

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_3 < y_1 < y_2$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $k > 0$ 判断反比例函数的象限分布，再结合每个象限内 y 随 x 的变化规律即可比较大小.

【详解】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 $k > 0$,

∴ 函数图象的两个分支分别位于第一、三象限，且在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，

∴ 点 $A(-3, y_1)$, $B(-1, y_2)$ 的横坐标都小于 0,

∴ A , B 两点都在第三象限,

∴ $-3 < -1 < 0$,

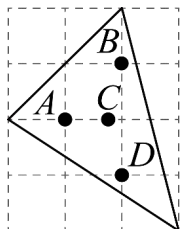
∴ $y_2 < y_1 < 0$,

又∵ 点 $C(2, y_3)$ 的横坐标 $2 > 0$,

∴ 点 C 在第一象限，可得 $y_3 > 0$,

综上可得 $y_2 < y_1 < y_3$.

4. 如图，有一块质地均匀的 3×4 的长方形硬纸片上，沿实线剪下一个三角形，在三角形硬纸片上选一点，在这个点处用细绳将其提起来，如果该三角形纸片处于平衡状态，那么这一点是()



A. 点 A

B. 点 B

C. 点 C

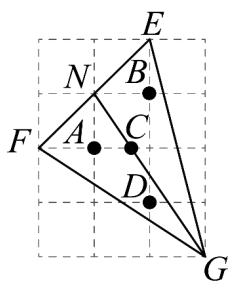
D. 点 D

【答案】C

【解析】

【分析】物体处于平衡状态被提起，说明提起的点是三角形的重心，即三条中线的交点，判断四个点中哪个点在中线上即可.

【详解】解：如图，由网格特点可得，点 N 是 EF 的中点，则 GN 是 $\triangle EFG$ 的中线，



$\therefore \triangle EFG$ 的重心在 GN 上,

$\therefore$ 重心是点 C ,

即在三角形硬纸片上选点 C , 在这个点处用细绳将其提起来, 该三角形纸片处于平衡状态.

5. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AC = BD$, 下列判断中正确的是 ()

A. 如果 $BC = AD$, 那么四边形 $ABCD$ 是平行四边形

B. 如果 $AD \parallel BC$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形

C. 如果 AC 平分 BD , 那么四边形 $ABCD$ 是矩形

D. 如果 $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是正方形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理, 结合已知条件 $AB \parallel CD$, $AC = BD$, 逐个判断各选项即可.

【详解】 解: A. 若 $BC = AD$, 四边形 $ABCD$ 可能是等腰梯形, 不一定是平行四边形, 故 A 错误;

B. 若 $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, 则四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 又 $AC = BD$, 对角线相等的平行四边形是矩形, 不是菱形, 故 B 错误;

C. 设 AC 交 BD 于点 O ,

$\therefore AC$ 平分 BD ,

$\therefore BO = OD$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle OAB = \angle OCD$, $\angle OBA = \angle ODC$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD (AAS)$,

$\therefore AB = CD$,

$\therefore AB \parallel CD$ 且 $AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

又 $\because AC = BD$,

$\therefore$ 对角线相等的平行四边形是矩形, 故 C 正确;

D. 若 $AC \perp BD$, 四边形 $ABCD$ 可以是对角线互相垂直的等腰梯形, 不一定是正方形, 故 D 错误.

二、填空题 (本大题共 11 题, 每题 3 分, 满分 33 分)

6. 直线 $y = x - 3$ 的截距是_____.

【答案】 -3

【解析】

【详解】 解: 当 $x = 0$ 时, $y = -3$,

$\therefore$ 直线 $y = x - 3$ 的截距为 -3

7. 如果点 $P(m+2, 2m+1)$ 在 y 轴上, 那么 m 的值是_____.

【答案】

-2

【解析】

【分析】 根据 y 轴上点的坐标特征, y 轴上的点横坐标为 0 , 据此列方程求解 m 的值.

【详解】 解: $\because$ 点 $P(m+2, 2m+1)$ 在 y 轴上,

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 0 , 即 $m+2=0$,

解得 $m = -2$.

8. 经过点 $M(-1, 3)$ 且平行于 x 轴的直线可记为直线_____.

【答案】 $y = 3$

【解析】

【分析】 根据平行于 x 轴的直线上所有点纵坐标相等的性质, 结合已知点的坐标即可得到结果.

【详解】 解: $\because$ 直线经过点 $M(-1, 3)$, 点 M 的纵坐标为 3 , 该直线上所有点的纵坐标均为 3 ,

$\therefore$ 该直线可记为 $y = 3$.

9. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(2, 3)$, 点 $B(-2, 6)$, 那么线段 AB 的长是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】平面直角坐标系中，若两点坐标为 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，则两点间距离公式为

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，根据两点间距离公式求解即可.

