

上海市静安区 2025-2026 学年八年级下学期期末考试数学试题

(完成时间: 100 分钟, 满分: 120 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 24 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 满分 18 分, 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上)

1. 因为四边形具有不稳定性, 所以当各边长确定时, 下列选项中不能被确定的是 ()

- | | |
|------------|------------|
| A. 四边形的内角和 | B. 四边形的外角和 |
| C. 四边形的周长 | D. 四边形的面积 |

【答案】 D

【解析】

【分析】 结合四边形不稳定性, 根据内角和、外角和、周长、面积的概念判断各量是否确定即可.

【详解】 解: $\because$ 任意四边形的内角和恒为 360° , 与形状无关, $\therefore$ A 可确定.

$\because$ 任意多边形的外角和恒为 360° , $\therefore$ B 可确定.

$\because$ 四边形各边长确定, 周长为各边长之和, 因此周长固定, $\therefore$ C 可确定.

$\because$ 四边形具有不稳定性, 各边长确定时, 四边形的形状可以改变, 高会发生变化, 因此面积不能确定.

2. 第二象限的点 P 到 x 轴距离为 3, 到 y 轴距离为 2, 则 P 点坐标为 ()

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| A. $(-2, 3)$ | B. $(-3, 2)$ | C. $(2, -3)$ | D. $(3, -2)$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了点的坐标, 根据第二象限内点的横坐标是负数, 纵坐标是正数, 点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值, 到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值解答.

【详解】 解: $\because$ 点 P 在第二象限, 到 x 轴距离为 3, 到 y 轴距离为 2,

$\therefore$ 点 P 的横坐标是 -2 , 纵坐标是 3,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-2, 3)$.

故选: A.

3. 下列函数是正比例函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = x + 1$

C. $y = -\frac{x}{5}$

D. $y = kx$ (k 是常数)

【答案】C

【解析】

【分析】正比例函数定义为：形如 $y = kx$ ，其中 k 是不为 0 的常数的函数是正比例函数.

【详解】解：∵ 选项 A 中 $y = \frac{1}{x}$ 分母含有未知数，不符合定义，∴ A 错误；

∵ 选项 B 中 $y = x + 1$ 常数项 $1 \neq 0$ ，不符合定义，∴ B 错误；

∵ 选项 C 中 $y = -\frac{x}{5} = -\frac{1}{5}x$ ，其中 $k = -\frac{1}{5} \neq 0$ ，符合正比例函数定义，∴ C 正确；

∵ 选项 D 中 $y = kx$ ，未说明 $k \neq 0$ ，当 $k = 0$ 时， $y = 0$ 不是正比例函数，不符合定义，∴ D 错误.

4. 已知一次函数 $y = kx + b$ ，若 $kb > 0$ ，则该函数图象一定经过 ()

A. 第一、二象限

B. 第二、三象限

C. 第三、四象限

D. 第一、四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数图象与系数的关系，熟练掌握一次函数图象与系数的关系是解题的关键. 先由 $kb > 0$ 可判断 k 与 b 同号，再分两种情况讨论函数图象经过的象限，找出两种情况的公共象限即可判断.

【详解】解：∵ $kb > 0$ ，

∴ k 与 b 同号，分以下两种情况：

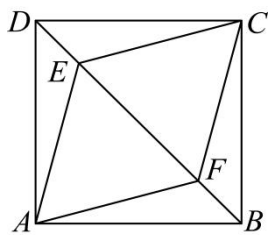
① 当 $k > 0$ ， $b > 0$ 时，则一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、三象限；

② 当 $k < 0$ ， $b < 0$ 时，则一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限；

综上，该函数图象一定经过第二、三象限.

故选：B.

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 在对角线 BD 上 (点 E 、 F 不重合)，连接 AE 、 EC 、 CF 、 FA ，要使四边形 $AECF$ 是菱形，在下列条件中，可以添加的是 ()



- A. $AE = CF$ B. $\angle DAE = \angle DCE$ C. $\angle ECF = 45^\circ$ D. $AD = DF$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正方形的性质可得 BD 垂直平分 AC ，从而得到 $EA = EC$ 、 $FA = FC$ ，要使四边形 $AECF$ 是菱形，只需证明 $EA = EC = CF = FA$ ，结合选项进行判断即可。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ BD 垂直平分 AC ，

∴ $EA = EC$ 、 $FA = FC$ ，

若添加 $AE = CF$ ，则 $EA = EC = CF = FA$ ，

∴ 四边形 $AECF$ 是菱形，

故选项 A 符合题意；

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AD = CD$ ，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases} AD = CD \\ AE = CE \\ ED = ED \end{cases}$$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ (SSS)，

∴ $\angle DAE = \angle DCE$ 恒成立，无法判定四边形 $AECF$ 是菱形，

故 B 不符合题意；

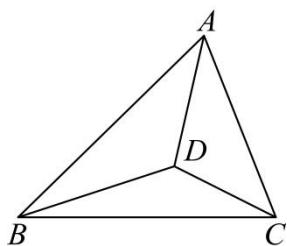
若 $\angle ECF = 45^\circ$ 无法推出 $EA = FA$ ，

故 C 不符合题意；

若 $AD = DF$ 只能确定点 F 的位置，无法确定点 E 的位置，

故 D 不符合题意。

6. 如图，点 D 在 $\triangle ABC$ 内部，且 $\triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ACD$ 的面积分别为 10、8、6。如果 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AG 、 BG 、 CG ，那么下列有关三角形面积大小的说法中，正确的是 ()



A. $S_{\triangle AGC} = S_{\triangle ADC}$

B. $S_{\triangle AGC} = S_{\triangle ABD}$

C. $S_{\triangle BGC} = S_{\triangle BDC}$

D. $S_{\triangle BGC} = S_{\triangle ABD}$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出 $\triangle ABC$ 的总面积，再利用三角形重心的性质求出 $S_{\triangle AGC}$ 和 $S_{\triangle BGC}$ 的值，最后与已知面积进行比较即可得出结论.

【详解】解： $\because \triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ACD$ 的面积分别为10、8、6，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD} = 10 + 8 + 6 = 24,$$

$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore S_{\triangle AGC} = S_{\triangle BGC} = S_{\triangle AGB} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 24 = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle BGC} = S_{\triangle BDC}.$$

二、填空题（本大题共12题，满分36分，请将结果直接填入答题纸的相应位置上）

7. 一个十边形的每一个外角都相等，那么它的一个内角的度数为_____度.

