

上中东校 2025 八下数学第一次摸底考试

A 部 分

一、选择题：

1. 如果直线 $y = -2x + 2b - 1$ 经过原点，那么 b 的值是 ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】直接把原点坐标代入解析式得到关于 b 的方程，然后解方程即可.

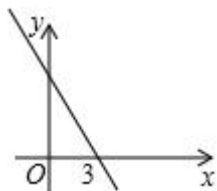
【详解】解：把 $(0, 0)$ 代入 $y = -2x + 2b - 1$ ，得 $2b - 1 = 0$ ，

解得 $b = \frac{1}{2}$.

故选 B.

【点睛】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点，熟知一次函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

2. 如图，一次函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(3, 0)$ ，如果 $y > 0$ ，那么对应的 x 的取值范围是 ()



- A. $x < 3$ B. $x > 3$ C. $x < 0$ D. $x > 0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数的图象可直接进行解答.

【详解】解：由函数图象可知，此函数是减函数，当 $y = 0$ 时 $x = 3$ ，

故当 $y > 0$ 时， $x < 3$.

故选 A.

【点睛】本题考查的是一次函数的图象，利用数形结合求出 x 的取值范围是解答此题的关键.

3. 下列方程中，是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $\frac{1}{x^5} = 9$

B. $x^4 + x = 1$

C. $5x = 9a^5$

D. $2x^2 - 3a = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，熟练掌握一元二次方程的定义是解题的关键。根据一元二次方程的定义逐项分析判断即可。

【详解】解：A、 $\frac{1}{x^5} = 9$ ，不是整式方程，不是关于 x 的一元二次方程，不符合题意；

B、 $x^4 + x = 1$ ， x 的最高次数是 4，不是关于 x 的一元二次方程，不符合题意；

C、 $5x = 9a^5$ ， x 的最高次数是 1，不是关于 x 的一元二次方程，不符合题意；

D、 $2x^2 - 3a = 0$ ，是关于 x 的一元二次方程，符合题意；

故选：D。

4. 下列方程有实数根的是 ()。

A. $x^2 + 3x + 3 = 0$ ；

B. $x^2 - 5 = 9$ ；

C. $\frac{x}{x-1} = \frac{-1}{1-x}$ ；

D. $3 + \sqrt{x+1} = 2$ 。

【答案】B

【解析】

【详解】试题解析：A. $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ ，方程没有实数根，故错误。

B. $x^2 = 14$ ，解得： $x = \pm\sqrt{14}$ ，方程有实数根，故正确。

C. 方程两边同时乘以 $(x-1)$ ，得： $x = 1$ ，最简公分母 $x-1 = 0$ ，方程无实数根，故错误。

D. $\sqrt{x+1} = -1$ ，不存在这样的实数 x ，故错误。

故选 B。

点睛：解完分式方程后，必须把解代入最简公分母进行检验。

5. 用换元法解方程组 $\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 4 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 7 \end{cases}$ 时，如设 $\frac{1}{x+y} = u$ ， $\frac{1}{x-y} = v$ 则将原方程组可化为关于 u 和 v 的

整式方程组 ()。

A. $\begin{cases} 3u + 6v = 4 \\ 4u - 3v = 7 \end{cases}$ ；

B. $\begin{cases} 3u + 6v = 4 \\ 4v - 3u = 7 \end{cases}$ ；

C. $\begin{cases} 3u + 6v = 4 \\ 4u + 3v = 7 \end{cases}$ ；

D. $\begin{cases} 3v + 6u = 4 \\ 4v - 3u = 7 \end{cases}$ 。

【答案】B

【解析】

【详解】试题解析： $\because \frac{1}{x+y} = u, \frac{1}{x-y} = v,$

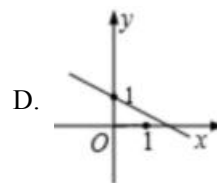
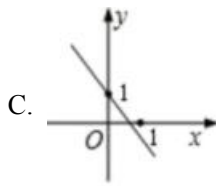
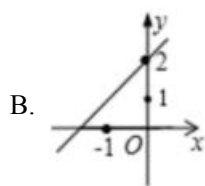
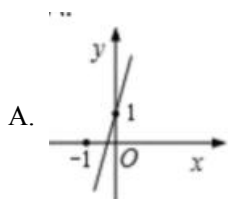
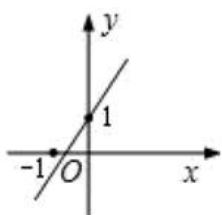
则 $\frac{3}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 4$ 可以转化为： $3u + 6v = 4,$

同理： $\frac{4}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 7$ 可以转化为： $4v - 3u = 7.$

原方程组转化为整式方程组为： $\begin{cases} 3u + 6v = 4 \\ 4v - 3u = 7 \end{cases}.$

故选 B.

