

2024-2025 学年上海市长宁区建青实验学校八年级（下）月考数学试卷

(3 月份)

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列函数中，是一次函数的是 ()

A. $y=x^2+2$

B. $y=\frac{x}{3}$

C. $y=kx+b$

D. $y=\frac{3}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的定义求解即可。一般形如 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$)，叫做一次函数。其中 x 是自变量, y 是因变量。

【详解】解：A、 $y=x^2+2$ 是二次函数，不符合题意；

B、 $y=\frac{x}{3}$ 是一次函数，符合题意；

C、 $y=kx+b$ 中 k 的值有可能等于零，

$\therefore$ 不一定是一次函数，不符合题意；

D、 $y=\frac{3}{x}$ 是反比例函数，不符合题意。

故选：B。

【点睛】此题考查了一次函数的定义，解题的关键是熟练掌握一次函数的定义。一般形如 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$)，叫做一次函数。其中 x 是自变量, y 是因变量。

2. 如果一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过第一象限，且与 y 轴负半相交，那么 ()

A. $k > 0, b > 0$

B. $k > 0, b < 0$

C. $k < 0, b < 0$

D. $k < 0, b > 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一次函数图象与性质，熟练掌握一次函数的性质是解题的关键，根据图像经过第一象限，且与 y 轴负半相交，可得函数图象经过一、三、四象限，即可得到 k, b 的取值范围，进而得到答案。

【详解】解： $\because$ 图像经过第一象限，且与 y 轴负半相交，

$\therefore$ 函数经过一、三、四象限，

$\therefore k > 0, b < 0$ ，

故选：B。

3. 下列方程中，无理方程是 ()

A. $\sqrt{3}x-1=\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{x}+1=\sqrt{5}$ C. $\sqrt{x}+1=\sqrt{2}$ D. $\frac{x}{\sqrt{2}}+1=0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据无理方程的定义求解即可，根号内含有未知数的方程为无理方程.

【详解】解：A、是一元一次方程，故 A 不符合题意；

B、是分式方程，故 B 不符合题意；

C、是无理方程，故 C 符合题意；

D、是一元一次方程，故 D 不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查无理方程，熟练掌握无理方程的定义是解题关键.

4. 下列方程中，有实数解的是 ()

A. $\frac{x-2}{x}=\frac{x-2}{2}$ B. $2x^2+3=0$
C. $\sqrt{x-2}+3=0$ D. $x^2+3x+4=0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，一元二次方程的根的判别式，算术平方根的非负性等知识，解分式方程即可判断选项 A；根据一元二次方程的根的判别式即可判断选项 B、D；根据算术平方根的非负性即可判断选项 C.

【详解】解：A. 两边同时乘以 $2x$ 得： $2x-4=x^2-2x$ ，

解得： $x=2$ ，

经检验， $x=2$ 是原方程的解，故选项 A 符合题意；

B. $\because 2x^2+3=0$ ，

$\therefore \Delta=0-4\times 2\times 3=-24<0$ ，

$\therefore$ 方程无解，故选项 B 不符合题意；

C. $\sqrt{x-2}\geq 0$ ，则 $\sqrt{x-2}+3>0$ 一定成立，故选项 C 不符合题意；

D. $\because x^2+3x+4=0$ ，

$$\therefore \Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times 1 = -7 < 0,$$

$\therefore$ 方程无解，故选项 D 不符合题意；

故选：A.

