

2025 学年第二学期八年级数学学科期末考试

(时间: 100 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 5 题, 每题 3 分, 满分 15 分)

1. 在平面直角坐标系中, 点 $A(1,3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是 ()

- A. $(1,-3)$ B. $(3,1)$ C. $(-1,-3)$ D. $(-1,3)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据关于 x 轴对称的点, 横坐标相同, 纵坐标互为相反数, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 点 A 的坐标为 $(1,3)$, 横坐标为 1, 纵坐标为 3, 3 的相反数是 -3 ,

$\therefore$ 点 $A(1,3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(1,-3)$.

2. 如果反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象位于第二、四象限, 那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k \neq 0$ B. $k \neq 1$ C. $k < 1$ D. $k > 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据反比例函数图象所在象限判断比例系数的符号, 解不等式即可得到 k 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象位于第二、四象限,

$\therefore$ 比例系数 $k-1 < 0$,

解得 $k < 1$.

3. 下列表述中, 两个变量成正比例的是 ()

- A. 小普的身高 h 与他的体重 m
B. 当圆的半径一定时, 弧长 l 与其所对的圆心角 n
C. 圆的面积 S 与其半径 r
D. 当路程一定时, 速度 v 与所需要的时间 t

【答案】B

【解析】

【分析】若两个变量满足 $y = kx$ (k 为不等于 0 的常数), 则两个变量成正比例, 根据定义逐一分析各选项即可.

【详解】解: A、身高 h 与体重 m 没有固定的比值关系, 故两个变量不成正比例, 不符合要求;

B、弧长公式为 $l = \frac{n\pi R}{180}$ ， $\because$ 半径 R 一定， $\therefore k = \frac{\pi R}{180}$ 是不为 0 的常数，可得 $l = kn$ ，符合正比例关系定义，故两个变量成正比例，符合要求；

C、圆面积公式为 $S = \pi r^2$ ， $\frac{S}{r} = \pi r$ 不是定值，故两个变量不成正比例，不符合要求。

D、路程 s 一定时， $s = vt$ ，可得 $v = \frac{s}{t}$ ，两个变量成反比例，不成正比例，不符合要求。

4. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列条件中，能判定该四边形为菱形的是（ ）

- A. $AB = AC$ B. $AC = BD$ C. $AB \perp BC$ D. $AC \perp BD$

【答案】D

【解析】

【分析】根据特殊平行四边形的判定定理逐一判断选项即可。

【详解】解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，逐一判断选项：

选项 A. $AB = AC$ ，无法推出平行四边形邻边相等或对角线垂直，不能判定为菱形，不符合题意；

选项 B. $AC = BD$ ，对角线相等的平行四边形是矩形，不能判定为菱形，不符合题意；

选项 C. $AB \perp BC$ ，即 $\angle ABC = 90^\circ$ ，有一个角是直角的平行四边形是矩形，不能判定为菱形，不符合题意；

选项 D. $AC \perp BD$ ，根据“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”，可判定该平行四边形是菱形，符合题意。

5. 已知将相同质量的金属完全浸入盛满水的杯中，金属的密度与溢出的水的体积成反比例（常见金属密度如表所示）。如果将密度为 $20\text{g}/\text{cm}^3$ 的 A 种金属完全浸入盛满水的杯中，测得溢出的水的体积为 52.5ml ，再将与 A 种金属质量相同的 B 种金属完全浸入盛满水的杯中后，测得溢出的水的体积为 100ml ，那么 B 种金属的种类是（ ）

金属种类	密度（ g/cm^3 ）
金	19.3
银	10.5
铜	8.9
铁	7.9

- A. 金 B. 银 C. 铜 D. 铁

【答案】B

【解析】

【分析】本题利用反比例函数的性质求解，根据密度与溢出体积成反比例得到定值（即金属质量），再计算B金属的密度，对照表格得到结果.

【详解】解：设金属密度为 ρ ，溢出的水的体积为 V ，

$\because$ 金属的密度与溢出的水的体积成反比例，且A，B金属质量相同，

$\therefore \rho V = k$ （ k 为定值，即金属质量），且 $1\text{ml} = 1\text{cm}^3$

将A金属数据代入得： $\rho_A = 20\text{g/cm}^3$ ， $V_A = 52.5\text{ml} = 52.5\text{cm}^3$ ，

$\therefore k = \rho_A V_A = 20 \times 52.5 = 1050$

对B金属， $V_B = 100\text{ml} = 100\text{cm}^3$ ，

$\therefore \rho_B = \frac{k}{V_B} = \frac{1050}{100} = 10.5\text{g/cm}^3$.

对照表格可知，密度为 10.5g/cm^3 的金属是银，因此B种金属为银.

二、填空题（本大题共12题，每题3分，满分36分）

6. 一个十二边形的内角和是_____°.

【答案】 1800° ##1800度

【解析】

【分析】本题考查的是多边形内角和，根据多边形内角和公式计算即可.