6. 已知函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示，则 $y=-2kx+b$ 的图象可能是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数的图象和系数的关系判断选项的正确性.

【详解】解：由函数 $y=kx+b$ 的图象可知， $k>1$ ， $b=1$ ，

$$\therefore y = -2kx + b = -2kx + 1, \quad -2k < -2,$$

$$\therefore |-2k| > 2$$

$\therefore$ 符合的函数图象是 C.

故选：C.

【点睛】本题考查一次函数的图象和系数的关系，解题的关键掌握一次函数的图象和各项系数之间的关系.

二、填空题：

7. 已知一次函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ ，则 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-1

【解析】

【分析】将 $x=-2$ 代入函数解析式进行计算即可.

【详解】解: $\because f(x)=-\frac{1}{2}x-2$,

$$\therefore f(-2)=-\frac{1}{2}\times(-2)-2=-1,$$

故答案为-1.

【点睛】本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征,直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y=kx+b$.

8. 直线 $y=-4x-2$ 在 y 轴上的截距是_____

【答案】 -2

【解析】

【分析】求在 y 轴上的截距,求与 y 轴的交点坐标即可.

【详解】解: 在 $y=-4x-2$ 中,令 $x=0$,可得 $y=-2$,

$\therefore$ 一次函数 $y=-4x-2$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, -2)$,

$\therefore$ 一次函数 $y=-4x-2$ 的图象在 y 轴上的截距为-2,

故答案为-2.

【点睛】本题主要考查函数与坐标轴的交点,掌握截距与坐标的关系是解题的关键.

9. 方程 $(x+1)\sqrt{x-2}=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【详解】试题解析: $(x+1)\sqrt{x-2}=0$,

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } \sqrt{x-2}=0.$$

解得: $x=-1$ 或 $x=2$.

当 $x=-1$ 时, $\sqrt{x-2}$ 不成立,故舍去.

故答案为 $x=2$.

10. 关于 x 的方程 $ax=-6$ 有解的条件是_____.

【答案】 $a\neq 0$

【解析】

【分析】根据一元一次方程的解的定义得出即可.

【详解】解: 关于 x 的方程 $ax=-6$ 有解的条件是 $a\neq 0$,

故答案为 $a\neq 0$.

【点睛】 本题考查了一元一次方程的解的定义，能熟记一元一次方程的解的定义的内容是解此题的关键.

11. 方程 $4x^4 - 20 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = \pm\sqrt[4]{5}$

【解析】

【详解】 试题解析： $\because 4x^4 - 20 = 0$,

$$4x^4 = 20,$$

$$x^4 = 5,$$

$$\therefore x = \pm\sqrt[4]{5}.$$

故答案为 $x = \pm\sqrt[4]{5}$.

12. 用换元法解方程 $\frac{2(x-1)}{x^2} - \frac{x^2}{3(x-1)} = 1$ 时，设 $y = \frac{x-1}{x^2}$ ，则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $6y^2 - 3y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法、解分式方程，熟练掌握相关知识点是解题的关键. 设 $y = \frac{x-1}{x^2}$ ，利用换元法将原方程化为关于 y 的方程，再通过去分母得到整式方程，即可得出答案.

【详解】 解： $\because y = \frac{x-1}{x^2}$,

$$\therefore \frac{2(x-1)}{x^2} = 2y, \quad \frac{x^2}{3(x-1)} = \frac{1}{3y},$$

$$\therefore \text{原方程可化为 } 2y - \frac{1}{3y} = 1,$$

$$\text{去分母，得： } 6y^2 - 1 = 3y,$$

$$\text{整理得： } 6y^2 - 3y - 1 = 0,$$

$$\therefore \text{原方程可化为关于 } y \text{ 的整式方程是 } 6y^2 - 3y - 1 = 0.$$

$$\text{故答案为： } 6y^2 - 3y - 1 = 0.$$

13. 如果方程 $\frac{x-3}{x-2} + 1 = \frac{m}{x-2}$ 有增根, 那么 $m =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程, 把 $x = 2$ 代入整式方程求出 m 的值即可.