【答案】144°

【解析】

【分析】利用十边形的外角和是360度，并且每个外角都相等，即可求出每个外角的度数；再根据内角与外角的关系可求出每个内角的度数.

【详解】 $\because$ 一个十边形的每个外角都相等，

$$\therefore \text{十边形的一个外角为 } 360 \div 10 = 36^\circ.$$

$$\therefore \text{每个内角的度数为 } 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ.$$

故答案为：144°.

【点睛】此题考查多边形的外角性质及内角与外角的关系. 解题关键在于掌握多边形的外角性质：多边形的外角和是360度. 边形的内角与它的外角互为邻补角.

8. 在平面直角坐标系中, 点 $P(-1, \sqrt{5})$ 到原点 O 的距离为_____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【详解】解: $OP = \sqrt{(-1-0)^2 + (\sqrt{5}-0)^2} = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$

点 $P(-1, \sqrt{5})$ 到原点 O 的距离为 $\sqrt{6}$.

9. 如果一次函数的图像可以由函数 $y = 3x$ 的图像平移得到, 且该一次函数图像与 y 轴的交点坐标为 $(0, -3)$, 那么这个一次函数的表达式为_____.

【答案】 $y = 3x - 3$ 或 $y = -3 + 3x$

【解析】

【详解】解: 设所求一次函数的表达式为 $y = 3x + b$,

将点 $(0, -3)$ 代入 $y = 3x + b$ 得: $b = -3$,

则这个一次函数的表达式为: $y = 3x - 3$.

10. 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在其图像所在的每个象限内均上升, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 0$

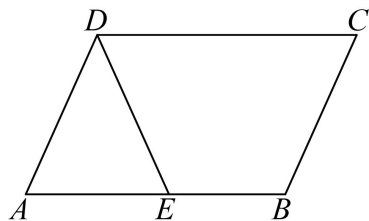
【解析】

【分析】根据反比例函数的增减性即可判断 k 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在其图像所在的每个象限内均上升, 即 y 随 x 的增大而增大,

$\therefore k < 0$.

11. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 以 D 为圆心, BC 长为半径画弧交 AB 边于点 E . 当 $\angle CDE = 75^\circ$ 时, $\angle ADE =$ _____ $^\circ$.



【答案】 30

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质和平行线的性质求出 $\angle AED = \angle CDE = 75^\circ$, 由作图可知 $DE = BC = AD$,

根据等边对等角求出 $\angle A = \angle AED = 75^\circ$ ，然后根据三角形内角和定理求解即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AD = BC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle CDE = 75^\circ,$$

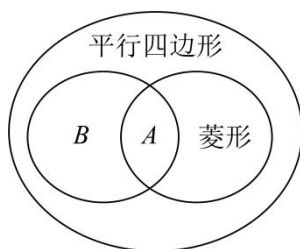
由作图知： $DE = BC$ ，

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore \angle A = \angle AED = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle A - \angle AED = 30^\circ.$$

12. 平行四边形、矩形、菱形、正方形的关系如图所示，其中区域 A、B 分别表示其中的两种图形，那么区域 A 表示的图形具有而区域 B 表示的图形不一定具有的性质是_____ (写出一个即可).



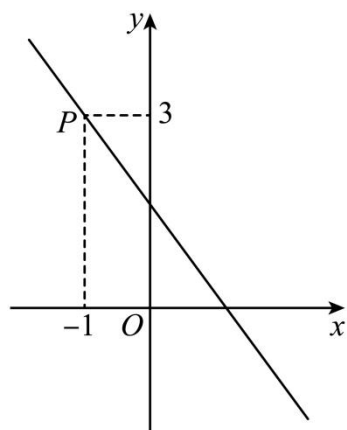
【答案】邻边相等 (或对角线互相垂直)

【解析】

【详解】解：由平行四边形、矩形、菱形、正方形的关系可知，矩形和菱形的公共部分是正方形，根据图示，右侧圆圈表示菱形，则左侧圆圈表示矩形，区域 A 是矩形和菱形的交集，表示正方形，即区域 B 表示矩形，

因此，区域 A 表示的图形具有而区域 B 表示的图形不一定具有的性质是邻边相等 (或对角线互相垂直).

13. 如图，函数 $y = kx + b$ ($k < 0$) 的图像经过点 P ，则关于 x 的不等式 $kx + b > 3$ 的解集为_____.



【答案】 $x < -1$

【解析】

【分析】观察一次函数图像，可知当 $y > 3$ 时， x 的取值范围是 $x < -1$ ，则 $kx + b > 3$ 的解集亦同.

【详解】由一次函数图像得，当 $y > 3$ 时， $x < -1$ ，

则 $y = kx + b > 3$ 的解集是 $x < -1$.

【点睛】本题考查了一次函数与不等式结合，深入理解函数与不等式的关系是解题的关键.

14. 在相互啮合的齿轮的传动中，大齿轮的齿数为 80，每分钟转 20 圈，如果小齿轮的齿数为 x ，每分钟转 y 圈，那么 y 关于 x 的函数表达式为_____.

【答案】 $y = \frac{1600}{x} (x > 0)$

【解析】

【分析】根据相互啮合齿轮每分钟转过的总齿数相等，建立 x 与 y 的等量关系，整理后即可得到 y 关于 x 的函数表达式.

【详解】解：大齿轮每分钟转过的总齿数为： $80 \times 20 = 1600$ ，

小齿轮每分钟转过的总齿数为 xy ，

根据题意得： $xy = 1600$ ，

整理得 $y = \frac{1600}{x}$ ，

由齿数的实际意义可知 $x > 0$ ，

因此， y 关于 x 的函数表达式为 $y = \frac{1600}{x} (x > 0)$.

15. 已知等腰三角形的周长为 10，设腰与底边长分别为 x 和 y ，那么 y 关于 x 的函数表达式为_____。（并写出自变量 x 的取值范围）

【答案】 $y = 10 - 2x \left(\frac{5}{2} < x < 5 \right)$

【解析】

【分析】根据等腰三角形周长公式推导 y 关于 x 的函数表达式，再利用三角形三边关系，即边长为正，两边之和大于第三边，列不等式组求解自变量 x 的取值范围.