【详解】解：一个十二边形的内角和是 $(12-2) \times 180^\circ = 1800^\circ$ ，

故答案为： 1800° .

7. 一次函数 $y = x - 3$ 的图像在 y 轴上的截距是_____.

【答案】-3

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数的性质，即一次函数 $y = kx + b$ （ $k \neq 0$ ）的图象与 y 轴相交于 $(0, b)$ ， b 即为此函数在 y 轴上的截距.

先根据一次函数的解析式判断出 b 的值，再根据一次函数的性质进行解答.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = x - 3$ 中 $b = -3$ ，

∴ 此函数图象在 y 轴上的截距是 -3 .

故答案为: -3 .

8. 如果把正比例函数 $y = 2x$ 的图像向上平移 4 个单位, 那么平移后的图像的表达式为_____.

【答案】

$$y = 2x + 4$$

【解析】

【分析】根据一次函数图象平移规律: 图象向上平移 n 个单位, 平移后函数解析式为原函数解析式加 n , 即可求解.

【详解】解: ∵ 正比例函数 $y = 2x$ 的图像向上平移 4 个单位,

∴ 平移后解析式为 $y = 2x + 4$.

9. 在平面直角坐标系中, 已知点 A 的坐标是 $(4, 2)$, 那么点 A 到 y 轴的距离为_____.

【答案】 4

【解析】

【详解】解: 在平面直角坐标系中, 点到 y 轴的距离等于该点横坐标的绝对值.

已知点 A 的坐标为 $(4, 2)$, 点 A 的横坐标为 4,

因此点 A 到 y 轴的距离为 $|4| = 4$.

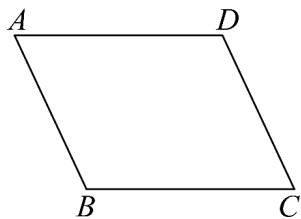
10. 在 $\square ABCD$ 中, 已知 $\angle A + \angle C = 80^\circ$, 则 $\angle D =$ _____.

【答案】 140° ## 140 度

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质, 根据平行四边形对角相等、邻角互补的性质即可求出 $\angle A$, 进而可求出 $\angle D$.

【详解】解: 在 $\square ABCD$ 中有: $\angle A = \angle C$, $AD \parallel BC$,



$$\therefore \angle A + \angle C = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C = 40^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle C = 140^\circ,$$

故答案为: 140° .

11. 已知反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图像上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 如果 $x_1 < x_2 < 0$, 那么

y_1 _____ y_2 (填 “>”、“=” 或 “<”).

【答案】>

【解析】

【分析】本题先根据反比例函数解析式确定比例系数 k 的符号, 再利用反比例函数的性质判断 $x < 0$ 时 y 随 x 的变化规律, 结合已知条件比较 y_1 和 y_2 的大小.

【详解】解: 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中, 比例系数 $k = 2 > 0$,

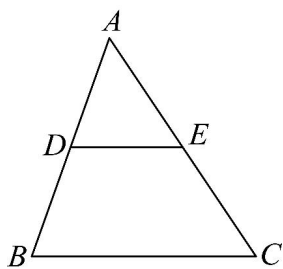
根据反比例函数的性质, 当 $k > 0$ 时, 函数图像的两个分支分别位于第一、三象限, 在每一象限内, y 随 x 的增大而减小

$$\therefore x_1 < x_2 < 0,$$

$\therefore$ 点 $A(x_1, y_1)$ 、点 $B(x_2, y_2)$ 都位于第三象限的函数分支上,

$$\therefore y_1 > y_2.$$

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = 4$, D 、 E 分别为 AB 、 AC 的中点, 设 $DE = x$, $\triangle ABC$ 的周长为 y , 那么 y 关于 x 的函数表达式为_____.



【答案】 $y = 2x + 7$

【解析】

【分析】由题可知 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 则 $BC = 2DE = 2x$, 再求 $\triangle ABC$ 的周长即可.

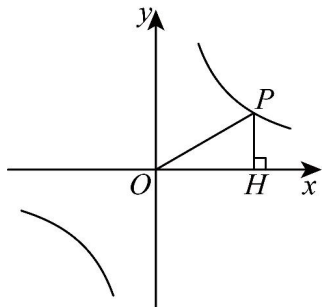
【详解】 $\because D$ 、 E 分别为 AB 、 AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore BC = 2DE = 2x,$$

则 $\triangle ABC$ 的周长为 $y = AB + AC + BC = 3 + 4 + 2x = 2x + 7$.

13. 如图, 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像上, 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 连接 PO , 如果 $\triangle PHO$ 的面积为 3, 那么这个反比例函数的表达式为_____.



【答案】

$$y = \frac{6}{x}$$

【解析】

【分析】根据反比例函数系数 k 的几何意义, 可知 $\triangle PHO$ 的面积等于 $\frac{1}{2}|k|$, 结合图像所在象限确定 k 的符号, 即可求出函数表达式.