【详解】解： $\because A(2, 3)$ ， $B(-2, 6)$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (3 - 6)^2} = 5.$$

10. 如果一个多边形的内角和是外角和的5倍，那么这个多边形的边数是_____.

【答案】12

【解析】

【分析】本题考查了多边形的内角与外角. 根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 和外角和定理列出方程，然后求解即可.

【详解】解：设多边形的边数为 n ，

$$\text{由题意得，} (n-2) \cdot 180^\circ = 5 \times 360^\circ,$$

解得 $n = 12$.

故这个多边形的边数是12.

故答案为：12.

11. 已知点 $B(1, 3)$ 是直线 $y = kx + b (k < 0)$ 上一点，则 $kx + b > 3$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 1$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式的关系，根据一次函数的性质，当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小.

【详解】解： $\because k < 0$ ，

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x < 1$ 时， $y > 3$.

12. 如果一个反比例函数的图像在它所在的每一个象限内， y 的值随 x 的值增大而减小，那么这个反比例函数的表达式可以是_____ (只需写一个).

【答案】

$$y = \frac{1}{x} \quad (\text{答案不唯一})$$

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质，确定比例系数 k 的取值范围，即可写出符合要求的反比例函数表达式.

【详解】解：设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$.

$\therefore$ 反比例函数的图像在它所在的每一个象限内， y 的值随 x 的值增大而减小，

$\therefore k > 0$.

取 $k = 1$ ，可得这个反比例函数的表达式可以是 $y = \frac{1}{x}$. (答案不唯一)

13. 在平行四边形 $ABCD$ 中，如果 $\angle A : \angle B = 2 : 3$ ，那么 $\angle D$ 的度数是_____.

【答案】 108°

【解析】

【分析】利用平行四边形邻角互补，对角相等的性质，结合已知角度比例关系求解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，平行四边形对边平行，

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$ ， $\angle D = \angle B$ ，

$\because \angle A : \angle B = 2 : 3$ ，

设 $\angle A = 2x$ ， $\angle B = 3x$ ，

则 $2x + 3x = 180^\circ$ ，

解得 $x = 36^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$ ，

$\therefore \angle D = \angle B = 108^\circ$.

14. 在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 CD 上，点 E 关于直线 AD 的对称点为点 F ，连接 BE 、 EF 、 AF ，如果四边形 $ABEF$ 是菱形，那么 $\angle F =$ _____度.

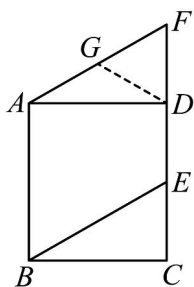
【答案】60

【解析】

【分析】取 AF 中点 G ，连接 DG ，先根据轴对称的性质得到 $DF = DE$ ，结合菱形性质得到

$AF = EF = 2DF$ ，再由矩形性质得到 $\angle ADF = 90^\circ$ ，利用直角三角形的性质得出 $DG = \frac{1}{2}AF = FG$ ，可证明 $\triangle DFG$ 是等边三角形，然后根据等边三角形的性质即可求出 $\angle F$ 的度数.

【详解】解：如图，取 AF 中点 G ，连接 DG ，



∵ 点 E 关于直线 AD 的对称点为点 F ,

$$\therefore DF = DE,$$

$$\therefore EF = DF + DE = 2DF,$$

∵ 四边形 $ABEF$ 是菱形,

$$\therefore AF = EF,$$

$$\therefore AF = 2DF,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ, \text{ 即 } \triangle ADF \text{ 是直角三角形,}$$

在 $Rt\triangle ADF$ 中, G 是 AF 中点,

$$\therefore DG = \frac{1}{2} AF = FG,$$

$$\text{又 } AF = 2DF,$$

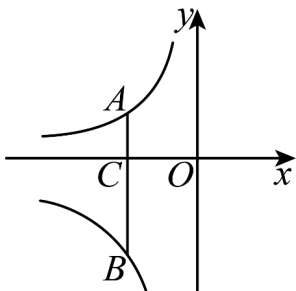
$$\therefore FG = DF = DG,$$

∴ $\triangle DFG$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle F = 60^\circ.$$

15. 函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($k_1 \neq 0$) 和 $y = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 \neq 0$) 的部分图像如图所示, 点 A 在 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图像上, 过点 A 作

$AB \parallel y$ 轴交 x 轴于点 C , 交 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像于点 B , 如果 $BC = 2AC$, 那么 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值是_____.



