

2025 学年第二学期初二数学期末质量调研试卷

(完卷时间: 100 分钟 满分: 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列函数图像是双曲线的是 ()

- A. $y = 5x$ B. $y = 5$ C. $y = \frac{1}{5}x$ D. $y = \frac{1}{5x}$

【答案】D

【解析】

【分析】只需判断各选项的函数类型, 根据反比例函数的图像是双曲线即可得到答案.

【详解】解: 选项 A、 $y = 5x$ 是正比例函数, 图像为过原点的直线, 不符合要求;

选项 B、 $y = 5$ 是常函数, 图像为平行于 x 轴的直线, 不符合要求;

选项 C、 $y = \frac{1}{5}x$ 是正比例函数, 图像为过原点的直线, 不符合要求;

选项 D、 $y = \frac{1}{5x}$ 可变形为 $y = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x}$, 属于反比例函数, 反比例函数的图像是双曲线, 符合要求.

2. 一次函数 $y = 2x + 5$ 的图像不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据一次函数解析式中 k 和 b 的符号, 判断函数图像经过的象限, 即可得到不经过的象限;

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = 2x + 5$ 中, $k = 2 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大, 函数图像从左下向右上倾斜,

又 $\because b = 5 > 0$,

$\therefore$ 函数图像与 y 轴交于 y 轴正半轴,

因此函数图像经过第一、二、三象限,

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x + 5$ 的图像不过第四象限.

3. 一个多边形的每个外角均为 72° , 则这个多边形是 ()

- A. 八边形 B. 七边形 C. 六边形 D. 五边形

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查的是多边形的内角和与外角和，然后根据外角和为 360° 即可求得多边形的边数.

【详解】 解： $\because$ 多边形外角和为 360° ，

$\therefore$ 多边形的外角个数为： $360^\circ \div 72^\circ = 5$ ，

$\therefore$ 这个多边形是五边形.

故选： D.

4. 下列函数变量 y 随变量 x 的增大而减小的是 ()

A. $y = \frac{3}{x}$

B. $y = -\frac{3}{x}$

C. $y = -3x$

D. $y = 3x$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数与反比例函数的增减性，根据两种函数的性质逐一判断各选项即可.

【详解】 A 选项 $y = \frac{3}{x}$ 是反比例函数 $k = 3 > 0$ y 仅在每个象限内随 x 增大而减小，在全体定义域内不满足 y 随 x 增大而减小，故 A 错误；

B 选项 $y = -\frac{3}{x}$ 是反比例函数 $k = -3 < 0$ y 在每个象限内随 x 增大而增大，故 B 错误；

C 选项 $y = -3x$ 是正比例函数 $\because k = -3 < 0 \therefore y$ 随 x 的增大而减小，故 C 正确；

D 选项 $y = 3x$ 是正比例函数 $\because k = 3 > 0 \therefore y$ 随 x 的增大而增大，故 D 错误.

5. 下列命题中，真命题的是 ()

A. 对角线互相垂直的四边形是菱形

B. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

C. 对角线相等的四边形是矩形

D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理进行判断即可.

【详解】 对角线互相垂直且平分的四边形是菱形，故 A 是假命题；

对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形，故 B 是假命题；

对角线相等且平分的四边形是矩形，故 C 是假命题；

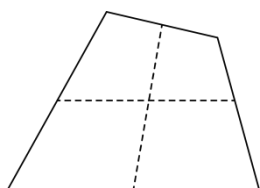
对角线互相平分的四边形是平行四边形，故 D 是真命题.

故选 D.

【点睛】 本题考查了命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关

键是要熟悉课本中的性质定理.

6. 如图将一张四边形纸片沿两组对边中点连线剪开, 得到 4 张小纸片, 用这 4 张小纸片一定可以拼成一个 ()



- A. 正方形 B. 形 C. 菱形 D. 平行四边形

【答案】D

【解析】

【分析】将四边形 $GOHD$ 绕点 H 顺时针旋转 180° 到四边形 $PQHC$, 将四边形 $BEOF$ 绕点 F 顺时针旋转 180° 到四边形 $CMJF$, 将四边形 $AGOE$ 平移到四边形 $CPNM$, 得到四边形 $OQNJ$, 解答即可.