【详解】解: 设点 P 的坐标为 (x, y) ,

$\because$ 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上,

$$\therefore xy = k,$$

$\because PH \perp x$ 轴, 垂足为 H ,

$$\therefore OH = |x|, PH = |y|,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PHO \text{ 中, } S_{\triangle PHO} = \frac{1}{2}OH \cdot PH = \frac{1}{2}|x||y| = \frac{1}{2}|xy| = \frac{1}{2}|k| = 3,$$

解得 $|k| = 6$,

由图像可知, 反比例函数图像位于第一、三象限,

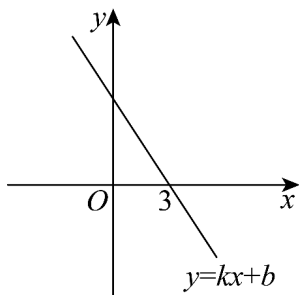
$$\therefore k > 0,$$

$$\therefore k = 6,$$

故这个反比例函数的表达式为 $y = \frac{6}{x}$.

14. 已知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像如图所示, 那么关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是

_____.



【答案】 $x < 3$

【解析】

【分析】 根据一次函数与一元一次不等式的关系，求不等式 $kx + b > 0$ 的解集，即求函数 $y = kx + b$ 的图像在 x 轴上方部分对应的 x 的取值范围.

【详解】 解：由图像可知，一次函数 $y = kx + b$ 的图像与 x 轴的交点坐标为 $(3, 0)$,

$\therefore$ 当 $x < 3$ 时，函数图像位于 x 轴上方，即 $y > 0$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $x < 3$.

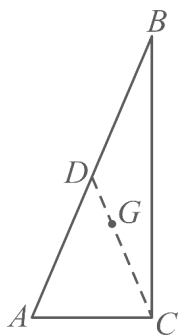
15. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $BC = 12$ ，那么 $\triangle ABC$ 的重心 G 到斜边 AB 的中点的距离是_____.

【答案】 $\frac{13}{6}$

【解析】

【分析】 连接 CG 并延长交 AB 于点 D ， D 即为 AB 的中点，先利用勾股定理求出斜边 AB 的长，再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求出中线 CD 的长，最后根据重心的性质计算 GD 的长即可得到结果.

【详解】 解：连接 CG 并延长交 AB 于点 D ，



$\therefore G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，即 D 为 AB 的中点，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB,$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 5$, $BC = 12$,

$$\therefore \text{由勾股定理得: } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2},$$

根据重心的性质可知, $CG = 2GD$

$$\therefore GD = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3} \times \frac{13}{2} = \frac{13}{6},$$

即 $\triangle ABC$ 的重心 G 到斜边 AB 中点的距离是 $\frac{13}{6}$.

16. 数学家伯努利在 1691 年创立了一种名为“极坐标系”的新坐标系, 如图 1, 在平面上取一定点 O (称为极点), 以 O 为端点向右引射线 Ox (称为极轴) 构成了极坐标系. 在极坐标系内, 对于直线 Ox 上方的任意点 P , 连接 PO , 设线段 PO 的长度为 L , $\angle POx = \theta$, 那么点 P 的极坐标记为 (L, θ) . 如图 2, 在极坐标系内, $OB = 2$, $\angle BOx = 60^\circ$, 则点 B 的极坐标为 $(2, 60^\circ)$. 已知点 $A(2, 0^\circ)$, 如果点 C 在这个极坐标系内, 且四边形 $OACB$ 是菱形, 那么点 C 的极坐标是_____.

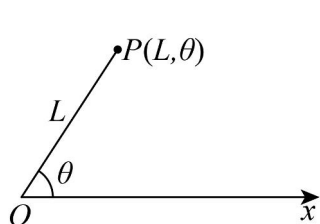


图 1

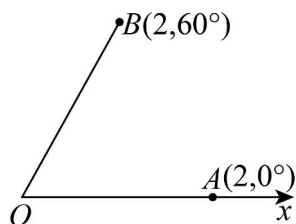


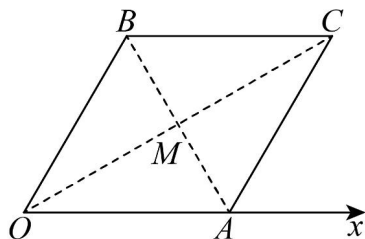
图 2

【答案】 $(2\sqrt{3}, 30^\circ)$

【解析】

【分析】 连接 AB , OC , AB 与 OC 相交于 M . 结合已知条件 $OA = OB = 2$ 及 $\angle AOB = 60^\circ$, 可判定 $\triangle OAB$ 为等边三角形, 得到 AB 的长, 利用菱形的性质及等腰三角形三线合一性质, 求出 OC 的长度及 $\angle COA$ 的度数, 进而确定点 C 的极坐标.