【详解】解：根据题意可得： $2x + y = 10$ ，

整理得：函数表达式为 $y = 10 - 2x$ ，

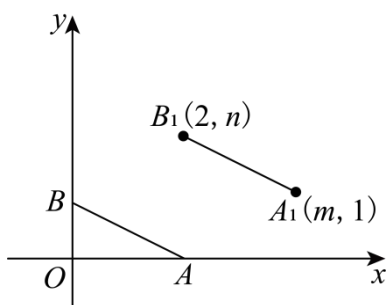
$$\therefore \begin{cases} y > 0 \\ 2x > y \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 10-2x > 0 \\ 2x > 10-2x \end{cases},$$

$$\text{解得: } \frac{5}{2} < x < 5,$$

因此, y 关于 x 的函数表达式为: $y = 10 - 2x \left(\frac{5}{2} < x < 5 \right)$.

16. 如图, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(2,0)$ 、 $(0,1)$. 现将线段 AB 平移至 A_1B_1 , 点 A_1 、 B_1 的坐标分别为 $(m,1)$ 、 $(2,n)$, 那么 $m^2 + n^2$ 的值为_____.



【答案】 20

【解析】

【分析】通过观察点 A 与 A_1 的纵坐标变化, 以及点 B 与 B_1 的横坐标变化, 确定平移的方向和距离, 进而求出 m 和 n 的值, 最后代入计算即可.

【详解】解: $\because$ 点 A 的坐标为 $(2,0)$, 点 A_1 的坐标为 $(m,1)$,

$\therefore$ 纵坐标由 0 变为 1, 增加了 1, 说明向上平移了 1 个单位长度,

$\because$ 点 B 的坐标为 $(0,1)$, 点 B_1 的坐标为 $(2,n)$,

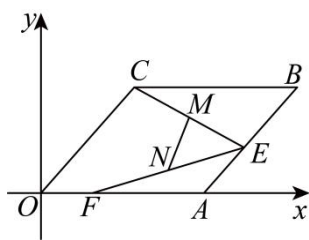
$\therefore$ 横坐标由 0 变为 2, 增加了 2, 说明向右平移了 2 个单位长度,

$\therefore$ 线段 AB 平移至 A_1B_1 的平移方式为: 先向右平移 2 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度,

$$\therefore m = 2 + 2 = 4, \quad n = 1 + 1 = 2,$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 4^2 + 2^2 = 20.$$

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 平行四边形 $OABC$ 的顶点 C 的坐标是 $(2,2)$, 点 E 、 F 分别在边 AB 、 OA 上, 连接 CE 、 EF . 点 M 、 N 分别是 CE 、 EF 的中点, 连接 MN , 那么 MN 的最小值为_____.



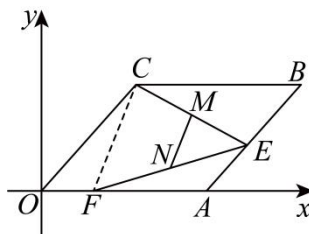
【答案】 1

【解析】

【分析】 连接 CF ，根据三角形中位线定理可得 $MN = \frac{1}{2}CF$ ，根据垂线段最短可知当 $CF \perp OA$ 时 CF 最

短，此时 MN 最小，结合点 C 坐标即可求解.

【详解】 解：连接 CF ，



$\because$ 点 M 、 N 分别是 CE 、 EF 的中点，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}CF,$$

当 CF 有最小值时， MN 为最小值，

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，点 A 在 x 轴上，

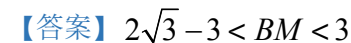
$\therefore$ 点 F 在 x 轴上运动，

$\because$ 点 C 的坐标为 $(2,2)$ ，

$\therefore$ 当 $CF \perp x$ 轴时， CF 的值最小，即最小值为 2，

$$\therefore MN \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

18. 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 AD 上（点 E 与点 A 、 D 不重合），将 $\triangle CDE$ 沿 CE 所在直线翻折，得到 $\triangle CD'E$ ．延长 ED' 交 AB 于点 G ，交 CB 的延长线于点 M ．再将 $\triangle AEG$ 沿 EG 所在的直线翻折，得到 $\triangle A'EG$ ．连接 CG ，如果点 A' 始终落在 $\triangle CEG$ 的内部（不含边界）， $AB = 3$ ，那么 BM 的取值范围是 _____.

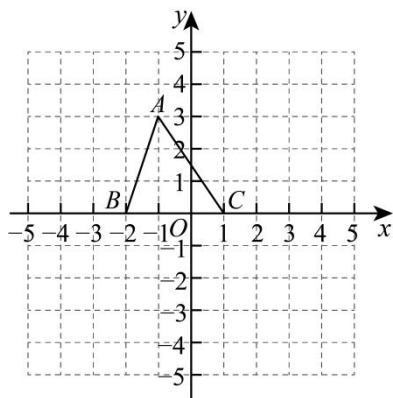


【分析】因为点 A' 始终落在 $\triangle CEG$ 的内部，所以我们可知 $\angle AEG < \angle GEC$ ，临界条件即 $\angle AEG = \angle GEC = \angle DEC = 60^\circ$ 时，恰好落在 EC 上，求出点 A' 从点 D 开始运动到此时 BM 的取值范围即可。

$$\therefore 2\sqrt{3}-3 < BM < 3.$$

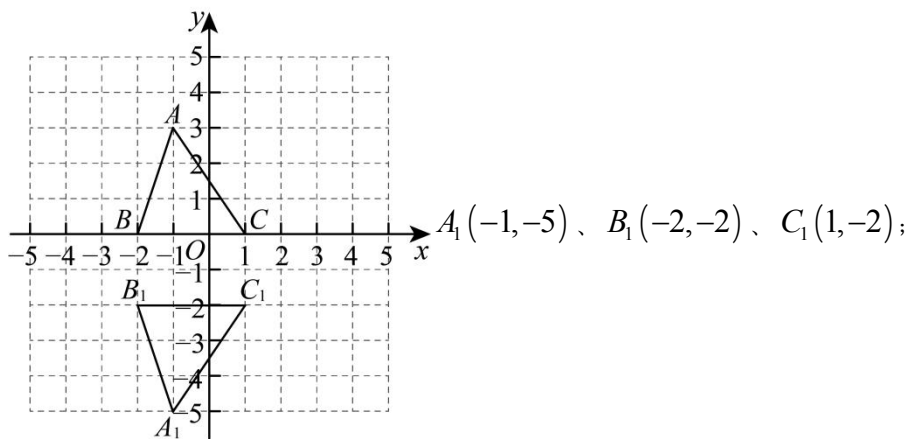
三、解答题（本大题共 6 题，满分 66 分，如无特别说明，本大题作答在答题纸上，须写出证明或计算的主要步骤）