【详解】解: 将四边形 $GOHD$ 绕点 H 顺时针旋转 180° 到四边形 $PQHC$,

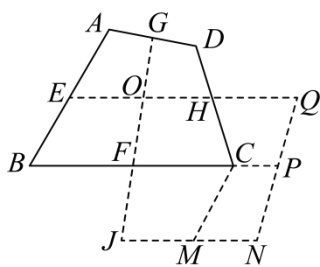
则 $\angle GOH = \angle Q$,

$\therefore OF \parallel PQ$,

将四边形 $BEOF$ 绕点 F 顺时针旋转 180° 到四边形 $CMJF$,

则 $\angle EOF = \angle J$,

$\therefore OH \parallel JM$,



将四边形 $AGOE$ 平移到四边形 $CPNM$,

得到四边形 $OQNJ$,

故四边形 $OQNJ$ 是平行四边形.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 直线 $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{2}$ 的截距是_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题给出的直线方程为斜截式，根据斜截式的定义可直接得到直线在 y 轴上的截距.

【详解】 解：直线方程 $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{2}$ 是斜截式 $y = kx + b$ 的形式，斜截式中常数项 b 是直线在 y 轴上的截距，因此可得 $b = -\frac{1}{2}$.
故答案为 $-\frac{1}{2}$ ；

8. 点 $B(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ 向下平移 _____ 个单位后，对应点 B' 会落在 x 轴上.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据 x 轴上点的纵坐标为 0，结合点平移的坐标变化规律，向下平移纵坐标减，即可求出平移的单位长度.

【详解】 解： x 轴上点的纵坐标为 0.

点 B 的坐标为 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ ，其纵坐标为 $\sqrt{2}$.

设向下平移 a 个单位后 B' 落在 x 轴上.

根据点平移的坐标规律，向下平移纵坐标减，可得平移后点的纵坐标为 $\sqrt{2} - a$.

令 $\sqrt{2} - a = 0$.

解得 $a = \sqrt{2}$.

9. 点 $A(3, 2)$ 在反比例函数的图象上，求反比例函数的解析式 _____.

【答案】

$$y = \frac{6}{x}$$

【解析】

【分析】 用待定系数法求解即可.

【详解】 解：设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

将点 $A(3, 2)$ 代入解析式得 $2 = \frac{k}{3}$,

解得 $k = 6$,

因此该反比例函数的解析式为 $y = \frac{6}{x}$.

10. 若反比例函数 $y = \frac{1-3k}{x}$ 的图象经过第一、三象限, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < \frac{1}{3}$

【解析】

【详解】解: 由题意得: $1-3k > 0$, 则 $k < \frac{1}{3}$

故答案为: $k < \frac{1}{3}$.

11. 在 x 轴上到点 $(0,3)$ 距离为 5 的点的坐标是_____.

【答案】

$(4,0)$ 或 $(-4,0)$

【解析】

【分析】先利用 x 轴上点的纵坐标为 0 的特征设出所求点的坐标, 再根据两点间距离公式列方程求解横坐标, 即可得到所求点的坐标.

【详解】解: $\because$ 所求点在 x 轴上,

$\therefore$ 设该点坐标为 $(x,0)$, 由两点间距离公式得 $(x-0)^2 + (0-3)^2 = 25$,

整理得 $x^2 = 16$,

解得 $x = 4$ 或 $x = -4$,

$\therefore$ 该点坐标为 $(4,0)$ 或 $(-4,0)$.

12. 求直线 $y = -2x + 1$ 与两坐标轴所围成图形的面积_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

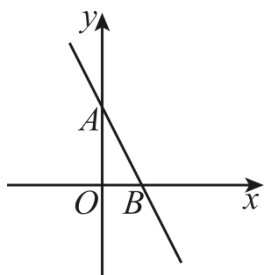
【分析】分别求出与坐标轴的交点, 再根据面积公式计算即可.

【详解】解: 令 $x = 0$, 则 $y = 1$, 故与 y 轴交于点 $A(0,1)$,

则 $OA = 1$,

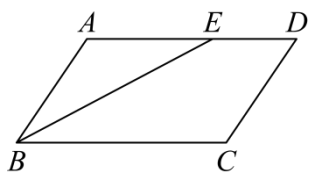
令 $y = 0$, 即 $-2x + 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 故与 x 轴交于点 $B(\frac{1}{2}, 0)$,

则 $OB = \frac{1}{2}$,



所以围成图形的面积 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 5$, $\angle B$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E , 则 DE 的长为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质, 根据平行四边形的性质结合角平分线平分角, 推出 $AB = AE$, 再用 $AD - AE$ 求出 DE 即可.

【详解】 解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 5$,

$\therefore AD \parallel BC, AD = BC = 5$,

$\therefore \angle AEB = \angle CBE$,

$\because \angle B$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E ,

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$,

$\therefore \angle AEB = \angle ABE$,

$\therefore AB = AE = 3$,

$\therefore DE = AD - AE = 2$;

故答案为: 2.