【详解】 解: 如图, 连接 AB , OC , AB 与 OC 相交于 M .



$$\therefore A(2, 0^\circ), B(2, 60^\circ),$$

$$\therefore OA = OB = 2, \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = OA = 2,$$

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是菱形,

$$\therefore OC \text{ 平分 } \angle AOB, OC \perp AB, AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1, OC = 2OM$$

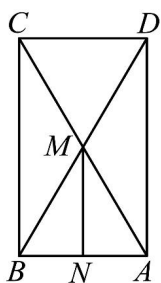
$$\therefore \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore OC = 2OM = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 C 的极坐标为 $(2\sqrt{3}, 30^\circ)$.

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 M , N 为边 AB 的中点, 将 $\triangle AMN$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle AM_1N_1$, 点 M_1 、 N_1 分别与点 M 、 N 对应, 直线 M_1N_1 分别交线段 BD 、 AD 于点 E 、 F . 如果 $\triangle DEF$ 是以 EF 为腰的等腰三角形, 那么 EF 的长是_____.



【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 根据 $\triangle DEF$ 是以 EF 为腰的等腰三角形, 需要分类讨论, 当 $DF = EF$, 利用旋转的性质得出 $\triangle AMN \cong \triangle AM_1N_1$, 利用矩形的性质进一步证明 $\triangle ABM$ 为等边三角形, 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中求解 EF ; 当

$DE = EF$ 时, 先导出 $AF = AM' = 2$, 得出 DF , 再把问题转化为 $EF = \frac{\sqrt{3}}{3} DF$ 进行求解.

【详解】 $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 M ,

$$\therefore BD = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4,$$

$$\therefore AM = BM = AB = 2,$$

$\therefore \triangle ABM$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ABM = \angle BAM = \angle AMB = 60^\circ,$$

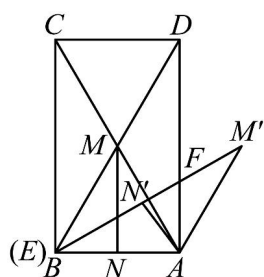
$\because N$ 为边 AB 的中点,

$$\therefore MN \perp AB, AN = BN,$$

将 $\triangle AMN$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle AM_1N_1$,

$$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AM_1N_1,$$

$\because \triangle DEF$ 是以 EF 为腰的等腰三角形, 当 $DF = EF$ 时, 作图如下:



$$\because \angle ABM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle FED = 30^\circ,$$

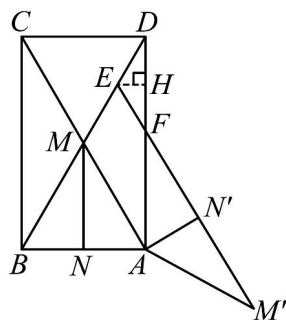
$\therefore B, E$ 两点重合在一起,

$$\therefore \angle AEF = 30^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } \cos \angle AEF = \frac{AB}{EF},$$

$$EF = \frac{AB}{\cos \angle AEF} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3};$$

当 $DE = EF$ 时, 作图如下:



$$\therefore \angle EDF = \angle EFD = \angle AFM' = \angle AM'F = 30^\circ,$$

$$\therefore AF = AM' = 2,$$

$$\therefore DF = AD - AF = 2\sqrt{3} - 2,$$

过点 E 作 DF 的垂线交于 H ,

$$\because DE = EF,$$

$$\therefore DF = 2HF,$$

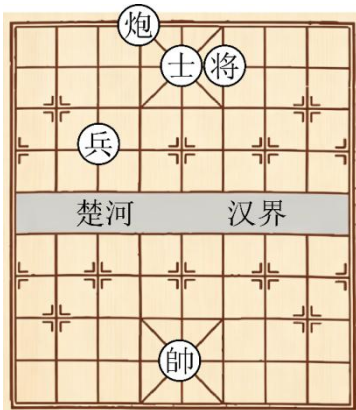
在 $\text{Rt}\triangle EHF$ 中, $\angle EFH = 30^\circ$,

$$\therefore \cos \angle EFH = \frac{HF}{EF},$$

$$\therefore EF = \frac{HF}{\cos \angle EFH} = \frac{HF}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} HF = \frac{\sqrt{3}}{3} DF = \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{3} - 2) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 18 题 5 分, 第 19-21 题每题 6 分, 第 22-23 题每题 8 分, 第 24 题 10 分, 满分 49 分)

18. 如图是一局中国象棋残局, 在图中分别以棋盘横线向右、纵线向上为 x 轴、 y 轴正方向建立平面直角坐标系, 使“兵”所在位置的坐标为 $(-1, 1)$, 棋盘每个小方格的边长为单位长度 (“楚河汉界”所在矩形的短边长为单位长度).