19. 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，三角形的三个顶点坐标分别为 $A(-1,3)$ 、 $B(-2,0)$ 、 $C(1,0)$ 。已知 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于直线 $y = -1$ 成轴对称。

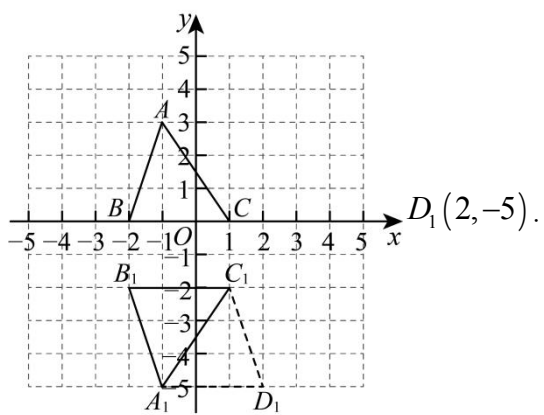


- (1) 在图中画出 $\triangle A_1B_1C_1$ ，并写出 A_1 、 B_1 、 C_1 的坐标；
- (2) 在第四象限内存在一点 D_1 ，使得四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形，在图中画出点 D_1 的位置，并写出 D_1 的坐标。

【答案】(1)



(2)



【解析】

【分析】(1) 作出 $A(-1, 3)$ 、 $B(-2, 0)$ 、 $C(1, 0)$ 关于直线 $y = -1$ 对称的 $A_1(-1, -5)$ 、 $B_1(-2, -2)$ 、 $C_1(1, -2)$ ，连线即可；

(2) 确定点 D_1 在第四象限，使得 $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ 即可。

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

$$\because B_1C_1 = 1 - (-2) = 3,$$

$$\text{设 } D_1(x, -5) (x > 0),$$

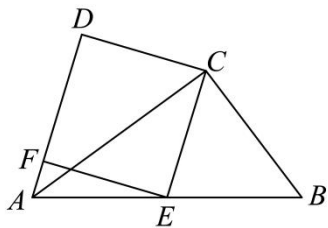
要使 $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ ，且点 D_1 在第四象限，

$$A_1D_1 = x - (-1) = 3,$$

$$\text{解得： } x = 2,$$

$$\therefore D_1(2, -5).$$

20. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中， AC 平分 $\angle DAB$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， E 为 AB 的中点，过点 E 作 $EF \parallel CD$ ，交边 AD 于点 F ，连接 CE 。



(1) 求证：四边形 $CDFE$ 是平行四边形；

(2) 如果 $\angle ADC = 90^\circ$ ， $BC = 6$ ， $AB = 10$ ，求 AF 的长。

【答案】(1) 证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, E 为 AB 的中点,

$$\therefore CE = AE = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACE,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACE,$$

$$\therefore AD \parallel CE,$$

$$\text{又 } EF \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 是平行四边形;

(2) 1.4

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边上中线的性质得出 $CE = AE = \frac{1}{2} AB$, 根据等边对等角得出 $\angle CAE = \angle ACE$, 结合角平分线的定义得出 $\angle CAD = \angle ACE$, 则 $AD \parallel CE$, 然后根据平行四边形的判定即可得证;

(2) 证明平行四边形 $CDFE$ 是矩形, 得出 $CE = DE$, $EF = CD$, $\angle D = 90^\circ$, 根据勾股定理求出 $AC = 8$, 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 根据勾股定理求出 $CD^2 = AC^2 - AD^2 = 8^2 - (5 + AF)^2$, 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, 根据勾股定理求出 $CD^2 = AE^2 - AF^2 = 5^2 - AF^2$, 从而得出 $8^2 - (5 + AF)^2 = 5^2 - AF^2$, 解方程即可.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ADC = 90^\circ$, 四边形 $CDFE$ 是平行四边形,

$\therefore$ 平行四边形 $CDFE$ 是矩形,

$$\therefore CE = DE, EF = CD, \angle D = 90^\circ,$$

$$\because BC = 6, AB = 10, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, E \text{ 为 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2} AB = 5 = DF,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ACD \text{ 中}, CD^2 = AC^2 - AD^2 = 8^2 - (5 + AF)^2,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AEF \text{ 中}, CD^2 = AE^2 - AF^2 = 5^2 - AF^2,$$

$$\therefore 8^2 - (5 + AF)^2 = 5^2 - AF^2,$$

解得 $AF = 1.4$.

21. 小静在使用一款国际天气查询的 APP 时, 发现该 APP 支持摄氏温度与华氏温度的自由切换. 为了了解换算规律, 她记录了 APP 中几个特定温度值的对应关系, 如表所示:

摄氏温度 $x/^{\circ}\text{C}$	...	-10	0	10	25	30	...
华氏温度 $y/^{\circ}\text{F}$	...	14	32	50	77	86	...

- (1) 小静通过描点画图发现华氏温度 y 是摄氏温度 x 的一次函数, 求 y 关于 x 的函数表达式;
- (2) 如果小静查询到当地某日的气温为 95°F , 求当日的摄氏温度;
- (3) 小静认为存在华氏温度与摄氏温度相等的温度值, 你同意吗? 如果同意, 请求出这个温度值; 如果不同意, 请说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{9}{5}x + 32$

(2) 35°C

(3) 同意, 这个温度值为 -40° , 即 $-40^{\circ}\text{C} = -40^{\circ}\text{F}$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法, 代入表格中已知的对应点坐标, 求出一一次函数的系数, 得到函数表达式;

(2) 将已知的华氏温度代入所求解析式, 解一元一次方程得到对应摄氏温度;

(3) 令 $y = x$, 解方程判断是否存在实数解, 若有解则说明存在该温度值.