5. 用换元法解方程 $x^2 + 3x - \frac{20}{x^2 + 3x} = 8$ ，若设 $x^2 + 3x = y$ ，则原方程可化为（ ）

A. $20y^2 + 8y - 1 = 0$

B. $8y^2 - 20y + 1 = 0$

C. $y^2 + 8y - 20 = 0$

D. $y^2 - 8y - 20 = 0$

【答案】D

【解析】

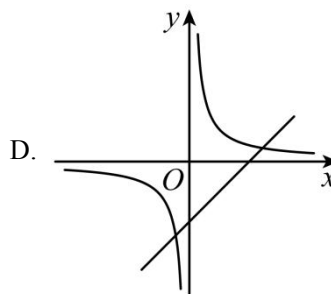
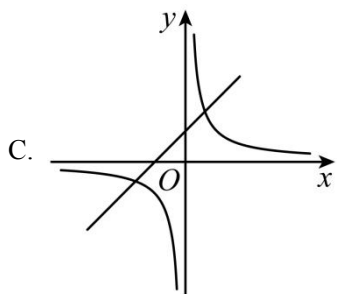
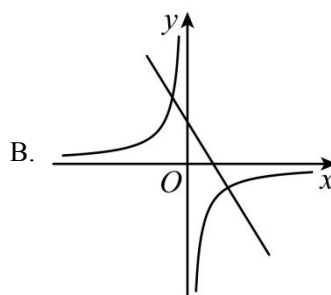
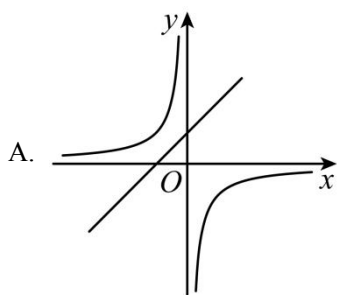
【分析】本题考查了换元法解方程，把 $x^2 + 3x = y$ 代入原方程化简，即可求解.

【详解】解：依题意，把 $x^2 + 3x = y$ 代入原方程得： $y - 20 \times \frac{1}{y} = 8$ ，

方程两边同乘以 y 整理得： $y^2 - 8y - 20 = 0$.

故选：D.

6. 函数 $y = k(x+1)$ 与函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一个直角坐标系中的大致图像可能是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】比例系数相同，两个函数必有交点，然后根据比例系数的符号确定正确选项即可.

【详解】解： $k > 0$ 时，一次函数 $y = k(x + 1)$ 的图象经过第一、二、三象限，
反比例函数的两个分支分别位于第一、三象限，选项 C 符合；
 $k < 0$ 时，一次函数 $y = k(x + 1)$ 的图象经过第二、三、四象限，
反比例函数的两个分支分别位于第二、四象限，无选项符合。
故选 C.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象性质和一次函数的图象性质，要掌握它们的性质才能灵活解题.

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 2 分，共 24 分.

7. 一次函数 $y = 2x - 3$ 的截距是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数图象上点的坐标特征，掌握截距的概念是解题的关键.

根据一次函数 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距是 b 即可得出答案.

【详解】解： $\because$ 在一次函数 $y = 2x - 3$ 中， $b = -3$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 在 y 轴上的截距 $b = -3$.

故答案是： -3.

8. 若直线 $l_1: y = kx + b$ 平行于直线 $l_2: y = -5x + 3$ ，且 l_1 经过点 $(2, -1)$ ，则 $b =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 根据两直线平行可得 $k = -5$ ，再把点 $(2, -1)$ 代入 $y = -5x + b$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 直线 $l_1: y = kx + b$ 平行于直线 $l_2: y = -5x + 3$ ，

$\therefore k = -5$ ，

$\therefore$ 直线 l_1 的解析式为 $y = -5x + b$ ，

把点 $(2, -1)$ 代入 $y = -5x + b$ 得：

$-1 = -5 \times 2 + b$ ，解得： $b = 9$.

故答案为： 9

【点睛】 本题主要考查了一次函数的图象和性质，熟练掌握一次函数的图象和性质是解题的关键.

9. 如果点 $A(-1, a)$ ， $B(1, b)$ 在直线 $y = -2x + m$ 上，那么 a _____ b (填“>、<或=”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 根据一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$, k 、 b 均为常数) 的性质, $k=-2 < 0$, 故 y 随 x 的增大而减小, 据此即可作出判断.

【详解】 解: 在直线 $y=-2x+m$ 中,
 $k=-2 < 0$,

故 y 随 x 的增大而减小,

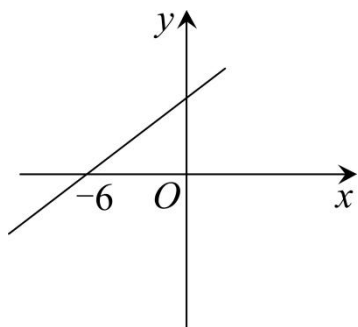
$\because -1 < 1$,

$\therefore a > b$,

故答案为 $>$.

【点睛】 本题考查了一次函数的性质, 要知道, 对于 $y=kx+b$ ($k \neq 0$, k 、 b 均为常数), $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

10. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示, 那么关于 x 的不等式 $kx+b < 0$ 的解集是_____.



【答案】 $x < -6$

【解析】

【分析】 一次函数 $y=kx+b$ 的图象在 x 轴下方时, $y < 0$, 再根据图象写出解集即可.