14. 一个正方形, 它的对角线长 10, 那么这个正方形的面积是_____.

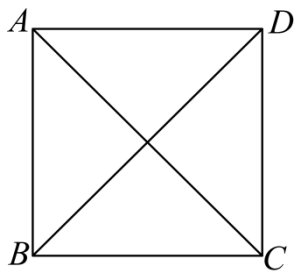
【答案】 50

【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的性质, 掌握正方形的面积是对角线积的一半成为解题的关键.

根据正方形的面积等于对角线积的一半列式计算即可.

【详解】解：如图：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC = BD = 10$,

$$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50.$$

故答案为：50.

15. 若一次函数 $y = (k+1)x + k - 4$ 的图像不经过第二象限, 那么 k 的取值范围_____.

【答案】 $-1 < k \leq 4$

【解析】

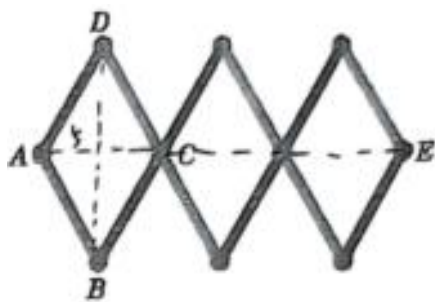
【分析】根据一次函数的图像不经过第二象限列出关于 k 的不等式组, 求解即可得到 k 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = (k+1)x + k - 4$ 的图像不经过第二象限,

$$\therefore \begin{cases} k+1 > 0 \\ k-4 \leq 0 \end{cases},$$

解得: $-1 < k \leq 4$.

16. 如图所示的木制活动衣帽架是由三个全等的菱形构成, 根据实际需要可以调节两点间的距离, 已知菱形的边长 $AB = 20\text{cm}$, 如果两点间的 A 、 E 距离调节到 90cm , 那么点 D 、 B 之间的距离是_____ cm .

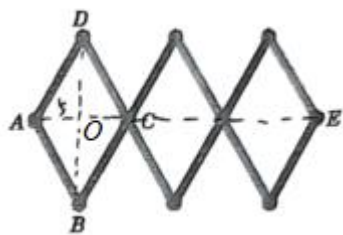


【答案】 $10\sqrt{7}$

【解析】

【分析】连接 BD 交 AC 于点 O , 根据三个全等菱形及 AE 的长度求出菱形水平对角线 AC 的长, 利用菱形对角线互相垂直平分的性质, 在直角三角形中利用勾股定理求出 OB 的长, 进而求得 BD 的长.

【详解】解：连接 BD 交 AC 于点 O ，如图，



$\because$ 衣帽架由三个全等的菱形构成， $AE = 90cm$ ，

$$\therefore AC = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3} \times 90 = 30cm,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, \quad OA = \frac{1}{2}AC = 15cm, \quad BD = 2OB,$$

在 $Rt\triangle AOB$ 中， $AB = 20cm$ ，

$$\text{由勾股定理得 } OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{20^2 - 15^2} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}cm,$$

$$\therefore BD = 2OB = 10\sqrt{7}cm.$$

17. 已知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，当自变量 x 的取值范围是 $1 \leq x \leq 2$ 时，函数值 y 的取值范围是 $3 \leq y \leq 5$ ．求该一次函数的表达式_____.

【答案】

$$y = 2x + 1 \text{ 或 } y = -2x + 7$$

【解析】

【分析】本题根据一次函数的增减性，分 $k > 0$ 和 $k < 0$ 两种情况讨论，利用待定系数法求解一次函数的表达式即可.

【详解】解：①当 $k > 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 中 y 随 x 增大而增大，

$$\text{所以当 } x = 1 \text{ 时 } y = 3, \text{ 当 } x = 2 \text{ 时 } y = 5, \text{ 代入得 } \begin{cases} k + b = 3 \\ 2k + b = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

此时一次函数的表达式为 $y = 2x + 1$;

②当 $k < 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 中 y 随 x 增大而减小，

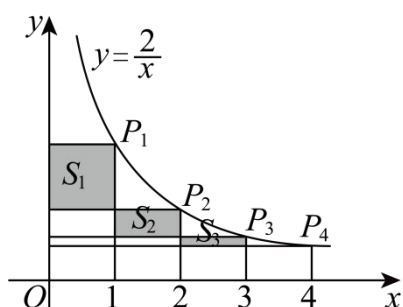
$$\text{所以当 } x = 1 \text{ 时 } y = 5, \text{ 当 } x = 2 \text{ 时 } y = 3, \text{ 代入得 } \begin{cases} k + b = 5 \\ 2k + b = 3 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k = -2 \\ b = 7 \end{cases}$,

此时一次函数的表达式为 $y = -2x + 7$;

综上所述, 该一次函数的表达式是 $y = 2x + 1$ 或 $y = -2x + 7$.