【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

【分析】设点 A 的横坐标为 m ，根据 $AB \parallel y$ 轴可知点 B 、 C 的横坐标也为 m ，利用反比例函数解析式表示出线段 AC 和 BC 的长度，结合 $BC = 2AC$ 建立等式，化简即可求解。

【详解】解：设点 A 的横坐标为 m ，由图可知 $m < 0$ ，

$\because AB \parallel y$ 轴，交 x 轴于点 C

$\therefore$ 点 B 、 C 的横坐标均为 m ，且点 C 的坐标为 $(m, 0)$ ，

$\therefore$ 点 A 在 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图像上，且位于第二象限，

$\therefore$ 点 A 的纵坐标为 $\frac{k_1}{m}$ ，且 $\frac{k_1}{m} > 0$ ，

$\therefore AC = \frac{k_1}{m}$ 。

$\therefore$ 点 B 在 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像上，且位于第三象限，

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 $\frac{k_2}{m}$ ，且 $\frac{k_2}{m} < 0$ ，

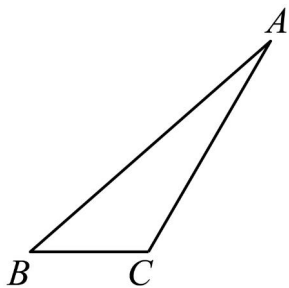
$\therefore BC = -\frac{k_2}{m}$ ，

$\because BC = 2AC$ ，

$\therefore -\frac{k_2}{m} = 2 \cdot \frac{k_1}{m}$ ，

$\therefore \frac{k_1}{k_2} = -\frac{1}{2}$ 。

16. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 7$ ， $\angle ACB = 120^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° ，点 A 、 C 分别落在点 D 、 E 处，联结 DC ，如果 $DC \perp AC$ ，那么边 BC 的长_____。



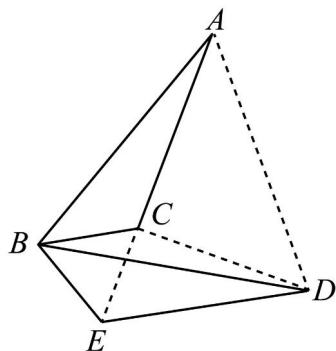
【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】由旋转变换易证 $DE = AC$ ， $DE = AC$ ， $\angle BED = \angle BCA = 120^\circ$ ， $\angle DEC = 60^\circ$ ，由

$DC \perp AC$, 得 $\angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$; 设 $CE = x$, 由三角函数得 $DE = 2x$, $CD = \sqrt{3}x$; 在 $Rt\triangle ACD$ 中, 运用勾股定理求得 $x = \sqrt{7}$, 所以 $BC = \sqrt{7}$.

【详解】如图, 由旋转知, $DE = AC$, $\angle BED = \angle BCA = 120^\circ$, $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ 为等边三角形, $\therefore \angle BEC = \angle BCE = 60^\circ$, $CE = BC$, $AD = AB = 7$,



$\therefore \angle ACE = 180^\circ$, $\angle DEC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

$\therefore DC \perp AC$

$\therefore \angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$

设 $CE = x$, 则 $DE = 2x$, $CD = \sqrt{3}x$

$Rt\triangle ACD$ 中, $AD^2 = AC^2 + CD^2$

$\therefore 7^2 = (2x)^2 + (\sqrt{3}x)^2$, 解得 $x = \sqrt{7}$ (负值舍去),

故答案为: $\sqrt{7}$

【点睛】本题主要考查旋转变换、全等三角形的性质、等边三角形的性质、勾股定理及特殊角三角函数; 能够灵活运用相关知识导出线段间的数量关系是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 52 分)

17. 已知一次函数 $y = kx - 4$, 当 $x = 2$ 时, $y = -3$.

(1) 求一次函数的表达式;

(2) 将该函数的图像向上平移 6 个单位长度, 求平移后的图像与 x 轴交点的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x - 4$. (2) $(-4, 0)$.

【解析】

【分析】(1) 把点 $(2, -3)$ 代入解析式即可求出 k ;

(2) 先得出函数图像向上平移 6 单位的函数关系式, 再令 $y=0$, 即可求出与 x 轴交点的坐标.

【详解】解：(1)将 $x=2$, $y=-3$ 代入 $y=kx-4$, 得 $-3=2k-4$. $\therefore k=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x-4$.

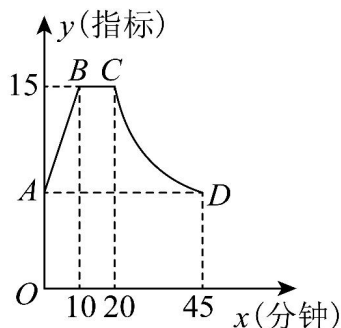
(2)将 $y=\frac{1}{2}x-4$ 的图像向上平移 6 个单位长度得 $y=\frac{1}{2}x+2$.