【小问 1 详解】

解: 设 y 关于 x 的函数表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

将点 $(0, 32)$ 、 $(-10, 14)$ 代入 $y = kx + b$ 得:
$$\begin{cases} b = 32 \\ -10k + b = 14 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k = \frac{9}{5} \\ b = 32 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数表达式为 $y = \frac{9}{5}x + 32$;

【小问 2 详解】

解: 将 $y = 95$ 代入 $y = \frac{9}{5}x + 32$ 得: $\frac{9}{5}x + 32 = 95$,

解得: $x = 35$,

答: 当日的摄氏温度为 35°C ;

【小问 3 详解】

解: 同意小静的说法, 过程如下:

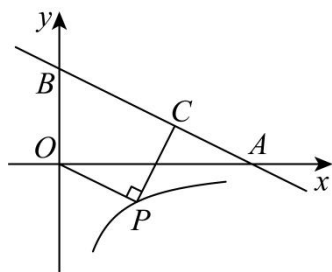
若华氏温度与摄氏温度相等, 则满足 $y = x$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x \\ y = \frac{9}{5}x + 32 \end{cases},$$

解得: $x = -40$,

因此, 存在该温度值, 即 $-40^{\circ}\text{C} = -40^{\circ}\text{F}$.

22. 如图, 已知一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 的图像与 x 轴的正半轴交于点 A , 与 y 轴的正半轴交于点 B , 且 $\triangle AOB$ 的面积为 25.



(1) 求一次函数的表达式;

(2) 已知点 $P(a, -2)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0, x > 0)$ 上. 连接 OP , 将线段 OP 绕点 P 顺时针旋转 90° , 点 O 的对应点记作点 C , 当点 C 恰好落在直线 AB 上时, 求该双曲线的表达式.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x + 5$

(2) $y = -\frac{8}{x}$

【解析】

【分析】(1) 分别令 $x = 0$ 、 $y = 0$, 得出 $A(2b, 0)$, $B(0, b)$, 根据 $\triangle AOB$ 的面积为 25 得出 $\frac{1}{2} \times 2b \cdot b = 25$, 根据点 A 在 x 轴的正半轴上求出 $b = 5$, 即可得出一次函数的表达式;

(2) 过点 P 作 $PE \perp y$ 轴于 E , 过点 C 作 $CD \perp PE$, 交 EP 延长线于 D , 可得 $E(0, -2)$, $OE = 2$, $EP = a$, 根据旋转的性质得出 $PO = PC$, $\angle OPC = 90^\circ$, 根据角的和差关系得出 $\angle EOP = \angle CPD$, 即可证明 $\triangle EOP \cong \triangle DPC$ (AAS), 得出 $PD = OE = 2$, $CD = EP = a$, $DE = a + 2$, $C(a + 2, -2 + a)$, 把 $C(a + 2, -2 + a)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 5$, 解方程可求出 a 的值, 进而可得出双曲线的表达式.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 的图像与 x 轴的正半轴交于点 A , 与 y 轴的正半轴交于点 B ,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = b$, 当 $y = 0$ 时, $x = 2b$,

$\therefore A(2b, 0)$, $B(0, b)$, $b > 0$,

$\therefore OA = 2b$, $OB = b$,

$\therefore \triangle AOB$ 的面积为 25,

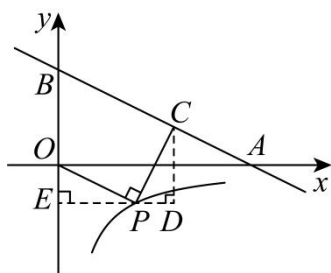
$\therefore \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 2b \cdot b = 25$,

解得: $b = 5$ (负值舍去),

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点 P 作 $PE \perp y$ 轴于 E , 过点 C 作 $CD \perp PE$, 交 EP 延长线于 D ,



$\therefore$ 点 $P(a, -2)$, 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0, x > 0$) 上,

$\therefore a > 0$, $E(0, -2)$, $OE = 2$, $EP = a$,

$\therefore$ 将线段 OP 绕点 P 顺时针旋转 90° ,

$\therefore PO = PC$, $\angle OPC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OPE + \angle CPD = 90^\circ$,

$\therefore \angle OPE + \angle EOP = 90^\circ$,

$\therefore \angle EOP = \angle CPD$,

$$\text{在 } \triangle EOP \text{ 和 } \triangle DPC \text{ 中, } \begin{cases} \angle OEP = \angle CDP = 90^\circ \\ \angle EOP = \angle CPD \\ PO = PC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EOP \cong \triangle DPC (\text{AAS}),$$

$$\therefore PD = OE = 2, \quad CD = EP = a, \quad DE = a + 2,$$

$$\therefore C(a+2, -2+a),$$

$$\because \text{点 } C \text{ 恰好落在直线 } AB \text{ 上, 直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 5,$$

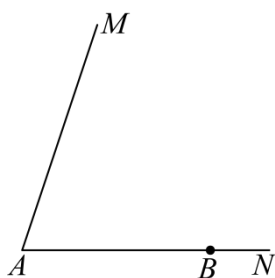
$$\therefore -2+a = -\frac{1}{2}(a+2) + 5,$$

$$\text{解得: } a = 4,$$

$$\therefore k = -2a = -8,$$

$$\therefore \text{该双曲线的表达式为 } y = -\frac{8}{x}.$$

23. 如图, 已知 $\angle MAN = 72^\circ$, 点 B 在边 AN 上.



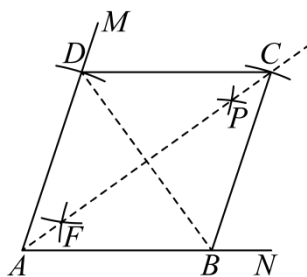
(1) 在图中以 AB 为边长, 求作菱形 $ABCD$, 使点 D 落在射线 AM 上 (尺规作图, 不必写作法, 保留作图痕迹);

(2) 在所作的菱形 $ABCD$ 中完成探究:

① 直接写出这个菱形的其余三个内角的度数: $\angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$, $\angle BCD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$, $\angle ADC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;

② 请设计 2 种分割方法, 把这个菱形恰好分成四个等腰三角形, 在图中画出分割线, 并标出每个等腰三角形的顶角的度数.