18. 如图, 在反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图像上有点 $P_1, P_2, P_3, P_4 \cdots P_n$, 它们的横坐标依次为 1、2、3、4 $\cdots n$, 分别过这些点作 x 轴与 y 轴的垂线, 图中所构成的涂色部分的面积从左到右依次为 $S_1, S_2, S_3 \cdots S_{n-1}$, 请用含有 n 的代数式表示 $S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}$ 的值_____.



【答案】 $\frac{2n-2}{n} (n \geq 2)$

【解析】

【分析】 根据反比例函数的性质求出 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$, 再相加求和即可

【详解】 解: $\because P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 的横坐标依次为 1、2、3、4 $\cdots n$,

$\therefore S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$ 的宽都为 1, $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 的纵坐标依次为 $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \cdots, \frac{2}{n-1}$,

$\therefore S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$ 的高依次为 $2-1=1, 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}, \frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{1}{6}, \cdots, \frac{2}{n-1}-\frac{2}{n}$,

可归纳总结出 S_n 的高为 $\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,

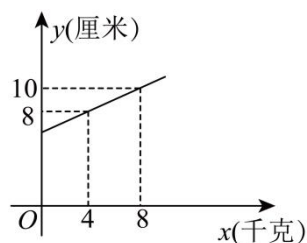
故 $S_n = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2n-2}{n} (n \geq 2)$

三、简答题 (共 5 题, 每题 6 分, 共 30 分)

19. 已知弹簧在其弹性限度内, 它的长度 y (厘米) 与所挂重物质量 x (千克) 的关系可表示为 $y = kx + b$

的形式，其中 k 称为弹力系数，测得弹簧 A 的长度与所挂重物（不超过弹性限度）的关系如图所示，求长度 y （厘米）与所挂重物质量 x （千克）的函数关系式，并写出弹力系数。



【答案】 y 与 x 的函数关系式为 $y = \frac{1}{2}x + 6$ ，弹力系数 $k = \frac{1}{2}$ 。

【解析】

【分析】 把 $x = 4$ ， $y = 8$ ； $x = 8$ ， $y = 10$ 代入 $y = kx + b$ 中，即可得出答案。

【详解】 解：把 $x = 4$ ， $y = 8$ ； $x = 8$ ， $y = 10$ 代入 $y = kx + b$ 中，

$$\text{得} \begin{cases} 4k + b = 8 \\ 8k + b = 10 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = 6 \end{cases},$$

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y = \frac{1}{2}x + 6$ ，弹力系数 $k = \frac{1}{2}$ 。

20. 已知 y 与 $x+1$ 成正比例， z 与 $y-2$ 成反比例。当 $x=1$ 时 $y=3$ ；当 $y=5$ 时 $z=4$ ；试写出变量 z 与变量 x 的函数关系式？当 $x=3$ 时求 z 的值是多少？

【答案】

z 与 x 的函数关系式为 $z = \frac{24}{3x-1}$ ；当 $x=3$ 时， $z=3$

【解析】

【分析】 先根据正比例和反比例的定义，分别设出 y 与 x 、 z 与 y 的解析式，利用待定系数法求出对应系数，再整理得到 z 与 x 的函数关系式，最后代入 x 的值计算 z 即可。

【详解】 解： $\because y$ 与 $x+1$ 成正比例，

$\therefore$ 设 $y = k(x+1) (k \neq 0)$ ，

把 $x=1, y=3$ 代入解析式，得 $3 = k(1+1)$ ，

解得 $k = \frac{3}{2}$ ，

$$\therefore y = \frac{3}{2}(x+1);$$

$\because z$ 与 $y-2$ 成反比例,

$$\therefore \text{设 } z = \frac{m}{y-2} (m \neq 0),$$

$$\text{把 } y=5, z=4 \text{ 代入解析式, 得 } 4 = \frac{m}{5-2},$$

解得 $m=12$,

$$\therefore z = \frac{12}{y-2};$$

$$\text{把 } y = \frac{3}{2}(x+1) \text{ 代入 } z = \frac{12}{y-2}, \text{ 得 } y-2 = \frac{3(x+1)}{2} - 2 = \frac{3x+3-4}{2} = \frac{3x-1}{2},$$

$$\therefore z = \frac{12}{\frac{3x-1}{2}} = \frac{24}{3x-1},$$

$$\text{即 } z \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } z = \frac{24}{3x-1},$$

$$\text{当 } x=3 \text{ 时, 代入得 } z = \frac{24}{3 \times 3 - 1} = \frac{24}{8} = 3.$$

21. 已知直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=4x$ 平行, 且经过点 $F(2, -3)$.