【详解】 解: 去分母得: $x - 3 + x - 2 = m$,

由分式方程有增根, 得到 $x = 2$,

代入整式方程得: $m = -1$,

故答案为 -1

【点睛】 此题考查了分式方程的增根, 增根确定后可按如下步骤进行: ① 化分式方程为整式方程; ② 把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

14. 方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ 的解是 _____.

【答案】 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 根据根与系数的关系, x, y 可看作方程 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 的两根, 利用因式分解法求得 $t_1 = 2, t_2 = 3$,

则 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$.

【详解】 解: 根据题意 x, y 可看作方程 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 的两根,

$(t - 2)(t - 3) = 0$,

解得 $t_1 = 2, t_2 = 3$,

所以 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$.

故答案为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程 - 因式分解法: 先把方程的右边化为 0, 再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式, 那么这两个因式的值就都有可能为 0, 这就能得到两个一元一次方程的解, 这样也就把原方程进行了降次, 把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了 (数学转化思想). 也考查了根与

系数的关系.

15. 设有一次函数 $y = kx + b$ (k, b 为常数), 表中给出 5 组自变量和相应的函数值, 其中只有一组的函数值计算有误, 则这个计算有误的函数值是_____

x	1	2	3	4	5
y	4	7	10	14	16

【答案】 14

【解析】

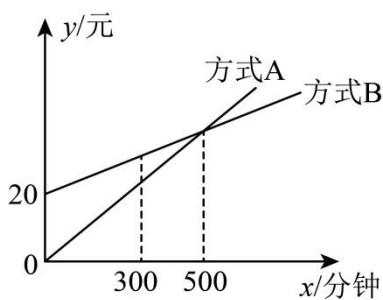
【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 找出图象上点的坐标符合的解析式是解决本题的关键. 经过观察 5 组自变量和相应的函数值可知 $(1,4)$, $(2,7)$, $(3,10)$, $(5,16)$ 符合一次函数解析式 $y = 3x + 1$, 而 $(4,14)$ 不符合, 即可得出结论.

【详解】 解: 经过观察 5 组自变量和相应的函数值可知, $(1,4)$, $(2,7)$, $(3,10)$, $(5,16)$ 符合一次函数解析式 $y = 3x + 1$, 而 $(4,14)$ 不符合,

$\therefore$ 计算有误的函数值是 14.

故答案为: 14.

16. 某电信公司为顾客提供了 A, B 两种手机上网方式, 一个月的手机上网费用 y (元) 与上网时间 x (分钟) 之间的关系如图, 如果一个月上网 300 分钟, 那么方式 B 产生的费用比方式 A 高_____元.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用, 理解题意正确设出一次函数的解析式是解题的关键. 设方式 A 的函数关系式为 $y_1 = k_1x$, 方式 B 的函数关系式为 $y_2 = k_2x + 20$, 由图象得, 当 $x = 500$ 时, $y_1 = y_2$, 求出 $k_2 - k_1$ 的值, 再令 $x = 300$, 求出此时 $y_2 - y_1$ 的值即可解答.

【详解】解：设方式 A 的函数关系式为 $y_1 = k_1x$ ，方式 B 的函数关系式为 $y_2 = k_2x + 20$ ，

由图象得，当 $x = 500$ 时， $y_1 = y_2$ ，

$$\therefore 500k_1 = 500k_2 + 20,$$

$$\text{整理得： } k_2 - k_1 = -\frac{2}{50},$$

当 $x = 300$ 时，

$$y_2 - y_1$$

$$= 300k_2 + 20 - 300k_1$$

$$= 300(k_2 - k_1) + 20$$

$$= 300 \times \left(-\frac{2}{50}\right) + 20$$

$$= 8,$$

$\therefore$ 如果一个月上网 300 分钟，那么方式 B 产生的费用比方式 A 高 8 元.

故答案为：8.

三 . 解答题 (共 8 小题)

17 解方程： $1 + \sqrt{4x+1} = 2x$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】方程整理后，两边平方转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到无理方程的解.

【详解】解：方程整理得： $\sqrt{4x+1} = 2x-1$ ，

两边平方得： $4x+1 = (2x-1)^2$ ，即 $4x^2 - 8x = 0$ ，

分解因式得： $4x(x-2) = 0$ ，

解得： $x = 0$ 或 $x = 2$ ，

经检验 $x = 0$ 是增根，无理方程的解为 $x = 2$.

【点睛】此题考查了无理方程，利用了转化的思想，解无理方程注意要验根.

18. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x = 1.5 \\ y = -0.5 \end{cases}$

【解析】

【分析】把方程组的第一个方程分解因式求出 $x - 3y = 3$ ，再解方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$ 即可.

【详解】由 $x^2 - 2xy - 3y^2 = 3$ 得: $(x + y)(x - 3y) = 3$,

$$\therefore x + y = 1,$$

$$\therefore x - 3y = 3,$$

$$\text{解} \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \text{得: } \begin{cases} x = 1.5 \\ y = -0.5 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了解高次方程组，能把高次方程组转化成低次方程组是解此题的关键.

19. “路通百业兴，道顺民心畅”，甲、乙两个工程队负责修建某段道路. 已知甲工程队每天比乙工程队多修 1 千米，如果甲工程队修 2 千米所用的天数是乙工程队修 3 千米所用天数的一半.

(1) 求甲，乙两个工程队每天各修路多少千米？

(2) 现计划再修建长度为 20 千米的公路，由甲、乙两个工程队来完成. 若甲队每天所需费用为 36 万元，乙队每天所需费用为 45 万元，求在总费用不超过 180 万元的情况下，至少安排甲工程队施工多少天？

【答案】(1) 甲工程队每天修 4km，乙工程队每天修 3km

(2) 5 天

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用，找准等量关系是解题的关键.

(1) 设乙工程队每天修 x km，则甲工程队每天修 $(x+1)$ km，根据题意列出分式方程计算并检验即可；

(2) 设安排甲工程队施工 m 天，则乙施工 $\frac{20-4m}{3}$ 天，根据题意列出不等式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解：设乙工程队每天修 x km，则甲工程队每天修 $(x+1)$ km，

$$\text{根据题意得: } \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x} \times \frac{1}{2},$$

解得 $x = 3$,

经检验， $x = 3$ 是原方程的解，且符合题意，

$$\therefore x+1 = 3+1 = 4,$$

答：甲工程队每天修 4km，乙工程队每天修 3km；

【小问 2 详解】

解：设安排甲工程队施工 m 天，则乙施工 $\frac{20-4m}{3}$ 天，

由题意得： $36m + 45 \times \frac{20-4m}{3} \leq 180$ ，

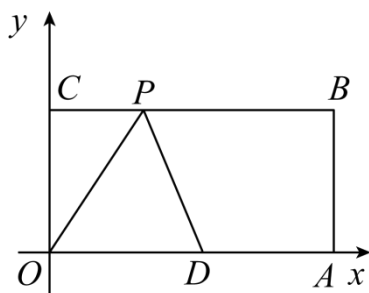
解得 $m \geq 5$ ，

$\therefore m$ 的最小值为 5，

答：至少安排甲工程队施工 5 天.

B1 部分

20. 已知：如图， O 为坐标原点，四边形 $OABC$ 为矩形， $A(10, 0)$ ， $C(0, 4)$ ，点 D 是 OA 的中点，点 P 在 BC 上运动，当 $\triangle ODP$ 是腰长为 5 的等腰三角形时，则 P 点的坐标为_____.



【答案】 (3, 4) 或 (2, 4) 或 (8, 4)

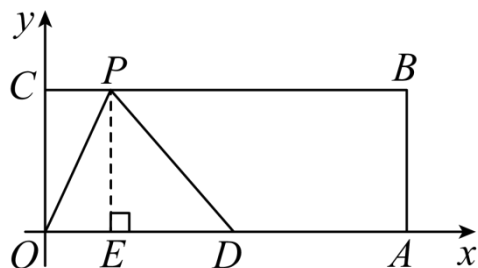
【解析】

【详解】解： $\because A(10, 0)$ ， $C(0, 4)$ ，

$\therefore OA=BC=10$ ， $OC=AB=4$ ，

如图所示， $PD=OD=5$ ，点 P 在点 D 的左侧.

过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E ，则 $PE=4$.



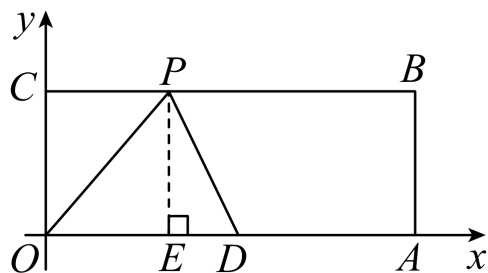
在 $Rt\triangle PDE$ 中，由勾股定理得： $DE = \sqrt{PD^2 - PE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

$\therefore OE = OD - DE = 5 - 3 = 2$ ，

$\therefore$ 此时点 P 坐标为 (2, 4)；

如图所示, $OP=OD=5$.