当 $y=0$ 时, $x=-4$.

$\therefore$ 平移后的图像与 x 轴交点的坐标为 $(-4, 0)$.

【点睛】此题主要考查一次函数的解析式的求法与在坐标轴方向上的平移.

18. 研究发现: 初中生在数学课上的注意力指标随上课时间的变化而变化, 上课开始时, 学生注意力直线上升, 中间一段时间, 学生的注意力保持平稳状态, 随后开始分散, 注意力与时间呈反比例关系降回开始时的水平. 学生注意力指标 y 随时间 x (分钟) 变化的函数图像如图所示.



(1) 求反比例函数的表达式, 并求点 A 对应的指标值;

(2) 张老师在一节课上从第 10 分钟开始讲解一道数学综合题, 讲解这道题需要 15 分钟, 当张老师讲完这道题时, 学生的注意力指标值达到多少?

【答案】(1) 反比例函数的表达式为 $y=\frac{300}{x}$, A 点对应的指标值 $\frac{20}{3}$

(2) 当张老师讲完这道题时, 学生的注意力指标值达到 12

【解析】

【分析】本题考查反比例函数解应用题, 涉及待定系数法确定函数关系式、已知自变量求函数值等知识, 读懂题意, 求出反比例函数表达式是解决问题的关键.

(1) 由题意, 设出反比例函数表达式, 将 $C(20, 15)$ 代入表达式求解即可得到表达式, 将 $x=45$ 代入求得的表达式即可得到 A 点对应的指标值;

(2) 由 (1) 中得到的表达式, 将 $x=10+15=25$ 代入表达式即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}(20 \leq x \leq 45)$,

由图知反比例函数过点 $C(20,15)$ ，则代入表达式得 $15 = \frac{k}{20}$ ，解得 $k = 300$ ，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{300}{x}$ ；

当 $x = 45$ 时， $y = \frac{300}{45} = \frac{20}{3}$ ，故 A 点对应的指标值 $\frac{20}{3}$ ；

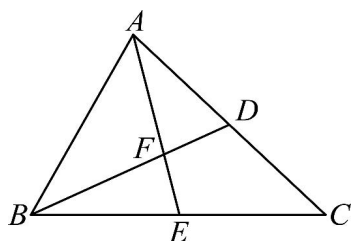
【小问 2 详解】

解：由题意得 $x = 10 + 15 = 25$ ，

$\therefore y = \frac{300}{x} = \frac{300}{25} = 12$ ，

答：当张老师讲完这道题时，学生的注意力指标值达到 12。

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AE 、 BD 分别是边 BC 、 AC 上的中线， AE 与 BD 相交于点 F 。



(1) 求 $S_{\triangle AFD} : S_{\triangle ABD}$ 的值；

(2) 如果 $AE \perp BD$ ，且 $AB = 10$ ， $BD = 12$ 。求 AE 的长。

【答案】(1) $S_{\triangle AFD} : S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3}$ ；

(2) AE 的长为 9

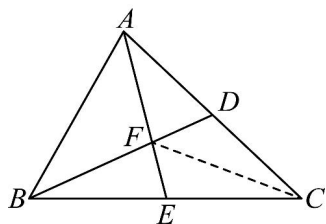
【解析】

【分析】(1) 连接 CF ，设 $S_{\triangle AFD} = x$ ，由 $AD = DC$ 得 $S_{\triangle CFD} = x$ ；设 $S_{\triangle BFE} = y$ ，由 $BE = EC$ 得 $S_{\triangle CFE} = y$ 。结合中线平分三角形面积的性质，可推导出 $x = y$ ，可得 $S_{\triangle ABD} = 3x$ ，故 $S_{\triangle AFD} : S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3}$ 。

(2) 由同高和面积比可得底边的比例 $BF : FD = 2 : 1$ ，结合 $BD = 12$ 得 $BF = 8$ 。因 $AE \perp BD$ ，在 $Rt\triangle ABF$ 中，由勾股定理得 $AF = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ 。同理 $AF : FE = 2 : 1$ ，得 $FE = 3$ ，可得 AE 的值。