(1) 求此直线的解析式;

(2) 若该直线上、下平移后经过点 $G(0, 5)$, 求该直线平移的方向和单位.

【答案】 (1)

$$y = 4x - 11$$

(2)

向上平移 16 个单位长度.

【解析】

【分析】 (1) 利用两平行直线的一次项系数相等求出 k , 再代入已知点求出 b , 得到直线解析式;

(2) 平移不改变一次项系数, 代入已知点求出平移后的解析式, 再根据常数项的变化判断平移的方向和单位.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=4x$ 平行,

$$\therefore k = 4,$$

设直线解析式为 $y = 4x + b$,

将点 $F(2, -3)$ 代入解析式得 $-3 = 4 \times 2 + b$,

解得 $b = -11$,

$\therefore$ 此直线的解析式为 $y = 4x - 11$;

【小问 2 详解】

解: 设平移后的直线解析式为 $y = 4x + m$,

将点 $G(0, 5)$ 代入得 $5 = 4 \times 0 + m$,

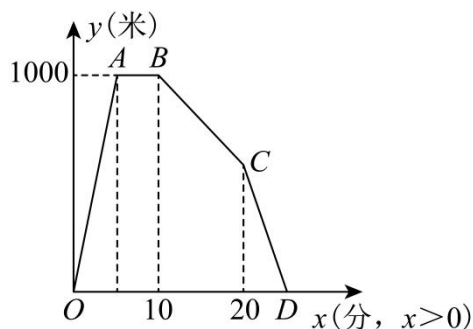
解得 $m = 5$,

$\therefore$ 平移后的直线解析式为 $y = 4x + 5$,

$$\therefore y = 4x + 5 = 4x - 11 + 16,$$

$\therefore$ 该直线向上平移了 16 个单位长度.

22. 体育场跑道上, 起点 S 到终点 T 的距离为 1000 米, 小红沿跑道从 S 跑到 T , 停留 5 分钟后再原路返回, 期间小红离开 S 处的路程 y (米) 与离开 S 处的时间 x (分) ($x > 0$) 之间的函数关系如图中折线 $OABCD$ 所示.



(1) 求去程时 y 关于 x 的函数表达式, 并写出 x 取值范围;

(2) 已知返程的时间共 15 分钟, 其中前 10 分钟内的平均速度与后 5 分钟内的平均速度之比为 1:2, 试求点 C 的纵坐标.

【答案】 (1) $y = 200x (0 \leq x \leq 5)$

(2) 500

【解析】

【分析】 (1) 先求得小红沿跑道从 S 跑到 T 用时 5 分钟, 再求出从 S 跑到 T 的速度, 从而得解;

(2) 设返程时前 10 分钟内的平均速度为 m 米/分钟, 则后 5 分钟内的平均速度为 $2m$ 米/分钟, 再返回路程是 1000 米列出方程求出 m , 可知 BC 段的解析式, 再将 $x = 20$ 代入计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 停留 5 分钟后再原路返回, 由图可知 10 分钟时原路返回,

$\therefore$ 小红沿跑道从 S 跑到 T 用时 5 分钟,

$\therefore$ 从 S 跑到 T 的速度是: $1000 \div 5 = 200$ (米/分钟),

$\therefore$ 去程时 y 关于 x 的函数表达式为: $y = 200x (0 \leq x \leq 5)$;

【小问 2 详解】

解: 设返程时前 10 分钟内的平均速度为 m 米/分钟, 则后 5 分钟内的平均速度为 $2m$ 米/分钟,

$\therefore 10m + 5 \times 2m = 1000$,

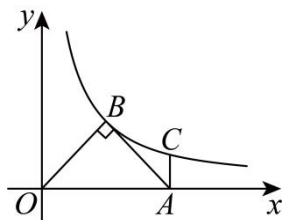
解得: $m = 50$,

$\therefore BC$ 段的解析式是: $y = 1000 - 50(x - 10) = 1500 - 50x (10 \leq x \leq 20)$,

当 $x = 20$ 时, $y = 1500 - 50 \times 20 = 500$,

$\therefore$ 点 C 的纵坐标为 500.