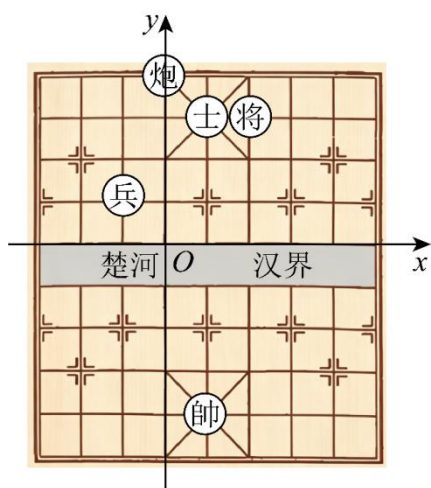
(1) 在图中画出所建立的平面直角坐标系;

(2) 在已建立的平面直角坐标系中,

① “炮”所在位置的坐标是_____; “将”所在位置的坐标是_____; “帅”所在位置的坐标是_____;

② “将”与“帅”所在位置之间的距离是_____.

【答案】 (1) 画出所建立的平面直角坐标系如图:



(2) ① $(0, 4)$, $(2, 3)$, $(1, -4)$; ② $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据“兵”所在位置的坐标为 $(-1, 1)$ ，建立平面直角坐标系即可；

(2) ①根据已建立的平面直角坐标系，写出坐标即可；②利用两点间的距离公式计算即可得出结果.

【小问 1 详解】

略；

【小问 2 详解】

解：在已建立的平面直角坐标系中，

①“炮”所在位置的坐标是 $(0, 4)$ ；“将”所在位置的坐标是 $(2, 3)$ ；“帅”所在位置的坐标是 $(1, -4)$ ；

②“将”与“帅”所在位置之间的距离是 $\sqrt{(2-1)^2 + [3-(-4)]^2} = 5\sqrt{2}$.

19. 已知一次函数 $y = 2x - 4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B .

(1) 求点 A 、 B 的坐标；

(2) 求 $\triangle ABO$ 的面积.

【答案】 (1)

$A(2, 0)$, $B(0, -4)$

(2)

4

【解析】

【分析】 (1) 根据坐标轴上点的坐标特征， x 轴上的点纵坐标为 0， y 轴上的点横坐标为 0，分别代入一次函数解析式，即可求出 A 、 B 两点的坐标；

(2) 由 A 、 B 坐标得到 $\triangle ABO$ 的两条直角边 OA 、 OB 的长度，代入直角三角形面积公式即可求出面积.

【小问 1 详解】

解：已知一次函数解析式为 $y = 2x - 4$ ，

当 $y = 0$ 时，代入得 $2x - 4 = 0$

解得 $x = 2$

$\therefore A(2, 0)$

当 $x = 0$ 时，代入得 $y = 2 \times 0 - 4 = -4$

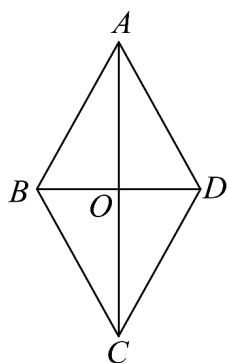
$\therefore B(0, -4)$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 得 $OA = 2$ ， $OB = |-4| = 4$ ， $\angle AOB = 90^\circ$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4.$$

20. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $AB = 10$ ， OA 比 OB 长 2. 求菱形 $ABCD$ 的面积.



【答案】 96

【解析】

【分析】由菱形的性质得 $AC \perp BD$ ， $AC = 2OA$ ， $BD = 2OB$ ，利用勾股定理求出 $OB = 6$ ，再结合菱形的面积公式计算即可得出结果.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ， $AC = 2OA$ ， $BD = 2OB$ ，

$\because OA$ 比 OB 长 2，

$\therefore OA = OB + 2$ ，

由勾股定理得 $OB^2 + OA^2 = AB^2$ ，

$$\therefore OB^2 + (OB + 2)^2 = 10^2,$$

$$\therefore OB = 6 \text{ 或 } OB = -8 \text{ (负值不符合题意, 舍去),}$$

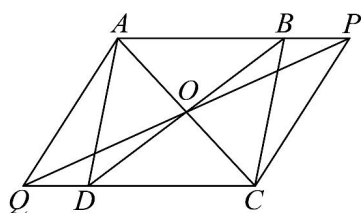
$$\therefore OA = OB + 2 = 8,$$

$$\therefore AC = 16, \quad BD = 12,$$

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96.$$

21. 已知: 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 过点 O 的直线 PQ 分别与 AB 、 CD 的延长线交于点 P 、 Q .

求证: 四边形 $APCQ$ 是平行四边形.