【小问 1 详解】

解：连接 CF ，如图，



$\because AE$ 、 BD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$$\therefore AD = DC, \quad BE = EC,$$

$$\text{设 } S_{\triangle AFD} = x,$$

$\because AD = DC$, 且 $\triangle AFD$ 与 $\triangle CFD$ 同高,

$$\therefore S_{\triangle CFD} = S_{\triangle AFD} = x,$$

$$\therefore S_{\triangle AFC} = S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CFD} = 2x,$$

$$\text{设 } S_{\triangle BFE} = y,$$

$\because BE = EC$, 且 $\triangle BFE$ 与 $\triangle CFE$ 同高,

$$\therefore S_{\triangle CFE} = S_{\triangle BFE} = y,$$

$$\therefore S_{\triangle BFC} = S_{\triangle BFE} + S_{\triangle CFE} = 2y,$$

$$\text{同理可得, } S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \quad S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\because S_{\triangle ACE} = 2x + y, \quad S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABF} + y,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} + y = 2x + y,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = 2x,$$

$$\because S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle AFD} = 2x + x = 3x, \quad S_{\triangle CBD} = 2y + x,$$

$$\therefore 3x = 2y + x$$

$$\therefore x = y,$$

$$\therefore S_{\triangle AFD} = x, \quad S_{\triangle ABD} = 3x,$$

$$\therefore S_{\triangle AFD} : S_{\triangle ABD} = x : 3x = \frac{1}{3};$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知 $S_{\triangle ABF} = 2x$, $S_{\triangle AFD} = x$,

$\because \triangle ABF$ 与 $\triangle AFD$ 同高,

$$\therefore \frac{BF}{FD} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{2x}{x} = 2, \quad \text{即 } BF : FD = 2 : 1,$$

$$\therefore BD = 12,$$

$$\therefore BF = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \times 12 = 8, FD = \frac{1}{3}BD = 4,$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABF \text{ 中, } AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$\because S_{\triangle ABF} = 2x, S_{\triangle BEF} = y = x,$$

$$\text{同理可得, } \frac{AF}{FE} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{2x}{x} = 2, \text{ 即 } AF : FE = 2 : 1,$$

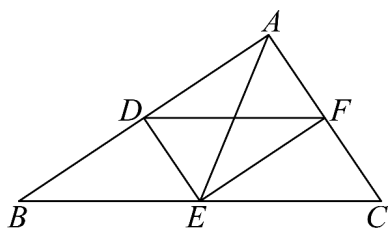
$$\therefore FE = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore AE = AF + FE = 6 + 3 = 9.$$

20. 如图, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点, 点 F 在边 AC 上,

$DF \parallel BC$, 连接 DE 、 EF .

求证: 四边形 $ADEF$ 是矩形.



【答案】

证明: $\because$ 点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE \parallel AC, DE = \frac{1}{2}AC,$$

$\because DF \parallel BC, DE \parallel AC,$

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形,

$$\therefore FC = DE,$$

$$\because DE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore FC = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore AF = AC - FC = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore DE = AF,$$

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形,
 $\therefore \angle BAC = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是矩形.

【解析】

【分析】 先由中位线定理结合点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点, 得 $DE \parallel AC$, $DE = \frac{1}{2}AC$, 再结合 $DF \parallel BC$ 得出四边形 $DECF$ 是平行四边形, 进而得 $FC = DE$, 结合 $DE = \frac{1}{2}AC$, 可得 $AF = AC - FC = \frac{1}{2}AC$, 进而得到 $DE = AF$, 得出四边形 $ADEF$ 是平行四边形, 最后由 $\angle BAC = 90^\circ$, 即可得出四边形 $ADEF$ 是矩形.

【详解】 略.

21. 综合实践：神奇的密码

【问题背景】 密码是一种将可识别的信息（明文）转换为秘密信息（密文）的技术，这个过程称为“加密”；而密文是可以破解的，这个过程称为“解密”. 明文与密文之间的转换的关键是“密钥”. 有一种密码，将 26 个英文字母分别转换为数字 0~25 后进行数学变换从而获得密文. 字母与数字的对应如下表：

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
字母	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
数字	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

【加密规则】

- ①选择一个“乘密钥” a 和一个“加密钥” b ($1 \leq a \leq 9, 1 \leq b \leq 9, a, b$ 均为整数);
- ②对明文中的每个字母，先将其对应数字 m 乘 a ，再加上 b ，得到一个总和 S ，即 $S = a \cdot m + b$ ；
- ③对每个字母得到的总和 S 逐个进行判断：
 若 S 在 0 到 25 之间，则 S 就是该字母加密后的密文所对应的数字；
 若 S 大于 25，则不断减去 26，直到结果落在 0~25 之间；
- ④将得到的对应数字转换为字母，从而获得明文中每个字母加密后的密文.