23. 已知: 如图, 点 B 、 C 是双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限分支上的两点, 点 A 在 x 轴正半轴上, $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形, $\angle B = 90^\circ$, AC 垂直于 x 轴.



(1) 求点 C 的坐标;

(2) 点 D 为 x 轴上一点, 当为 $\triangle BAD$ 等腰三角形时, 求点 D 的坐标.

【答案】(1) $C\left(2\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

(2) $(\sqrt{6}, 0)$ 或 $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}, 0)$ 或 $(2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(0, 0)$

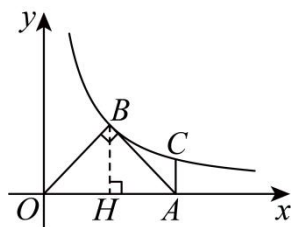
【解析】

【分析】(1) 过点 B 作 $BH \perp OA$ 于点 H , 易得 $BH = OH = \frac{1}{2}OA$, 设 $B(a, a) (a > 0)$, 求出 $B(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, 进而得到 $A(2\sqrt{6}, 0)$, 设 $C(2\sqrt{6}, y)$, 代入双曲线 $y = \frac{6}{x}$, 即可求解;

(2) 设 $D(x, 0)$, 求出 $BA^2 = 12$, $BD^2 = x^2 - 2\sqrt{6}x + 12$, $AD^2 = x^2 - 4\sqrt{6}x + 24$, 分 $BA = BD$ 或 $BA = AD$ 或 $BD = AD$, 三种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

解: 过点 B 作 $BH \perp OA$ 于点 H ,



$\because \triangle AOB$ 是等腰直角三角形, $\angle B = 90^\circ$,

$$\therefore BH = OH = \frac{1}{2}OA,$$

$\because$ 点 B 在第一象限,

$$\therefore \text{设 } B(a, a) (a > 0),$$

$\because$ 点 B 在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上,

$$\therefore a^2 = 6,$$

$$\therefore a = \sqrt{6} \text{ 或 } a = -\sqrt{6} \text{ (不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore B(\sqrt{6}, \sqrt{6}),$$

$$\therefore A(2\sqrt{6}, 0),$$

$\because AC \perp x$ 轴,

$$\therefore \text{设 } C(2\sqrt{6}, y),$$

$\because$ 点 C 在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上,

$$\therefore 2\sqrt{6} \times y = 6,$$

$$\therefore 2\sqrt{6} \times y = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore C\left(2\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right);$$

【小问 2 详解】

解: 设 $D(x, 0)$,

$$\therefore BA^2 = (2\sqrt{6} - \sqrt{6})^2 + (0 - \sqrt{6})^2 = 12, BD^2 = (x - \sqrt{6})^2 + (0 - \sqrt{6})^2 = x^2 - 2\sqrt{6}x + 12, AD^2 = (x - 2\sqrt{6})^2 = x^2 - 4\sqrt{6}x + 24,$$

$\because \triangle BAD$ 是等腰三角形,

$\therefore BA = BD$ 或 $BA = AD$ 或 $BD = AD$,

当 $BA = BD$ 时, 则 $BA^2 = BD^2$, 即 $12 = x^2 - 2\sqrt{6}x + 12$,

$$\therefore (x - \sqrt{6})^2 = 6,$$

解得 $x = 0$ 或 $x = 2\sqrt{6}$ (与点 A 重合, 舍去),

$\therefore D(0, 0)$;

当 $BA = AD$ 时, 则 $BA^2 = AD^2$, 即 $12 = x^2 - 4\sqrt{6}x + 24$,

$$\therefore (x - 2\sqrt{6})^2 = 12,$$

解得 $x = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ 或 $x = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$,

$\therefore D(2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}, 0)$ 或 $D(2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, 0)$;

当 $BD = AD$ 时, 则 $BD^2 = AD^2$, 即 $x^2 - 2\sqrt{6}x + 12 = x^2 - 4\sqrt{6}x + 24$,

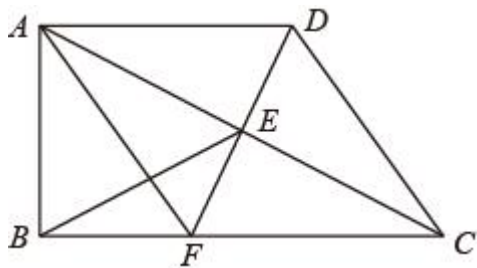
解得 $x = \sqrt{6}$,

$\therefore D(\sqrt{6}, 0)$;

综上, 点 D 的坐标为 $(\sqrt{6}, 0)$ 或 $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}, 0)$ 或 $(2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(0, 0)$.