【详解】 解: 当不等式 $kx+b < 0$ 时, 一次函数 $y=kx+b$ 的图象在 x 轴下方, 因此 $x < -6$.

故答案为: $x < -6$.

【点睛】 此题主要考查了一次函数与一元一次不等式的关系, 关键是能正确利用数形结合的方法解决问题.

11. 方程 $\frac{1}{3}x^3+9=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=-3$

【解析】

【分析】 根据立方根的含义和求法, 求出方程 $\frac{1}{3}x^3+9=0$ 的解是多少即可.

【详解】 解: $\because \frac{1}{3}x^3+9=0$,

$$\therefore x^3 = -27,$$

解得 $x = -3$.

故答案为: $x = -3$.

【点睛】此题主要考查了立方根的含义和求法, 要熟练掌握, 如果一个数 x 的立方等于 a , 即 x 的三次方等于 a ($x^3 = a$), 那么这个数 x 就叫做 a 的立方根, 也叫做三次方根. 读作“三次根号 a ”其中, a 叫做被开方数, 3 叫做根指数.

12. 方程 $(x+2)\sqrt{x+1} = 0$ 的解为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据方程有解, 得出 $x+1 \geq 0$, 求出 x 的取值范围, 再根据原方程得出 $x+2 = 0$ 或 $x+1 = 0$, 求出 x 的值, 从而得出答案.

【详解】解: $\because (x+2)\sqrt{x+1} = 0$,

$\therefore$ 则必须满足 $x+1 \geq 0$, 即 $x \geq -1$,

由原方程得 $x+2 = 0$ 或 $x+1 = 0$,

$\therefore x = -2$ 或 $x = -1$;

$\because x \geq -1$,

$\therefore$ 方程的解为 $x = -1$.

故答案为 -1 .

【点睛】本题考查了无理方程的解, 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法, 解无理方程, 往往会产生增根, 应注意验根.

13. 若关于 x 的一次函数 $y = 3x + m - 3$ 图象与 y 轴交于 $(0, 1)$, 则 m 的值为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】由题意得: 一次函数 $y = 3x + m - 3$ 的与 y 轴交于 $(0, 1)$, 将 $(0, 1)$ 代入函数解析式, 得到 $m - 3 = 1$, 解方程, 即可求得 m 的值.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = 3x + m - 3$ 的与 y 轴交于 $(0, 1)$,

将 $(0, 1)$ 代入函数解析式 $y = 3x + m - 3$,

$\therefore m - 3 = 1$,

$$\therefore m = 4,$$

故答案为：4

【点睛】本题主要考查一次函数的于坐标轴的交点问题，熟练掌握一次函数的图像性质是解题的关键.

14. 若关于 x 的一次函数 $y = (k+1)x + 2$ ， y 随 x 的增大而增大，则 k 的取值范围_____.

【答案】 $k > -1$

【解析】

【分析】利用一次函数与系数的关系， k 、 b 决定着函数图象的位置，在一次函数 $y = kx + b$ 中，当 $k > 0$ ， y 随 x 的增大而增大，当 $k < 0$ ， y 随 x 的增大而减小，即可判断.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = (k+1)x + 2$ ， y 随 x 的增大而增大，

$$\therefore k+1 > 0.$$

$$\therefore k > -1.$$

故填： $k > -1$.

【点睛】本题考查了一次函数与系数的关系，解题的关键是熟练掌握系数 k 的意义.

15. 已知等腰三角形周长为 40cm ，请写出底边长 $y\text{cm}$ 与腰长 $x\text{cm}$ 的函数关系式：_____.

【答案】 $y = 40 - 2x (10 < x < 20)$

【解析】

【分析】三角形的周长等于三边的和，由此得到 $2x+y=40$ ，整理后即可得到答案.

【详解】由题意得 $2x+y=40$,

$$\therefore y = 40 - 2x (10 < x < 20)$$

故答案为： $y = 40 - 2x (10 < x < 20)$.

【点睛】此题考查列函数解析式，正确理解三角形周长的计算方法是解题的关键.

16. 某商店购进了甲乙两种新款电动自行车共 50 辆，其中甲款车的利润为 500 元/辆，乙款车的利润为 550 元/辆，若设甲种车购入 x 辆，销售完这批车的总利润为 y 元，则 y 关于 x 的函数解析式为_____.

【答案】 $y = -50x + 27500$

【解析】

【分析】根据总利润等于两款自行车的利润的和，列出函数关系式，即可求解.