例如：设 $a = 3$ ， $b = 4$ ，我们可以将明文中字母 P ($m = 15$) 转换成所对应的密文。

计算： $S = 3 \times 15 + 4 = 49$ 。 $\because 49 > 25$ ， $\therefore 49 - 26 = 23$ 。

$\therefore 23$ 对应字母 X ， $\therefore$ 明文中字母 P 对应的密文是字母 X 。

【问题探究】 请你根据以上材料，完成探究：

- (1) 若密钥为 $a = 2$ ， $b = 5$ ，则明文“HI”加密后的密文为_____；
- (2) 在某次加密中，使用的“乘密钥” $a = 3$ 。小明发现，明文“B”被加密后，得到的密文是“M”，则这次加密使用的“加密钥” b 的值为_____；
- (3) 小杨截获了一段密文“OK”，它是由明文“IH”使用上述材料中的加密规则加密而成，且由“T”加密成“O”所使用的密钥（“乘密钥” a ，“加密钥” b ）与由“H”加密成“K”所使用的密钥（“乘密钥” a ，“加密钥” b ）一致。求加密规则中使用的“乘密钥” a 和“加密钥” b 的值；
- (4) 利用（3）中求得的加密规则中的密钥 a 和 b ，求密文“YC”解密获得的明文。

【答案】 (1) TV

(2) 9

(3) $a = 4$ ， $b = 8$

(4) EF 或 ES 或 RF 或 RS

【解析】

【分析】 (1) 根据将明文转换为密文的方法计算得出对应的 S ，即可得出答案；

(2) 先确定 B 对应的数，再结合计算方法求出 b 即可；

(3) 根据要求列出方程组，求出符合题意的解；

(4) 设明文对应的数是 x ， y ，根据（3）中两个密钥，列出方程组求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because a = 2$ ， $b = 5$ ，将明文中字母 H ($m = 7$) 转换成所对应的密文，

则 $S = 2 \times 7 + 5 = 19$ ，

$\because 0 < 19 < 25$ ，

$\therefore 19$ 对应的字母是 T ，

所以明文中字母 H 对应的密文是字母 T ；

将明文中字母 I ($m = 8$) 转换成所对应的密文，

则 $S = 2 \times 8 + 5 = 21$ ，

$\because 0 < 21 < 25$ ，

$\therefore 21$ 对应的字母是 V ，

所以明文中字母 I 对应的密文是字母 V ;

所以 “ HI ” 加密后的密文是 “ TV ” .

【小问 2 详解】

解: $\because$ 明文 B 对应的数 $m=1$, $a=3$

$$\therefore S=1 \times 3 + b,$$

$\because$ 明文 “ B ” 被加密后, 得到的密文是 “ M ”, M 对应的数是 12,

$$\therefore 3 + b = 12,$$

解得 $b=9$.

【小问 3 详解】

解: $\because I$ 对应的数是 8, H 对应的数是 7, O 对应的数是 14, K 对应的数是 10,

又明文 “ IH ” 加密后密文 “ OK ”,

$$\therefore \begin{cases} 8a + b = 14 + 26m \\ 7a + b = 10 + 26n \end{cases}, \text{ 其中 } m, n \text{ 都是为自然数, } a, b \text{ 都为正整数.}$$

①当 $m=0$, $n=0$ 时,

$$\begin{cases} 8a + b = 14 \\ 7a + b = 10 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 4 \\ b = -18 \end{cases}, \text{ 不合题意, 舍去;}$$

②当 $m=0$, $n=1$ 时,

$$\begin{cases} 8a + b = 14 \\ 7a + b = 36 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -22 \\ b = 190 \end{cases}, \text{ 不合题意, 舍去;}$$

③当 $m=1$, $n=0$ 时,

$$\begin{cases} 8a + b = 40 \\ 7a + b = 10 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 30 \\ b = -200 \end{cases}, \text{ 不合题意, 舍去;}$$

④当 $m=1$, $n=1$ 时,

$$\begin{cases} 8a + b = 40 \\ 7a + b = 36 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}, \text{ 符合题意;}$$

经验证, 不存在其他符合题意的 a, b, m, n 的值.

综上所述, $a=4$, $b=8$.

【小问 4 详解】

解: 设明文对应的数是 x, y , (x, y 均为整数, 且 $0 \leq x \leq 25$, $0 \leq y \leq 25$)

$\therefore Y$ 和 C 对应的数是 24, 2,

$\therefore 4x+8=24+26k$, $4y+8=2+26p$, 其中 k, p 都是为自然数,

当 $k=0$ 时, $4x+8=24$, 解得 $x=4$, 符合题意;

当 $k=1$ 时, $4x+8=50$, 解得 $x=\frac{21}{2}$, 不合题意, 舍去;

当 $k=2$ 时, $4x+8=76$, 解得 $x=17$, 符合题意;

当 $k=3$ 时, $4x+8=102$, 解得 $x=\frac{47}{2}$, 不合题意, 舍去,

当 $k>3$ 时, 不存在符合题意的 x 的值.