过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E , 则 $PE=4$.

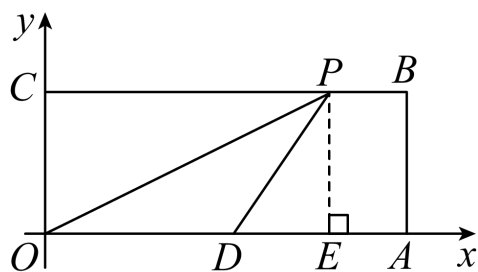


在 $Rt\triangle POE$ 中, 由勾股定理得: $OE = \sqrt{OP^2 - PE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore$ 此时点 P 坐标为 $(3, 4)$;

如图所示, $PD=OD=5$, 点 P 在点 D 的右侧.

过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E , 则 $PE=4$.



在 $Rt\triangle PDE$ 中, 由勾股定理得: $DE = \sqrt{PD^2 - PE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

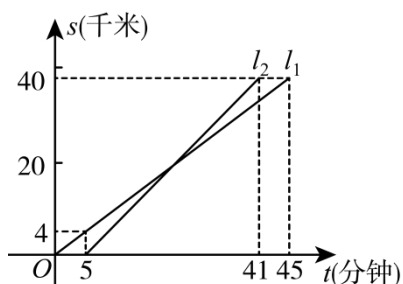
$\therefore OE = OD + DE = 5 + 3 = 8$,

$\therefore$ 此时点 P 坐标为 $(8, 4)$.

故答案为: $(2, 4)$ 或 $(3, 4)$ 或 $(8, 4)$.

【点睛】 本题主要考查了矩形的性质, 坐标与图形性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 熟练掌握相关知识, 并利用分类讨论思想解答是解题的关键.

21. 上周六, 小明一家共 7 人从家里出发去公园游玩. 小明提议: 让爸爸开车载着爷爷、奶奶、外公、外婆去, 自己和妈妈坐公交车去, 最后在公园门口汇合. 图中 l_1 , l_2 分别表示公交车与小轿车在行驶中的路程 (千米) 与时间 (分钟) 的关系, 试观察图象并回答下列问题:



- (1) 公交车在途中行驶的平均速度为_____千米/分钟；此次行驶的路程是_____千米.
- (2) 写出小轿车在行驶过程中 s 与 t 的函数关系式：_____, 定义域为_____.
- (3) 小明和妈妈乘坐的公交车出发_____分钟后被爸爸的小轿车追上了.

【答案】 (1) 0.8, 36

(2) $s = t - 5$, $5 \leq t \leq 41$

(3) 25

【解析】

【分析】 (1) 根据速度 = 路程 $\div$ 时间可求出公交车在途中行驶的平均速度，再由路程 = 速度 $\times$ 时间可求出此次行驶的路程；

(2) 观察图象找出点的坐标，利用待定系数法即可求出小轿车在行驶过程中 s 与 t 的函数关系式，观察图象即可找出其定义域；

(3) 先求出公交车在行驶中 s 与 t 的函数关系式，再联立两函数关系式成方程组，解方程组即可得出结论.

【小问 1 详解】

解： $4 \div 5 = 0.8$ (千米/分钟)，

$0.8 \times 45 = 36$ (千米).

故答案为：0.8；36.

【小问 2 详解】

解：设小轿车在行驶过程中 s 与 t 的函数关系式为 $s = kt + b$,

将 (5, 0)、(41, 36) 代入 $s = kt + b$,

$$\begin{cases} 5k + b = 0 \\ 41k + b = 36 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 1 \\ b = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 小轿车在行驶过程中 s 与 t 的函数关系式为 $s = t - 5$ ($5 \leq t \leq 41$).

故答案为： $s = t - 5$; $5 \leq t \leq 41$.

【小问 3 详解】

解：公交车在行驶中 s 与 t 的函数关系式为 $s = 0.8t$.