【答案】 (1) 如图所示,



根据作图可知, $AB = AD = BC$, AC 是线段 BD 的垂直平分线,

$$\therefore CD = CB,$$

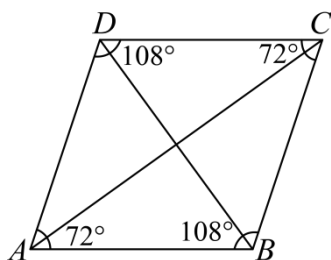
$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 即为所求菱形;

(2)

① 108, 72, 108;

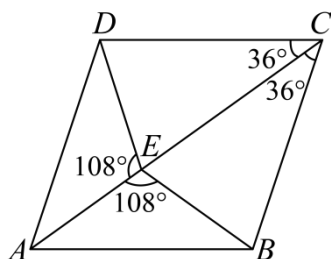
② 方法一: 如图所示, 连接对角线 AC, BD 得到 $\triangle ABD, \triangle CBD, \triangle ADC, \triangle ABC$ 均是等腰三角形,



在 $\triangle ABD$ 中, $AB = AD$, 顶角的度数为 72° ; 在 $\triangle CBD$ 中, $CB = CD$, 顶角的度数为 72° ;

在 $\triangle ADC$ 中, $DA = DC$, 顶角的度数为 108° ; 在 $\triangle ABC$ 中, $BA = BC$, 顶角的度数为 108° ;

方法二: 如图所示, 连接 AC , 以点 C 为圆心, 以 CD 为半径画弧交 AC 于点 E ,



$$\therefore \angle ACD = \angle ACB = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ = \angle DAC = \angle BAC, \quad CD = CE = CB,$$

$\therefore \triangle CDE, \triangle CBE$ 是等腰三角形, 顶角的度数为 36° ,

$$\therefore \angle CDE = \angle CED = \angle CBE = \angle CEB = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ADC - \angle CDE = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ = \angle DAE,$$

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ = \angle BAE,$$

$\therefore \triangle ADE, \triangle ABE$ 是等腰三角形,

$\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle CED = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ, \angle AEB = 180^\circ - \angle CEB = 108^\circ.$

【解析】

【分析】(1) 根据菱形的邻边相等, 对角线相互垂直平分, 且每条对角线平分一组对角的性质作图, 先作邻边相等, 即以点 A 为圆心, 以 AB 长为半径画弧交 AM 于点 D , 连接 BD , 得等腰三角形 $\triangle ABD$, 再作线段 BD 的垂直平分线 FP , 即分别以点 B, D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BD$ 长为半径画弧交于点 F, P , 作直线 FP , 由等腰三角形的性质得到 BD 的垂直平分线经过点 A , 则射线 AP 垂直平分 BD , 最后再作邻边相等, 即以点 B 为圆心, 以 BA 为半径画弧交 AP 于点 C , 连接 BC, DC 即可;

(2) ①根据菱形的性质即可求解;

②根据菱形的性质, 等腰三角形的定义作图即可.

【小问 1 详解】

略;

【小问 2 详解】

解: ① $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle MAN = 72^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle MAN = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ, \angle BCD = \angle MAN = 72^\circ, \angle ADC = \angle ABC = 108^\circ$;

②略.

24. 综合与实践

我们知道, 质量均匀分布、厚度可忽略的薄板, 其重心位置仅与几何形状有关. 通过物理实验可以发现, 三角形的重心是三条中线的交点, 矩形的重心恰好位于其对角线的交点处. 若一个平面图形可被分割为若干规则图形, 我们还可借助平面直角坐标系, 通过研究各部分重心的坐标, 进一步探寻整体重心的位置规律.

如图 1 所示, 已知在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点坐标分别为 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $C(0,6)$.

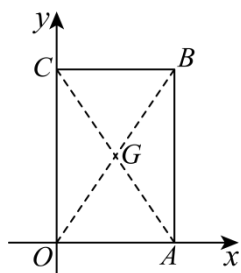


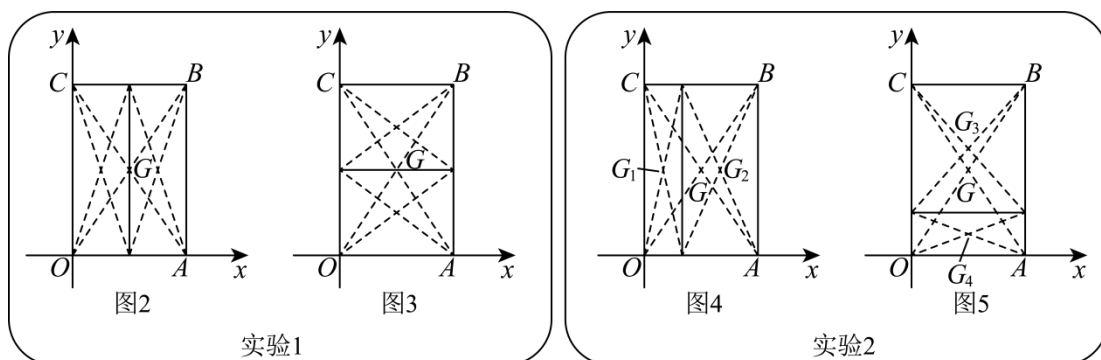
图1

(1) 任务一: 确定矩形的重心

直接写出矩形 $OABC$ 的重心坐标: G (_____, _____).

(2) 任务二：从矩形分割中发现规律

将矩形 $OABC$ 视为一块匀质薄板。下面我们对该矩形进行不同分割，观察各部分重心与整体重心之间的关系。



实验1：分别将矩形 $OABC$ 分成左右或上下两个面积相等的矩形（如图2、3所示），不难得到这两个小矩形的重心坐标。发现：矩形 $OABC$ 的重心就是连接这两部分重心的线段的_____。

小丽提出疑问：“如果两部分面积不相等，刚才的结论还成立吗？”

小杰说：“我觉得不成立。根据物理知识，对于材质均匀、厚度相同的薄板，面积越大质量越大，而质量大的部分对整体重心位置的影响越大，所以整体重心会更偏向面积（质量）大的那部分，至于具体是怎样的规律，我还没得出。”