当 $p=0$ 时, $4y+8=2$, 解得 $y=-\frac{3}{2}$, 不合题意;

当 $p=1$ 时, $4y+8=28$, 解得 $y=5$, 符合题意;

当 $p=2$ 时, $4y+8=54$, 解得 $y=\frac{23}{2}$, 不合题意, 舍去;

当 $p=3$ 时, $4y+8=80$, 解得 $y=18$, 符合题意;

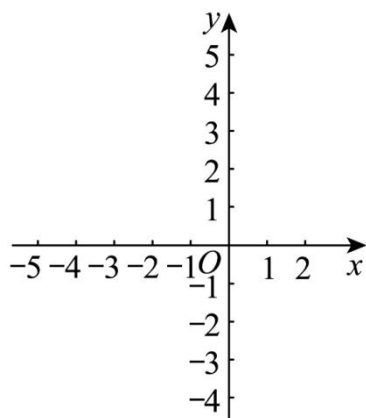
当 $p=4$ 时, $4y+8=106$, 解得 $y=\frac{49}{2}$, 不合题意, 舍去;

当 $p>4$ 时, 不存在符合题意的 y 的值.

$\therefore 4$ 对应的字母是 E , 17 对应的字母是 R , 5 对应的字母是 F , 18 对应的字母是 S ,

$\therefore$ 密文 “ YC ” 解密获得的明文是 “ EF ” 或 “ ES ” 或 “ RF ” 或 “ RS ” .

22. 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=\frac{1}{3}x+1$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 点 C 在第二象限内, $AC \perp AB$, 且 $AC=AB$.



(1) 求点 C 的坐标;

(2) 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移, 点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 A' 、 B' 、 C' , 如果点 B' 、 C' 都落在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上, 求 k 的值;

(3) 如果直线 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 与第 (2) 小题中的双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 有两个公共点 E 和 F ，求 $S_{\triangle OEF}$ 的值.

【答案】(1) 点 C 坐标为 $(-4, 3)$;

(2) $k = 6$

(3) $\frac{9}{2}$

【解析】

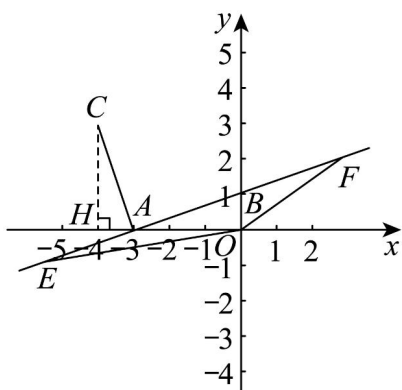
【分析】(1) 过点 C 作 $CH \perp x$ 轴于点 H ，易证 $\triangle CHA \cong \triangle AOB$ (AAS)，根据全等三角形的性质可得点 C 坐标；

(2) 设 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移距离为 m ，则 $B'(m, 1)$ ， $C'(-4 + m, 3)$ ，根据点 B' 、 C' 都落在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上，列方程求出 m 的值，进一步可求出 k 的值；

(3) 联立直线解析式与反比例函数解析式可得点 E 和点 F 坐标，根据 $S_{\triangle OEF} = S_{\triangle OAF} + S_{\triangle OAE}$ 可求出 $\triangle OEF$ 的面积.

【小问 1 详解】

解：过点 C 作 $CH \perp x$ 轴于点 H ，如图所示：



则 $\angle CHA = 90^\circ$,

$\therefore \angle C + \angle CAH = 90^\circ$,

$\because CA \perp AB$,

$\therefore \angle CAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAH + \angle OAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle OAB$,

$\because AC = AB$,

$\therefore \triangle CHA \cong \triangle AOB$ (AAS),

$$\therefore CH = AO, \quad AH = OB,$$

$$\text{当 } y = \frac{1}{3}x + 1 = 0 \text{ 时, } x = -3,$$

$$\therefore A(-3, 0),$$

$$\therefore OA = 3,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = \frac{1}{3}x + 1 = 1,$$

$$\therefore B(0, 1),$$

$$\therefore OB = 1,$$

$$\therefore CH = 3, \quad AH = 1,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 坐标为 } (-4, 3);$$