【详解】解：设甲种车购入 x 辆，销售完这批车的总利润为 y 元，根据题意得：

$$y = 500x + 550(50 - x) = -50x + 27500,$$

即 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -50x + 27500$.

故答案为: $y = -50x + 27500$

【点睛】 本题主要考查了列函数关系式, 明确题意, 准确得到等量关系是解题的关键.

17. 直线 $y = kx + 4$ 与坐标轴围成的三角形面积为 8, 则 $k =$ _____.

【答案】 ± 1

【解析】

【分析】 此题考查了一次函数与坐标轴的交点问题, 分别取 $x = 0$ 和 $y = 0$ 求出函数 $y = kx + 4$ 与 x 、 y 轴的交点, 根据与坐标轴围成的三角形面积列方程并解方程即可.

【详解】 解: 当 $x = 0$ 时, $y = 4$

当 $y = 0$ 时, $0 = kx + 4$, 解答 $x = -\frac{4}{k}$,

$\therefore$ 函数 $y = kx + 4$ 与 x 、 y 轴的交点分别为 $(-\frac{4}{k}, 0)$ 、 $(0, 4)$,

根据题意得

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \left| -\frac{4}{k} \right| = 8,$$

解得 $k = \pm 1$

故答案为: ± 1

18. 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 P 以每秒 1cm 的速度从点 A 出发, 沿折线 $AC - CB$ 运动, 到点 B 停止, 过点 P 作 $PD \perp AB$, 垂足为 D , PD 的长 y (cm) 与点 P 的运动时间 x (秒) 的函数图象如图 2 所示, 当点 P 运动 5 秒时, PD 的长是 _____ cm.

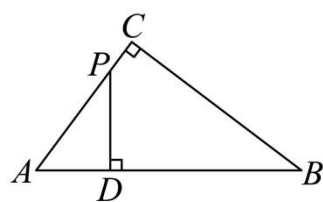


图1

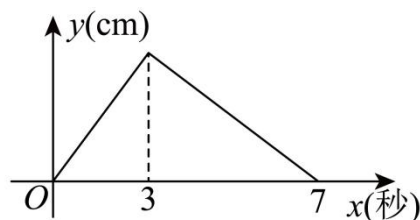


图2

【答案】 1.2

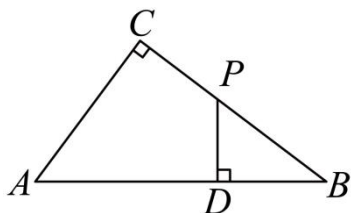
【解析】

【分析】 根据图 2 可判断 $AC = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, 则可确定 $t = 5$ 时 BP 的值, 易证 $\triangle BDP \sim \triangle BCA$, 利用相似三角形的性质即可求出 PD .

【详解】 解: 由图 2 可得, $AC = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5 \text{ cm},$$

当 $t = 5$ 时, 如图所示:



此时 $AC + CP = 5 \text{ cm}$, 故 $BP = AC + BC - AC - CP = 2 \text{ cm}$,

$$\because \angle PDB = \angle ACB = 90^\circ, \quad \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDP \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{PD}{AC} = \frac{BP}{BA},$$

$$\therefore \frac{PD}{3} = \frac{2}{5},$$

解得: $PD = 1.2 \text{ cm}$.

故答案是: 1.2.

【点睛】本题考查了动点问题的函数图象、勾股定理、相似三角形的判定与性质, 解答本题的关键是根据图 2 得到 AC 、 BC 的长度, 此题难度一般.

三、计算题: 本大题共 1 小题, 共 5 分.

19. 已知直线 $y = 2x - 1$ 和直线 $y = -\frac{2}{3}x + 1$. 求:

- (1) 这两条直线的交点 A 的坐标;
- (2) 这两条直线与 x 轴所围成的三角形的面积.

【答案】(1) $A\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(2) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象, 一次函数的交点的问题, 与坐标轴围成的三角形面积问题:

- (1) 联立函数解析式, 解方程组即可求解交点坐标;
- (2) 分别求出两直线与 x 轴交点坐标, 即可确定三角形的底, 再用面积公式求解.