为了验证小杰的猜想，以及探究重心偏离中点的规律，他们做了第2个实验。

实验2：将矩形 $OABC$ 作如下分割：

分割1：将矩形分成左右两个面积比为1:2的矩形（如图4所示）。

①左侧矩形的面积占整个矩形面积的_____，其重心坐标 G_1 （_____，_____）；

②右侧矩形的面积占整个矩形面积的_____，其重心坐标 G_2 （_____，_____）；

分割2 将矩形分成上下两个面积比为3:1的矩形（如图5所示）。

③上方矩形的面积占整个矩形面积的_____，其重心坐标 G_3 （_____，_____）；

④下方矩形的面积占整个矩形面积的_____，其重心坐标 G_4 （_____，_____）；

根据上述两种分割获得的数据，完成下面填空：

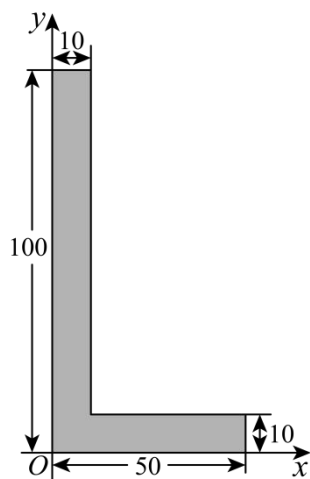
⑤ 分割1：重心 G 的横坐标 $2 = \frac{1}{3} \times \text{_____} + \frac{2}{3} \times \text{_____}$ ，重心 G 的纵坐标 $3 = \frac{1}{3} \times \text{_____} + \frac{2}{3} \times \text{_____}$ ；

⑥ 分割2：重心 G 的横坐标 $2 = \frac{3}{4} \times \text{_____} + \frac{1}{4} \times \text{_____}$ ，重心 G 的纵坐标 $3 = \frac{3}{4} \times \text{_____} + \frac{1}{4} \times \text{_____}$ ；

规律获得：一般地，当一个矩形被分成面积分别为 S_1 、 S_2 的两部分时，如果设这两部分的重心坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ，这个矩形的重心坐标为 (x, y) ，那么： $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（用含 S_1 、 S_2 、 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 的代数式表示）

(3) 任务三 求简单组合图形的重心

将“L”型角钢的横截面放置在平面直角坐标系中（如图所示），结合以上探究所得的规律，根据图中提供的信息确定角钢的横截面的重心坐标为（ $\underline{\hspace{2cm}}$ ， $\underline{\hspace{2cm}}$ ）。



【答案】(1) 2; 3 (2) 实验 1: 中点; 实验 2: ① $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$, 3; ② $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{3}$, 3; ③ $\frac{3}{4}$; 2, $\frac{15}{4}$; ④ $\frac{1}{4}$;

2, $\frac{3}{4}$; ⑤ $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{3}$; 3, 3; ⑥ 2, 2; $\frac{15}{4}$, $\frac{3}{4}$; 规律获得: $\frac{S_1 x_1}{S_1 + S_2} + \frac{S_2 x_2}{S_1 + S_2}$, $\frac{S_1 y_1}{S_1 + S_2} + \frac{S_2 y_2}{S_1 + S_2}$

(3) $\frac{85}{7}$, $\frac{260}{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据中点坐标公式求出 AC 的中点的坐标即可得到答案;

(2) 实验 1: 如图 2 所示, 根据矩形 $OEFC$ 和矩形 $AEFB$ 的面积相等, 可证明 $OE = AE$, 则可求出 $E(2, 0)$, 据此求出点 M 和点 N 的坐标, 则可证明点 G 为 MN 的中点; 如图 3 所示, 根据矩形 $OEFA$ 和矩形 $CEFB$ 的面积相等, 可证明 $AF = BF$, 则可求出 $F(4, 3)$, 据此求出点 M 和点 N 的坐标, 则可证明点 G 为 MN 的中点

实验 2: ①如图 4 所示, 根据矩形 $OEFC$ 的面积与矩形 $AEFB$ 的面积比值为 1:2, 得到

$S_{\text{矩形}OEFC} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形}OABC}$, 则 $E\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, 据此可求出 G_1 的坐标;

②根据矩形 $OEFC$ 的面积与矩形 $AEFB$ 的面积比值为 $1:2$ ，得到 $S_{\text{矩形}AEFB} = \frac{2}{3}S_{\text{矩形}OABC}$ ，根据中点坐标公式可得 G_2 的坐标；

③如图 5 所示，根据矩形 $OEFA$ 的面积与矩形 $CEFB$ 的面积比值为 $1:3$ ，得到 $S_{\text{矩形}OEFA} = \frac{1}{4}S_{\text{矩形}OABC}$ ，

$E\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ，据此可求出 G_3 的坐标；

④根据矩形 $OEFA$ 的面积与矩形 $CEFB$ 的面积比值为 $1:3$ ，得到 $S_{\text{矩形}OEFA} = \frac{1}{4}S_{\text{矩形}OABC}$ ，再根据中点坐标公式可求出 G_4 的坐标；

⑤⑥根据①②③④可得答案；

规律获得：根据⑤⑥可得答案；

(3) 把阴影部分分为矩形 $OABC$ 和矩形 $CEFH$ ，求出两个矩形的面积和对应的重心坐标，再根据规律获得中的结论计算即可。

【小问 1 详解】

解： $\because A(4,0)$ ， $C(0,6)$ ，

$\therefore AC$ 的中点的坐标为 $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$ ，即 $(2,3)$ ，

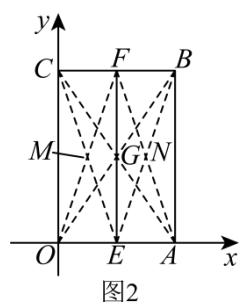
$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$\therefore$ 矩形 $OABC$ 的重心 G 即为 AC 的中点，

$\therefore$ 点 G 的坐标为 $(2,3)$ ；

【小问 2 详解】

解：实验 1：如图 2 所示，



$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$\therefore OC = AB$ ，

$\because$ 矩形 $OEFC$ 和矩形 $AEFB$ 的面积相等，

$$\therefore OC \cdot OE = AB \cdot AE,$$

$$\therefore OE = AE,$$

$\therefore$ 点 E 是 OA 的中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA = 2,$$

$$\therefore E(2,0),$$

$$\therefore \text{矩形 } OEFC \text{ 的重心 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+6}{2} \right), \text{ 即 } (1,3),$$

$$\text{矩形 } AEFB \text{ 的重心 } N \text{ 的坐标为 } \left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+6}{2} \right), \text{ 即 } (3,3),$$

$$\therefore MN \text{ 的中点坐标为 } \left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+3}{2} \right), \text{ 即 } (2,3),$$

$\therefore$ 点 G 为 MN 的中点;