联立两函数关系式成方程组，

$$\begin{cases} s = 0.8t \\ s = t - 5 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} s = 20 \\ t = 25 \end{cases},$$

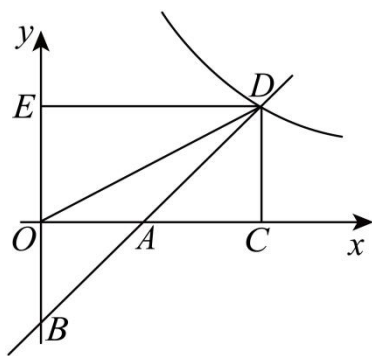
∴ 小明和妈妈乘坐的公交车出发 25 分钟后被爸爸的小轿车追上了.

故答案为: 25.

【点睛】 本题考查了一次函数的应用, 解题的关键是: (1) 根据数量关系, 列式计算; (2) 观察图象找出点的坐标, 利用待定系数法求出函数关系式; (3) 联立两函数关系式成方程组, 通过解方程组求出交点坐标.

B2 部分

22. 如图, 直线 $y = x + b$ ($b \neq 0$) 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点, 交双曲线 $y = \frac{5}{x}$ ($x > 0$) 于点 D , 过点 D 分别作 x 轴、 y 轴的垂线 DC 、 DE , 垂足分别为 C 、 E , 连接 OD .



- (1) 求证: AD 平分 $\angle CDE$;
- (2) 对于任意非零的实数 b , 求证: $AD \cdot BD$ 为定值, 并求出该定值;
- (3) 是否存在直线 AB , 使得点 A 为线段 OC 的中点? 若存在, 求出直线的解析式; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析, 定值为 10

(3) 存在直线 AB , 使得点 A 为线段 OC 的中点, 直线 AB 的解析式为 $y = x - \frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由一次函数解析式可得 $OA = OB = -b$, 即得 $\angle ABO = \angle BAO = 45^\circ$, 得到 $\angle EDB = 45^\circ$, 进而可得 $\angle EDB = \angle CDB = 45^\circ$, 即可求证;

(2) 设点 D 的坐标为 $\left(m, \frac{5}{m}\right)$, 可得 $AC = CD = \frac{5}{m}$, 即得 $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \frac{5\sqrt{2}}{m}$, 同理可得

$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{2}m$, 得到 $AD \cdot BD = \frac{5\sqrt{2}}{m} \times \sqrt{2}m = 10$, 即可求证;

(3) 由点 A 为线段 OC 的中点得 $OA = CA = -b$, 进而可得 $\triangle AOB \cong \triangle ACD (ASA)$, 得到 $CD = OB = -b$, 即得到 $D(-2b, -b)$, 代入反比例函数解析式可得 $b = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 把 $x = 0$ 代入 $y = x + b$, 得 $y = b$; 把 $y = 0$ 代入 $y = x + b$, 得 $x = -b$,

$$\therefore A(-b, 0), B(0, b),$$

$$\therefore OA = OB = -b,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BAO = 45^\circ,$$

$$\therefore DE \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDB = 45^\circ,$$

$$\therefore DC \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle DCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } OCDE \text{ 是矩形},$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ - \angle EDB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\text{即 } \angle EDB = \angle CDB,$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle CDE;$$

【小问 2 详解】

证明: 设点 D 的坐标为 $\left(m, \frac{5}{m}\right)$,

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ, \angle CDB = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 为等腰直角三角形},$$

$$\therefore AC = CD = \frac{5}{m},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{m}\right)^2 + \left(\frac{5}{m}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{m},$$

又由 (1) 可知, $\triangle BED$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore BE = DE = m,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{m^2 + m^2} = \sqrt{2}m,$$

$$\therefore AD \cdot BD = \frac{5\sqrt{2}}{m} \times \sqrt{2}m = 10,$$

$\therefore AD \cdot BD$ 为定值, 定值为 10;

【小问 3 详解】

解: 存在, 理由如下:

当点 A 为线段 OC 的中点时, $OA = CA = -b$,

$$\therefore OC = -2b,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle ACD = 90^\circ, \quad \angle OAB = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle ACD (\text{ASA}),$$

$$\therefore CD = OB = -b,$$

$$\therefore D(-2b, -b),$$

$$\text{把 } D(-2b, -b) \text{ 代入 } y = \frac{5}{x}, \text{ 得 } -b = \frac{5}{-2b},$$

$$\text{解得 } b = -\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ 或 } b = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (不合, 舍去),}$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = x - \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\text{即存在直线 } AB, \text{ 使得点 A 为线段 } OC \text{ 的中点, 直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = x - \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了反比例函数的几何应用, 一次函数的几何应用, 等腰直角三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 矩形的判定和性质, 勾股定理, 掌握以上知识点是解题的关键.