【小问 1 详解】

解：由题意得
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{2}{3}x + 1 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 交点坐标 $A\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$;

【小问 2 详解】

解：对于 $y = 2x - 1$ ，当 $y = 0$ 时， $2x - 1 = 0$ ，解得： $x = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 直线 $y = 2x - 1$ 与 x 轴交于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$;

对于 $y = -\frac{2}{3}x + 1$ ，当 $y = 0$ 时， $-\frac{2}{3}x + 1 = 0$ ，解得： $x = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 直线 $y = -\frac{2}{3}x + 1$ 与 x 轴交于点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，

$\therefore$ 两条直线与 x 轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

四、解答题：本题共 8 小题，共 53 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

20. 解关于 x 的方程 $(a+2)x = 2(x-2)$

【答案】当 $a = 0$ 时，方程无解；当 $a \neq 0$ 时， $x = -\frac{4}{a}$ 。

【解析】

【分析】本题考查了含有字母系数的一元一次方程，解答时注意未知数的字母系数不为零时，才能未知数系数化为 1。

【详解】解：原方程可化为：

$$(a+2)x = 2x - 4,$$

移项，得

$$(a+2)x - 2x = -4,$$

则有 $ax = -4$ ，

当 $a = 0$ 时,

$0 \cdot x = -4$, 方程无解,

当 $a \neq 0$ 时,

$$x = -\frac{4}{a}$$

21. 解方程: $\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2} = 0$.

【答案】 $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了解高次方程, 利用因式分解法即可解方程.

【详解】 解: 方程变形为: $x^4 - 9 = 0$,

$$\therefore (x^2 + 3)(x^2 - 3) = 0.$$

$$\therefore (x^2 + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0.$$

当 $x^2 + 3 = 0$, 即 $x^2 = -3$, x 在实数范围内无解;

所以原方程的解为: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$.

22. 解方程: $\frac{4x-2}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = 3$.

【答案】 $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解法, 解题的关键是先去分母将分式方程转化为整式方程, 求解后务必验根, 确保解使原方程分母不为零.

先对原方程分母因式分解, 确定最简公分母为 $(x+2)(x-2)$; 方程两边同乘最简公分母去分母, 转化为整式方程; 解整式方程得到未知数的值; 将解代入最简公分母验根, 排除增根.

【详解】 解: 原方程可化为 $\frac{4x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{x-2} = 3$

方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$, 得 $4x-2 + (x+2) = 3(x+2)(x-2)$

整理得 $4x-2+x+2=3x^2-12$

即 $5x=3x^2-12$

移项得 $3x^2 - 5x - 12 = 0$

因式分解得 $(3x + 4)(x - 3) = 0$

解得 $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 3$

检验: 当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, $(x+2)(x-2) \neq 0$; 当 $x = 3$ 时, $(x+2)(x-2) \neq 0$

所以原方程的根是 $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 3$.

23. 解方程: $6 - 2\sqrt{x-3} = x$.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程. 原方程可变形为 $6 - x = 2\sqrt{x-3}$, 然后两边平方, 即可转化成整式方程求得 x 的值, 然后代入方程检验即可. 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法,

【详解】 解: 原方程可变形为 $6 - x = 2\sqrt{x-3}$,

方程两边平方, 得 $(6 - x)^2 = 4(x - 3)$,

整理, 得 $x^2 - 16x + 48 = 0$,

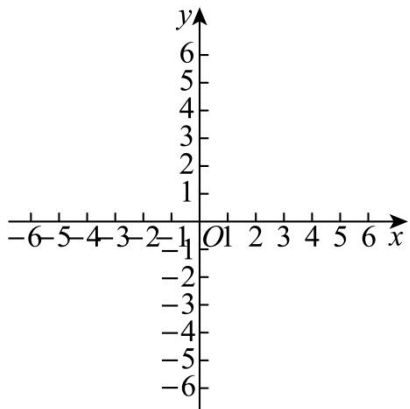
解这个方程, 得 $x_1 = 4$, $x_2 = 12$,

检验: 把 $x = 4$ 代入原方程的两边, 左边 $= 6 - 2\sqrt{4-3} = 4$, 右边 $= 4$, 左边 = 右边, 可知 $x = 4$ 是原方程的根,

把 $x = 12$ 代入原方程的两边, 左边 $= 6 - 2\sqrt{12-3} = 0$, 右边 $= 12$, 左边 $\neq$ 右边, 可知 $x = 12$ 是增根, 应舍去,

所以, 原方程的根是 $x = 4$.

24. 一次函数的图象过点 $(1, 1)$ 且与直线 $y = -2x + 1$ 平行.



- (1) 求这个一次函数的解析式;
(2) 画出这个一次函数的图象.