四、解答题 (第 24 题 10 分, 第 25 题 12 分, 共 22 分)

24. 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, 点 E 是对角线 AC 的中点, 联结 DE 并延长, 交边 BC 于点 F , 联结 AF .



(1) 求证: 四边形 $AFCD$ 是平行四边形;

(2) 联结 BE , 如果 AF 垂直平分 BE , 求证: 四边形 $AFCD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据 AAS 证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ 得出 $ED = EF$ ，进而可得四边形 $AFCD$ 是平行四边形；

(2) 根据垂直平分线的性质证明 $AF = CF$ ，再根据菱形的判定定理即可求解.

【详解】(1) $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADF = \angle DFC, \quad \angle DAC = \angle ACF.$$

$\because$ 点 E 是对角线 AC 的中点,

$$\therefore AE = EC.$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADF = \angle DFC, \\ \angle DAC = \angle ACF, \\ AE = EC, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE.$$

$$\therefore AD = FC.$$

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是平行四边形,

(2) $\because \angle B = 90^\circ$, $AE = EC$,

$$\therefore BE = AE = EC.$$

又 $\because AF$ 垂直平分 BE ,

$$\therefore AB = AE = BE.$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ.$$

$\because AB = AE$, AF 垂直平分 BE ,

$$\therefore \angle BAF = \angle CAF = 30^\circ.$$

$\because \angle B = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ACF = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle CAF = \angle ACF.$$

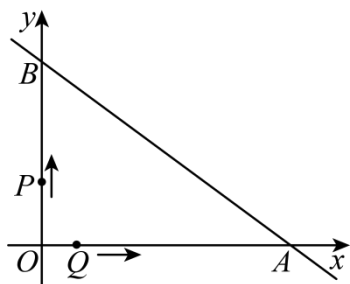
$$\therefore AF = CF.$$

又 $\because$ 四边形 $AFCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是菱形.

【点睛】 本题考查了直角梯形，平行四边形的判定与性质，菱形的判定方法，熟练掌握菱形的判定方法，证明四边形 $AFCD$ 是平行四边形是解题的关键.

25. 如图, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点, 动点 P 、 Q 同时从 O 点出发, 同时到达 A 点时运动停止. 点 Q 沿线段 OA 运动, 速度为每秒 1 个单位长度, 点 P 沿路线 $O \rightarrow B \rightarrow A$ 运动.



- (1) A 、 B 求两点的坐标;
- (2) 设点 Q 的运动时间为 t (秒), $\triangle OPQ$ 的面积为 S , 求出 S 与 t 之间的函数关系式;
- (3) 当 $t = 2\sqrt{3}$ 时, 求出点 P 的坐标, 并直接写出以点 O 、 P 、 Q 为顶点的平行四边形的第四个顶点 M 的坐标.

【答案】 (1) $(4\sqrt{3}, 0)$, $(0, 4)$

$$(2) S = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \left(0 \leq t \leq \frac{4}{3}\sqrt{3} \right), S = \frac{12t - \sqrt{3}t^2}{4} \left(\frac{4}{3}\sqrt{3} < t \leq 4\sqrt{3} \right)$$

$$(3) (\sqrt{3}, 3), \text{点 } M \text{ 坐标为 } (3\sqrt{3}, 3) \text{ 或 } (\sqrt{3}, -3) \text{ 或 } (-\sqrt{3}, 3)$$

【解析】

【分析】 (1) 令 $y = 0$ 时, 求出点 A 坐标, 令 $x = 0$ 时, 求出点 B 坐标.

(2) 分类讨论点 P 的为, 点 P 在 OB 和 AB , 确定好位置之后根据三角形面积公式计算即可.

(3) 给出运动运动时间, 可以求出运动距离, 从而求出坐标, 点 O 、 P 、 Q 、 M 为顶点平行四边形, 根据平行四边形性质确定点 M 坐标即可.