【答案】 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore OA = OC, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle QCO,$$

$$\therefore \angle AOP = \angle COQ,$$

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle COQ (\text{ASA}),$$

$$\therefore OP = OQ,$$

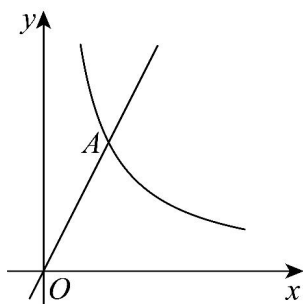
$\therefore$ 四边形 $APCQ$ 是平行四边形.

【解析】

【分析】 由平行四边形的性质可得 $OA = OC$, $AB \parallel CD$, 再证明 $\triangle AOP \cong \triangle COQ (\text{ASA})$, 得出 $OP = OQ$, 即可得证.

【详解】 略

22. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 在第一象限内的图像交于点 $A(2, a)$.



(1) 求 a 和 k 的值;

(2) 点 P 在射线 OA 上, 过点 P 作 $PR \perp x$ 轴, 垂足为 R , 直线 PR 与反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图像交于点 Q ,

如果 $PQ = QR$, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $a = 4$, $k = 2$;

(2) 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 (1) 点 $A(2, a)$ 代入反比例函数 $y = \frac{8}{x}$, 即可求出 a , 进而确定点 A 坐标; 再将 A 代入正比例函数 $y = kx$, 即可求出 k ;

(2) 由射线 OA 解析式为 $y = 2x$, 设点 P 横坐标为 $m (m > 0)$, 则 $P(m, 2m)$; 由 $PR \perp x$ 轴得 $R(m, 0)$, 直线 PR 与反比例函数交点为 $Q\left(m, \frac{8}{m}\right)$. 根据 $PQ = QR$ 列绝对值方程 $\left|2m - \frac{8}{m}\right| = \frac{8}{m}$, 分 $m \geq 2$ 、 $0 < m < 2$ 两类求解, 舍去无效解后得 $m = 2\sqrt{2}$, 即可得到点 P 坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $A(2, a)$ 在反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图像上,

$$\therefore a = \frac{8}{2} = 4,$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 4)$,

又 $\because$ 点 $A(2, 4)$ 在直线 $y = kx$ 上,

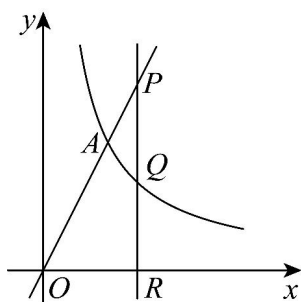
$$\therefore 4 = 2k$$

解得 $k = 2$,

综上所述, $a = 4$, $k = 2$;

【小问 2 详解】

解: 如图,



由 (1) 可知, 射线 OA 的解析式为 $y = 2x$,

$\therefore$ 点 P 在射线 OA 上,

$\therefore$ 设点 P 的横坐标为 $m (m > 0)$, 则点 P 的坐标为 $(m, 2m)$,

$\therefore PR \perp x$ 轴, 垂足为 R ,

$\therefore$ 点 R 的坐标为 $(m, 0)$,

$\therefore$ 直线 PR 与反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 交于点 Q ,

$\therefore y = \frac{8}{m}$, 即 $Q\left(m, \frac{8}{m}\right)$,

$\therefore PQ = \left|2m - \frac{8}{m}\right|$, $QR = \frac{8}{m} - 0 = \frac{8}{m}$,

$\therefore PQ = QR$,

$\therefore \left|2m - \frac{8}{m}\right| = \frac{8}{m}$,

当 $m \geq 2$ 时, 即 $2m \geq \frac{8}{m}$,

此时 $2m - \frac{8}{m} = \frac{8}{m}$

$$2m^2 = 16$$

$$m^2 = 8$$

解得 $m = 2\sqrt{2}$ (舍去负根), 符合 $m \geq 2$;

当 $0 < m < 2$ 时, 即 $2m < \frac{8}{m}$,

$$\frac{8}{m} - 2m = \frac{8}{m}$$

$$-2m = 0$$

解得 $m = 0$, 不符合 $m > 0$, 舍去,

综上所述， $m = 2\sqrt{2}$ ，此时 $2m = 4\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ 。

23. 随着低空物流的发展，城市配送无人机广泛投入使用。某物流公司购买了一批同一型号的物流无人机，用于开展一项新型配送业务。物流公司收到订单后，用满电电能的无人机从仓库出发运送货物至指定地点，以下为该型号物流无人机的相关资料。

资料 1	无人机的相关数据如图所示  最大电能：2000W·h 最大载重：30kg																			
资料 2	已知在规定载重范围内，忽略空气阻力等干扰因素，无人机匀速飞行的速度 v （单位：km/h）可以看作其载重 m （单位：kg）的一次函数，下表为此无人机载重情况与相应飞行速度的部分数据。 <table><tr><td>载重 m（单位：kg）</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>飞行速度 v（单位：km/h）</td><td>72</td><td>69.84</td><td>67.68</td><td>65.52</td><td>63.36</td><td>61.2</td></tr></table>						载重 m （单位：kg）	0	2	4	6	8	10	飞行速度 v （单位：km/h）	72	69.84	67.68	65.52	63.36	61.2
载重 m （单位：kg）	0	2	4	6	8	10														
飞行速度 v （单位：km/h）	72	69.84	67.68	65.52	63.36	61.2														
资料 3	已知无人机飞行时功率恒定，每公里消耗电能 y （单位：W·h）与其飞行速度 v （单位：km/h）成反比例，当飞行速度为 72km/h 时，每公里消耗电能为 70W·h。																			

