P\left(-\frac{2}{3}, 5\right) \text{ 或 } P\left(\frac{14}{3}, -11\right);$$



【小问3详解】

$\because N$ 在 y 轴上,

$$\therefore x_N = 0,$$

$$\therefore A(4, 0), C(2, -3),$$

当点 M 、 N 、 A 、 C 构成平行四边形时, 分三种情况:

$$\text{①当 } AC \text{ 为对称轴时, } 4 + 2 = 0 + x_M, \text{ 解得: } x_M = 6,$$

$$\therefore y_M = -3 \times 6 + 3 = -15,$$

$$\therefore M(6, -15);$$

$$\text{②当 } AN \text{ 为对称轴时, } 4 + 0 = 2 + x_M, \text{ 解得: } x_M = 2,$$

$$\therefore y_M = -3 \times 2 + 3 = -3,$$

$\therefore M(2, -3)$, 此时, M, C 重合, 不符合题意; 舍去;

③当 CN 为对角线时, $2 + 0 = 4 + x_M$, 解得: $x_M = -2$,

$$\therefore y_M = -3 \times (-2) + 3 = 9;$$

$$\therefore M(-2, 9);$$

综上: $M(6, -15)$ 或 $M(-2, 9)$.