【小问 1 详解】

解: 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点,

$$\therefore \text{当 } y = 0 \text{ 时, 即 } -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 = 0, \text{ 解得 } x = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 坐标为 } (4\sqrt{3}, 0),$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, 解得 } y = 4,$$

$\therefore$ 点 B 坐标为 $(0, 4)$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 A 坐标为 $(4\sqrt{3}, 0)$, 点 B 坐标为 $(0, 4)$,

$$\therefore OA = 4\sqrt{3}, OB = 4,$$

在 $Rt\triangle OBA$ 中, 根据勾股定理得 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2}$,

$$\therefore AB = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8,$$

$\therefore$ 动点 P 、 Q 同时到达 A 点时运动停止, 点 Q 速度为每秒 1 个单位长度,

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 时到达 } A \text{ 的时间 } t = \frac{OA}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{1} = 4\sqrt{3},$$

点 P 运动的路程为 $OB + AB = 4 + 8 = 12$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的运动速度 } v = \frac{12}{4\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

设点 Q 的运动时间为 t (秒),

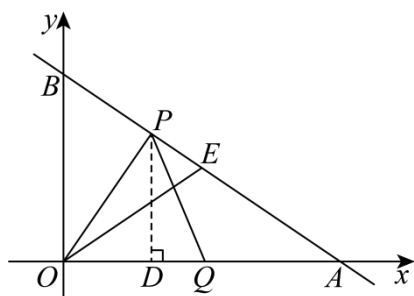
$$\therefore 0 \leq t \leq 4\sqrt{3},$$

$$\therefore OB = 4$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 运动到点 } B \text{ 时, } t = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\therefore 0 \leq t \leq \frac{4}{3}\sqrt{3} \text{ 时, 点 } P \text{ 在 } OB \text{ 上运动时, } \triangle OPQ \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} OQ \cdot OP = \frac{1}{2} t \cdot \sqrt{3} t = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2,$$

当 $\frac{4}{3}\sqrt{3} < t \leq 4\sqrt{3}$ 时, 点 P 在 BA 上运动时, 过点 P 作 $PD \perp OA$ 交 OA 于点 D , 取 AB 中点 E , 连接, 如图,



$$\therefore \angle ADP = \angle AOB = 90^\circ, AE = BE = 4,$$

$\because OE$ 为 $\triangle OAB$ 斜边中线,

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AB = 4,$$

$$\therefore OB = BE = OE,$$

$\therefore \triangle OBE$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle OBA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\because AP = 12 - \sqrt{3}t,$$

$$\therefore PD = \frac{1}{2} AP = \frac{12 - \sqrt{3}t}{2},$$

$$\therefore \triangle OPQ \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} OQ \cdot OP = \frac{1}{2} t \cdot \left(\frac{12 - \sqrt{3}t}{2} \right) = \frac{12t - \sqrt{3}t^2}{4}.$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } t = 2\sqrt{3} \text{ 时, 由 (2) 知 } PD = \frac{12 - \sqrt{3}t}{2},$$

$$\therefore PD = 3,$$

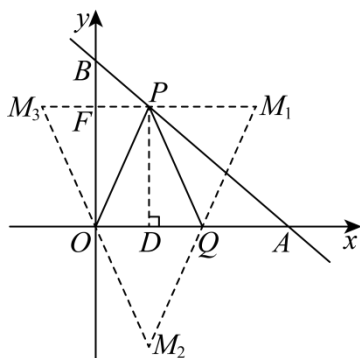
$$\because \text{点 } P \text{ 在直线 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 \text{ 上, 即 } y = 3,$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 = 3, \text{ 解得 } x = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 坐标为 } (\sqrt{3}, 3), \text{ 点 } Q \text{ 坐标为 } (2\sqrt{3}, 0),$$

$$\therefore OQ = 2\sqrt{3}, OD = \sqrt{3},$$

过点 P 作 $M_1M_3 \parallel OQ$, 且 $PM_1 = PM_3 = OQ = 2\sqrt{3}$, PM_3 与 y 轴交于点 F , 如图,



$\therefore PM_3 \perp y$ 轴,

$\because PD \perp AB$, $\angle BOA = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ODPF$ 是矩形,

$\therefore PF = OD = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 M_1 坐标 $(3\sqrt{3}, 3)$, 点 M_3 坐标为 $(-\sqrt{3}, 3)$,

过点 Q 作 $QM_2 \parallel OP$, 且 $QM_2 = OP$,

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$, 点 Q 坐标为 $(2\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore OP = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-0)^2} = 2\sqrt{3}$,

$QP = \sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (0-3)^2} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore QP = OP$,

$\therefore$ 平行四边形 $OPQM_2$ 是菱形

$\therefore$ 点 P 和点 M_2 关于 x 轴对称

$\therefore$ 点 M_2 坐标为 $(\sqrt{3}, -3)$

$\therefore$ 综上所述, 点 M 坐标为 $(3\sqrt{3}, 3)$ 或 $(\sqrt{3}, -3)$ 或 $(-\sqrt{3}, 3)$.