【答案】(1) $y = -2x + 3$

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查求一次函数解析式，画一次函数图象，解题关键是掌握待定系数法求函数解析式.

- (1) 根据平行直线的 k 值相等即可设一次函数解析式为 $y = -2x + b$ ，再将点 $(1, 1)$ 代入即可求解;
(2) 求出直线与坐标轴交点坐标，利用描点法即可画出直线.

【小问 1 详解】

解：由一次函数的图象与直线 $y = -2x + 1$ 平行，设一次函数解析式为 $y = -2x + b$ ，

∵ 一次函数的图象过点 $(1, 1)$ ，

$$\therefore 1 = -2 + b,$$

解得 $b = 3$ ，

∴ 这个一次函数的解析式为 $y = -2x + 3$ ；

【小问 2 详解】

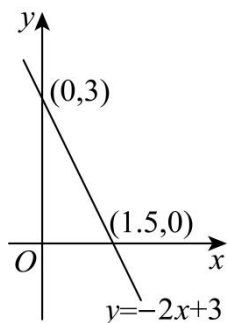
解：在 $y = -2x + 3$ 中，令 $x = 0$ 得 $y = 3$ ，

令 $y = 0$ 得 $0 = -2x + 3$

解得 $x = 1.5$ ，

∴ 一次函数 $y = -2x + 3$ 图象经过 $(0, 3)$ 和 $(1.5, 0)$ ，

描点画出图象如下：



25. 若关于 x 的方程 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x} = \frac{k}{x^2+x}$ 只有一个根，求 k 的值，并直接写出对应的原方程的根.

【答案】当 $k = -\frac{9}{8}$ 时， $x = \frac{1}{4}$ ；当 $k = -1$ 时， $x = \frac{1}{2}$ ；当 $k = 2$ 时， $x = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，由分式方程有且仅有一个实数根，分情况讨论，即可确定出 k 的值即可.

【详解】解: $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x} = \frac{k}{x^2+x}$

方程两边同时乘以 $x(x+1)$ 得: $x(x-1) + (x+1)(x-1) = k$.

整理得: $2x^2 - x - k - 1 = 0$.

$\therefore \Delta = 8k + 9$.

$\therefore$ 原方程只有一个实数根,

$\therefore \Delta = 0$.

即 $8k + 9 = 0$.

解得: $k = -\frac{9}{8}$.

当 $k = -\frac{9}{8}$ 时, 原方程的根为: $x = \frac{1}{4}$.

若整式方程中的 $\Delta > 0$, 则增根为 $x = 0$ 或 $x = -1$,

当 $x = 0$ 时, 代入方程可得, $k = -1$,

此时方程 $2x^2 - x = 0$, 解得: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0$ (舍去)

当 $x = -1$ 时, 代入方程可得, $k = 2$,

此时方程为 $2x^2 - x - 3 = 0$, 解得: $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -1$ (舍去)

综上所述, 当 $k = -\frac{9}{8}$ 时, $x = \frac{1}{4}$; 当 $k = -1$ 时, $x = \frac{1}{2}$; 当 $k = 2$ 时, $x = \frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了分式方程含参问题、一元二次方程根的情况, 熟练掌握分式方程的计算方法和一元二次方程根的判别式当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根, 是解题的关键.

26. 某工厂生产某种产品, 每件产品成本价 25 元, 出厂价为 50 元. 在生产过程中, 每件产品产生 0.5 立方米污水, 工厂有两种方案对污水进行处理.

方案 1: 自行处理, 达标排放. 每处理 1 立方米所用原料费 2 元, 并且每月排污设备损耗费为 30000 元.

方案 2: 污水纳入污水处理厂统一处理, 每处理 1 立方米污水需付 14 元的排污费.

问:

(1) 设工厂每月生产 x 件产品, 每月利润为 y 元, 分别求出依方案 1 和方案 2 处理污水时, y 与 x 的函数关系式.

- (2) 设工厂每月生产量为 6000 件产品时，你采用何种方案才能使企业利润最大，请通过计算加以说明.
- (3) 随着工厂生产量的不同，启用何种方案才能使企业的利润最大.

【答案】 (1) 方案 1: $y = 24x - 30000$; 方案 2: $y = 18x (x \geq 0)$

(2) 工厂采用方案 1 时利润最大，见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的应用和方案设计问题.