根据上述资料，回答下列问题：

- (1) 根据资料 3，每公里消耗电能 y 关于飞行速度 v 的函数表达式为_____；
- (2) 根据资料 1 和 2，飞行速度 v 关于其载重 m 的函数表达式为_____，自变量 m 的取值范围是_____；
- (3) 该物流公司收到的一份订单，需要给距离仓库 18km 的某地配送重量为 20kg 的货物，请结合以上资料，判断该无人机能否完成这份订单？（在电能耗尽前能送到指定地点即可完成订单，不考虑其它因素）

- 【答案】(1) $y = \frac{5040}{v}$
- (2) $v = -1.08m + 72$ ， $0 \leq m \leq 30$
- (3) 能完成订单

【解析】

【分析】(1) 设每公里消耗电能 y 关于飞行速度 v 的函数表达式为 $y = \frac{k}{v} (k \neq 0)$ ，再结合当飞行速度为 72km/h 时，每公里消耗电能为 70W·h，计算即可得出结果；

(2) 设飞行速度 v 关于其载重 m 的函数表达式为 $v = k_1 m + b (k_1 \neq 0)$ ，利用待定系数法计算即可得出结果；

(3) 求出飞行 18km 的总耗电量，比较即可得出结果.

【小问 1 详解】

解：设每公里消耗电能 y 关于飞行速度 v 的函数表达式为 $y = \frac{k}{v} (k \neq 0)$ ，

$\therefore$ 当飞行速度为 72km/h 时，每公里消耗电能为 70W·h，

$$\therefore 70 = \frac{k}{72},$$

$$\therefore k = 5040,$$

$$\therefore \text{每公里消耗电能 } y \text{ 关于飞行速度 } v \text{ 的函数表达式为 } y = \frac{5040}{v};$$

【小问 2 详解】

解：设飞行速度 v 关于其载重 m 的函数表达式为 $v = k_1 m + b (k_1 \neq 0)$ ，

将 $(0, 72)$ 和 $(2, 69.84)$ 代入函数表达式 $v = k_1 m + b (k_1 \neq 0)$ 得 $\begin{cases} 2k_1 + b = 69.84 \\ b = 72 \end{cases}$ ，

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = -1.08 \\ b = 72 \end{cases},$$

$$\therefore \text{飞行速度 } v \text{ 关于其载重 } m \text{ 的函数表达式为 } v = -1.08m + 72,$$

由资料 1 知最大载重为 30kg，且载重 $m \geq 0$ ，

$$\therefore \text{自变量 } m \text{ 的取值范围是 } 0 \leq m \leq 30;$$

【小问 3 详解】

解：当 $m = 20\text{kg}$ 时， $v = -1.08m + 72 = -1.08 \times 20 + 72 = 50.4 (\text{km/h})$ ，

$$\text{将 } v = 50.4 \text{ 代入 } y = \frac{5040}{v} \text{ 得 } y = \frac{5040}{50.4} = 100 (\text{W} \cdot \text{h} / \text{km}),$$

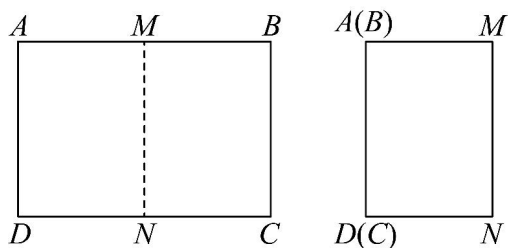
$$\text{飞行 } 18\text{km} \text{ 的总耗电量: } 100 \times 18 = 1800 (\text{W} \cdot \text{h}),$$

$$\therefore \text{最大电能为 } 2000\text{W} \cdot \text{h}, \text{ 且 } 1800 < 2000,$$

$\therefore$ 能完成订单.

24. 生活中 A4 纸相邻两边的长度之比为 $\sqrt{2}:1$. 我们把相邻两边的长度之比为 $\sqrt{2}:1$ 的矩形称为“白银矩形”，A4 纸就是白银矩形.

(1) 如图, 已知矩形纸片 $ABCD$ 为白银矩形 ($AB > BC$), $AB = 2\sqrt{2}$, 对折矩形纸片 $ABCD$, 使 BC 与 AD 重合, 折痕为 MN ,



① $AM =$ _____; $AD =$ _____;

② 四边形 $ADNM$ _____ 白银矩形 (填 “是” 或 “不是”).