如图 3 所示,

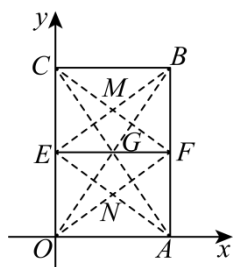


图3

$$\therefore A(4,0), C(0,6).$$

$$\therefore OA = 4, OC = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$$\therefore BC = OA, AB = OC = 6, AB \perp OA,$$

$$\therefore B(4,6),$$

$\therefore$ 矩形 $OEFA$ 和矩形 $CEFB$ 的面积相等,

$$\therefore OA \cdot AF = BC \cdot BF,$$

$$\therefore AF = BF,$$

$\therefore$ 点 F 是 AB 的中点,

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore F(4,3),$$

$$\therefore \text{矩形 } CEFB \text{ 的重心 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{4+0}{2}, \frac{3+6}{2} \right), \text{ 即 } (2, 4.5),$$

$$\text{矩形 } OEFA \text{ 的重心 } N \text{ 的坐标为 } \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+3}{2} \right), \text{ 即 } (2, 1.5),$$

$$\therefore MN \text{ 的中点坐标为 } \left(\frac{2+2}{2}, \frac{4.5+1.5}{2} \right), \text{ 即 } (2, 3),$$

$\therefore$ 点 G 为 MN 的中点;

综上所述, 矩形 $OABC$ 的重心就是连接这两部分重心的线段的中点;

实验 2: ①如图 4 所示,

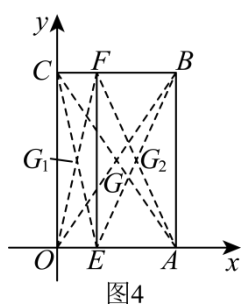


图4

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$$\therefore OC = AB,$$

$\therefore$ 矩形 $OEFC$ 的面积与矩形 $AEFB$ 的面积比值为 $1:2$,

$$\therefore OC \cdot OE : AB \cdot AE = 1:2, \quad S_{\text{矩形}OEFC} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形}OABC},$$

$$\therefore AE = 2OE,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{3} OA = \frac{4}{3},$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, 0\right),$$

$$\therefore \text{矩形 } OEFC \text{ 的重心 } G_1 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{\frac{4}{3}+0}{2}, \frac{0+6}{2} \right), \text{ 即 } \left(\frac{2}{3}, 3 \right);$$

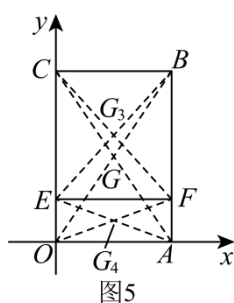
② $\therefore$ 矩形 $OEFC$ 的面积与矩形 $AEFB$ 的面积比值为 $1:2$,

$$\therefore S_{\text{矩形}AEFB} = \frac{2}{3} S_{\text{矩形}OABC},$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, 0\right), B(4, 6),$$

$$\therefore \text{矩形 } AEFB \text{ 的重心 } G_2 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{\frac{4}{3}+4}{2}, \frac{0+6}{2}\right), \text{ 即 } \left(\frac{8}{3}, 3\right);$$

③如图 5 所示,



$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$$\therefore OA = BC,$$

$\therefore$ 矩形 $OEFA$ 的面积与矩形 $CEFB$ 的面积比值为 $1:3$,

$$\therefore OA \cdot OE : BC \cdot CE = 1:3, S_{\text{矩形} OEFA} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形} OABC},$$

$$\therefore CE = 3OE,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{4} OC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore E\left(0, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore \text{矩形 } CEFB \text{ 的重心 } G_3 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{0+4}{2}, \frac{\frac{3}{2}+6}{2}\right), \text{ 即 } \left(2, \frac{15}{4}\right);$$

④ $\therefore$ 矩形 $OEFA$ 的面积与矩形 $CEFB$ 的面积比值为 $1:3$,

$$\therefore S_{\text{矩形} OEFA} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形} OABC},$$

$$\therefore E\left(0, \frac{3}{2}\right), A(4, 0),$$

$$\therefore \text{矩形 } OEFA \text{ 的重心 } G_4 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+\frac{3}{2}}{2}\right), \text{ 即 } \left(2, \frac{3}{4}\right);$$

⑤重心 G 的横坐标 $2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{8}{3}$, 重心 G 的纵坐标 $3 = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 3$;

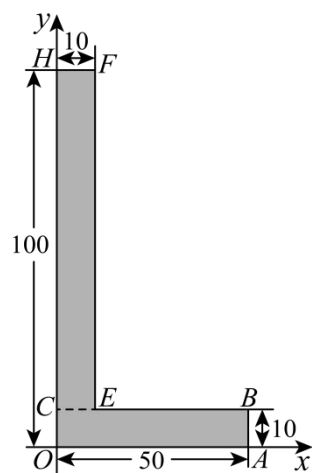
⑥重心 G 的横坐标 $2 = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2$, 重心 G 的纵坐标 $3 = \frac{3}{4} \times \frac{15}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$;

规律获得: 一般地, 当一个矩形被分成面积分别为 S_1 、 S_2 的两部分时, 如果设这两部分的重心坐标分别为

(x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 这个矩形的重心坐标为 (x, y) , 那么: $x = \frac{S_1 x_1}{S_1 + S_2} + \frac{S_2 x_2}{S_1 + S_2}$, $y = \frac{S_1 y_1}{S_1 + S_2} + \frac{S_2 y_2}{S_1 + S_2}$;

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 把阴影部分分为矩形 $OABC$ 和矩形 $CEFH$,



由题意得, $OA = 50, OC = AB = 10$, $B(50, 10)$, $OH = 100, HF = 10$, $F(10, 100)$,

$\therefore CH = OH - OC = 90$, $C(0, 10)$

$\therefore S_{\text{矩形}OABC} = OA \cdot AB = 500$, $S_{\text{矩形}CEFH} = CH \cdot HF = 900$,

$\therefore$ 矩形 $OABC$ 的重心的坐标为 $\left(\frac{0+50}{2}, \frac{10+0}{2}\right)$, 即 $(25, 5)$,

矩形 $CEFH$ 的重心的坐标为 $\left(\frac{0+10}{2}, \frac{10+100}{2}\right)$, 即 $(5, 55)$,

$\therefore$ 角钢的横截面的重心坐标为 $\left(\frac{500 \times 25 + 900 \times 5}{500 + 900}, \frac{500 \times 5 + 900 \times 55}{500 + 900}\right)$, 即 $\left(\frac{85}{7}, \frac{260}{7}\right)$.