(1) 每件产品出厂价为 50，共 x 件，则总收入为： $50x$ ，成本费为 $25x$ ，产生的污水总量为 $0.5x$ ，按方案一处理污水应花费： $0.5x \times 2 + 30000$ ，按方案二处理应花费： $0.5x \times 14$ ．根据利润=总收入-总支出即可得到 y 与 x 的关系；

(2) 根据 (1) 中得到的 x 与 y 的关系，将 $x = 6000$ 代入，比较 y 的大小即可得采用哪种方案工厂利润最多.

(3) 根据 (1) 中得到的 x 与 y 的关系，列不等式即可求解.

【小问 1 详解】

按方案 1 处理污水时， $y_1 = 50x - 25x - 0.5x \times 2 - 30000 = 24x - 30000 (x \geq 0)$.

按方案 2 处理污水时， $y_2 = 50x - 25x - 0.5x \times 14 = 18x (x \geq 0)$;

【小问 2 详解】

当 $x = 6000$ 时， $y_1 = 24 \times 6000 - 30000 = 114000$;

$y_2 = 18 \times 6000 = 108000$.

因为 $y_1 > y_2$,

所以工厂采用方案 1 时所获利润更大.

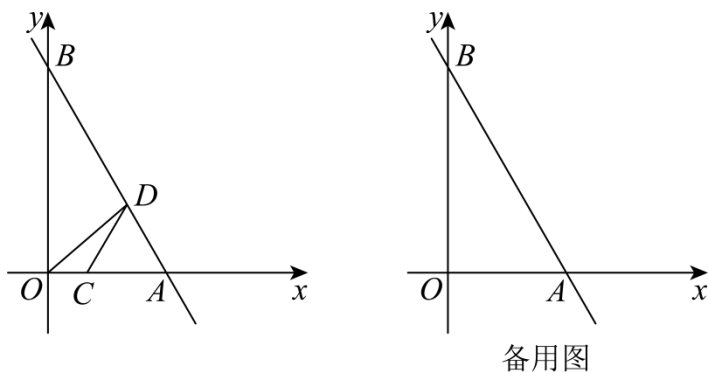
【小问 3 详解】

当 $24x - 30000 > 18x$ 时，解得 $x > 5000$ ，即当每月生产量超过 5000 件时，工厂采用方案 1 时利润更多；

当 $24x - 30000 = 18x$ 时，解得 $x = 5000$ ，即当每月生产量等于 5000 件时，工厂采用任意一种方案的利润相同；

当 $24x - 30000 < 18x$ 时，解得 $x < 5000$ ，即当每月生产量小于 5000 件时，工厂采用方案 2 时利润更多.

27. 已知一次函数 $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ 图象与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点.



(1) 求点 A 、 B 的坐标和 $\angle BAO$ 的度数.

(2) 点 C 、 D 分别是线段 OA 、 AB 上一动点 (不与端点重合), 且 $CD = DA$, 设线段 OC 的长度为 x , $S_{\triangle OCD} = y$, 求出 y 关于 x 的函数关系式及定义域.

(3) 点 C 、 D 分别是射线 OA 、射线 BA 上一动点, 且 $CD = DA$, 当 $\triangle ODB$ 为等腰三角形时, 求点 C 坐标.

【答案】 (1) $A(3,0)$, $B(0,3\sqrt{3})$, $\angle BAO = 60^\circ$

$$(2) y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x \quad (0 < x < 3)$$

(3) 点 C 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(3\sqrt{3}-3,0)$ 或 $(6,0)$

【解析】

【分析】 (1) 根据一次函数与坐标轴的交点坐标的计算方法可求出点 A 、 B 的坐标, 然后根据勾股定理求出 AB , 可得 $AB = 2OA$, 由此可求出 $\angle BAO$ 的度数;

(2) 证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形, 求出 $AD = AC = 3-x$, 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E , 利用勾股定理求出 DE , 然后利用三角形面积公式即可求得 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 分情况讨论: ①当 $DB = DO$ 时; ②当 $BO = BD = 3\sqrt{3}$ 时; ③当 $OB = OD = 3\sqrt{3}$ 时, 分别利用勾股定理, 等边三角形的性质求出 OC 的长, 即可得到对应的点 C 坐标.