(2) 小普手里有一张正方形纸片 $ABCD$, 如何通过折纸在正方形纸片 $ABCD$ 上折出一个白银矩形呢? 小普想到了如下的折纸方法:

第一步: 对折正方形纸片 $ABCD$, 使点 B 、 D 重合, 得到折痕 AC , 展开纸片, 再用相同方法得到折痕 BD , 记 AC 与 BD 的交点为点 O (如图 1);

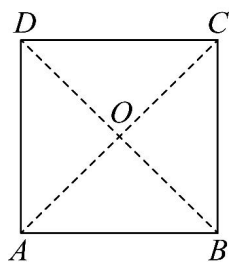


图1

第二步: 再次折叠纸片, 使点 B 落在 AC 上, 且使折痕经过点 C , 得到折痕 CP , 且 P 在边 AB 上, 记 BC 上与点 O 重合的点为 E , 展开纸片 (如图 2);

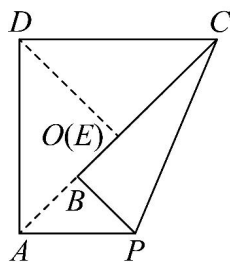


图2

第三步: 继续折叠纸片, 使点 B 落在 CE 上, 且使折痕经过点 E , 得到折痕 EF , 且 F 在边 AD 上, 展开纸片 (如图 3);

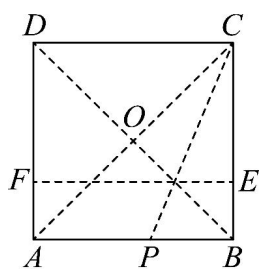
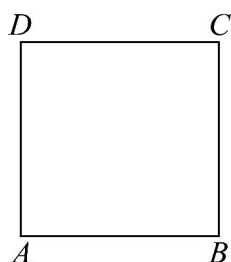


图3

四边形 $CDFE$ 为白银矩形.

问题：如何证明四边形 $CDFE$ 是白银矩形？请写出证明过程.

(3) 请用一张正方形纸片，设计与第 (2) 小题不同的折纸方案，折出一个白银矩形，并仿照第 (2) 小题的折纸过程，简要写出折叠方法.



备用图

【答案】(1) ① $\sqrt{2}$ ，2，②是

(2) 证明：设正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，则 $AB = BC = CD = AD = a$ ，
 $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$ ， $OC = \frac{1}{2}AC$ ，

$$\therefore AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$\therefore$ 折叠纸片，使点 B 落在 AC 上，且使折痕经过点 C ，得到折痕 CP ，且 P 在边 AB 上，记 BC 上与点 O 重合的点为 E ，展开纸片，

$$\therefore CE = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$\therefore$ 折叠纸片，使点 B 落在 CE 上，且使折痕经过点 E ，得到折痕 EF ，且 F 在边 AD 上，展开纸片，

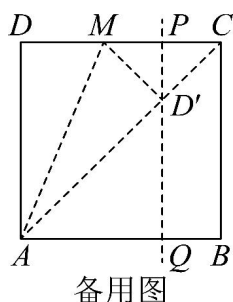
$$\therefore \angle CEF = \angle DFE = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 为矩形，

$$\therefore \frac{CD}{CE} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 为白银矩形；

(3) 如图：第一步：将正方形 $ABCD$ 对折，使点 B 、 D 重合，得到折痕 AC ，展开纸片，
第二步：再次折叠纸片，使点 D 落在 AC 上，即为 D' ，得到折痕 AM ，且 M 在边 CD 上，展开纸片，
第三步：继续折叠纸片，使点 C 与点 M 重合，得到折痕 PQ ，且 Q 在边 AB 上， P 在 CD 边上，展开纸片，
则四边形 $ADPQ$ 为白银矩形，



【解析】

【分析】(1) ①根据“白银矩形”的定义和折叠的性质计算即可得出结果；②根据“白银矩形”的定义判断即可得出结果；

(2) 由正方形的性质可得 $AB = BC = CD = AD = a$ ， $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$ ，
 $OC = \frac{1}{2}AC$ ，求出 $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，由折叠的性质得出 $CE = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，
 $\angle CEF = \angle DFE = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$ ，再根据“白银矩形”的定义判断即可得证；

(3) 仿照第(2)小题的折纸过程，并根据“白银矩形”的定义，写出简要方法即可。

【小问1详解】

解：① $\because$ 矩形纸片 $ABCD$ 为白银矩形 ($AB > BC$)， $AB = 2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,$$

由折叠的性质可得 $AM = BM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$ ；

②由折叠的性质得 $\angle AMN = \angle DNM = \angle A = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADNM$ 为矩形，

由①得 $AD=2$, $AM=\sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{AD}{AM} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ADNM$ 是白银矩形;

【小问 2 详解】

略;

【小问 3 详解】

略.