【小问 1 详解】

解: 在一次函数 $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ 中,

当 $x=0$ 时, $y=3\sqrt{3}$; 当 $y=0$ 时, 解得: $x=3$;

$$\therefore A(3,0), B(0,3\sqrt{3}),$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOB, AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6, \text{ 即 } AB = 2OA,$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = 60^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: $\because CD = DA, \angle BAO = 60^\circ,$

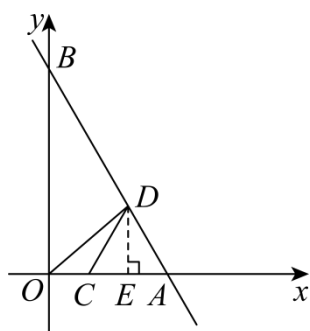
$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,

$$\because OC = x, OA = 3,$$

$$\therefore AC = 3 - x,$$

$$\therefore AD = AC = 3 - x,$$

如图, 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E ,



$$\text{则 } AE = \frac{1}{2} AC = \frac{3}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} OC \cdot DE = \frac{1}{2} x \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x,$$

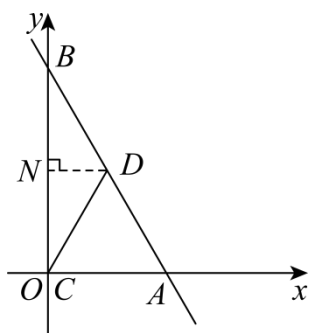
$$\text{即 } y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x (0 < x < 3);$$

【小问 3 详解】

解: 由 (1) (2) 可知, $\triangle ACD$ 是等边三角形, $OA = 3$, $B(0, 3\sqrt{3})$, 则 $OB = 3\sqrt{3}$,

分情况讨论:

①如图, 当 $DB = DO$ 时, 过点 D 作 $DN \perp OB$ 于 N ,



$$\therefore BN = \frac{1}{2}OB = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\because \angle DBN = 30^\circ,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because BN^2 + DN^2 = BD^2,$$

$$\therefore \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = BD^2,$$

$$\therefore BD = 3,$$

由 (1) 知 $AB = 6$,

$$\therefore DA = 6 - 3 = 3,$$

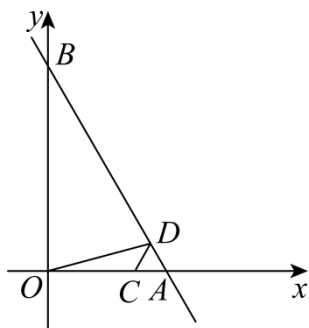
$\because \triangle ACD$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = 3,$$

$$\therefore OA = 3,$$

$\therefore$ 此时点 C 与原点重合, 即 $C(0,0)$;

②如图, 当 $BO = BD = 3\sqrt{3}$ 时, 则 $AD = AB - BD = 6 - 3\sqrt{3}$,



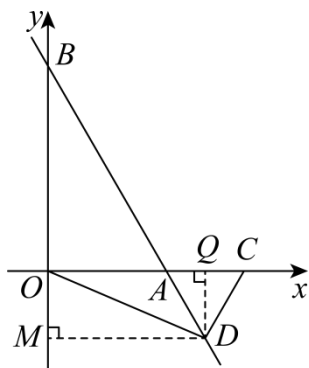
$\because \triangle ACD$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = AD = 6 - 3\sqrt{3}$$

$$\therefore OC = OA - AC = 3 - (6 - 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore C(3\sqrt{3}-3, 0);$$

③如图，当 $OB = OD = 3\sqrt{3}$ 时，过点 D 作 $DM \perp y$ 轴于 M ， $DQ \perp x$ 轴于点 Q ，
则 $\angle OBD = \angle ODB = 30^\circ$ ， $DM \parallel x$ 轴，



$$\therefore \angle OAB = \angle MDB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ODM = 30^\circ,$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2}OD = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore MD = \sqrt{OD^2 - OM^2} = \frac{9}{2},$$

$$\therefore \angle QOM = \angle OMD = \angle DQO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OMDQ$ 是矩形，

$$\therefore OQ = MD = \frac{9}{2},$$

$$\therefore AQ = OQ - OA = \frac{3}{2},$$

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = 2AQ = 3,$$

$$\therefore OC = OA + AC = 6,$$

$$\therefore C(6, 0);$$

综上所述，当 $\triangle ODB$ 为等腰三角形时，点 C 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(3\sqrt{3}-3, 0)$ 或 $(6, 0)$ 。

【点睛】本题考查了一次函数的图象和性质，勾股定理，含 30° 直角三角形的性质，等边三角形的判定和性质，矩形的判定和性质等知识，作出合适的辅助线，正确分类讨论是解题的关键。