【小问 2 详解】

解：设 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移距离为 m ,

$$\text{则 } B'(m, 1), \quad C'(-4 + m, 3),$$

$\because$ 点 B' 、 C' 都落在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上,

$$\therefore m = 3(-4 + m),$$

$$\text{解得 } m = 6,$$

$$\therefore \text{点 } B'(6, 1),$$

$$\therefore k = 6 \times 1 = 6;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解：联立 } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 1 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 坐标为 } (-6, -1), \text{ 点 } F \text{ 坐标为 } (3, 2),$$

$$\therefore S_{\triangle OEF} = S_{\triangle OAF} + S_{\triangle OAE}$$

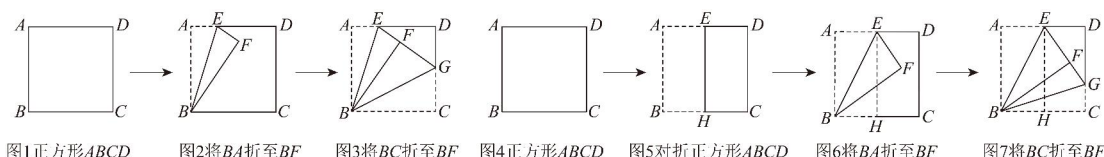
$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1$$

$$= \frac{9}{2}.$$

【点睛】本题考查了反比例函数的综合应用，涉及反比例函数图象上点的坐标特征，全等三角形的判定和性质，平移的性质，三角形的面积等，本题综合性较强，构造全等三角形是解题的关键.

23. 【问题背景】折纸是一门将数学、艺术与工程完美结合的学科. 通过折纸不仅能够创造出非常奇妙的图形，还可以发现一些有趣的数学问题，下面我们就利用一张正方形纸片来开展“折纸与数学”探究活动.

【操作探究】



(1) 小创小组将正方形纸片 (如图 1) 按照图 2 至图 3 的方式操作，那么图 3 中 $\angle EBG = \underline{\quad\quad}^\circ$;

(2) 小智小组将正方形纸片 (如图 4) 按照图 5 至图 7 的方式操作，经过测量，发现 G 是 CD 的三等分点，请你帮助小智小组证明这个结论;

【深入探究】

(3) 小创小组继续探究，如图 3，将 $\triangle DEG$ 沿直线 EG 折叠，点 D 落到点 P 处，得到 $\triangle PEG$. 当点 P 落在 $\triangle BEG$ 的边上时，如果正方形 $ABCD$ 的边长为 3，请直接写出 AE 的长.

【答案】(1) 45; (2) 证明：设正方形 $ABCD$ 的边长为 a ,

由折叠可知， E 是 AD 的中点，

$$\therefore AE = ED = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2},$$

由折叠可知， $BF = AB = a$ ， $EF = AE = \frac{a}{2}$ ， $\angle BFE = \angle A = 90^\circ$ ， $BF = BC = a$ ， $FG = CG$ ，

$$\angle BFG = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore \angle BFE + \angle BFG = 180^\circ$ ，即点 E, F, G 在同一条直线上，

$$\therefore EG = EF + FG = \frac{a}{2} + CG,$$

设 $CG = x$ ，则 $FG = x$ ， $DG = CD - CG = a - x$ ，

在 $Rt\triangle DEG$ 中， $ED^2 + DG^2 = EG^2$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-x)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

$$\frac{a^2}{4} + a^2 - 2ax + x^2 = \frac{a^2}{4} + ax + x^2$$

$$a^2 - 2ax = ax$$

$$a^2 = 3ax$$

$$\because a \neq 0,$$

$$\therefore x = \frac{a}{3}, \text{ 即 } CG = \frac{1}{3}CD,$$

$\therefore G$ 是 CD 的三等分点;

$$(3) \quad AE \text{ 的长为 } 6-3\sqrt{3} \text{ 或 } \sqrt{3}$$

【解析】

【分析】(1) 由两次折叠可知, BE 平分 $\angle ABF$, BG 平分 $\angle CBF$, 则可得

$$\angle EBG = \angle FBE + \angle FBG = \frac{1}{2}\angle ABC, \text{ 结合正方形 } \angle ABC = 90^\circ, \text{ 可得 } \angle EBG = 45^\circ;$$

(2) 设正方形边长为 a , 由对折得 E 是 AD 中点, $AE = ED = \frac{a}{2}$. 由折叠得 $EF = AE$, $FG = CG$, 且

$$\angle BFE + \angle BFG = 180^\circ, \text{ 即 } E, F, G \text{ 共线, 故 } EG = \frac{a}{2} + CG. \text{ 设 } CG = x, \text{ 在 } Rt\triangle DEG \text{ 中由勾股定理}$$

$$\text{得 } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-x)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2, \text{ 解得 } x = \frac{a}{3}, \text{ 即 } CG = \frac{1}{3}CD, \text{ 故 } G \text{ 是 } CD \text{ 的三等分点;}$$

(3) 根据正方形边长为 3, 设 $AE = x$. 由折叠性质得 $PE = DE = 3-x$, $PG = DG$, $\angle P = 90^\circ$. 分两种情况点 P 落在 BE 上和点 P 落在 BG 上进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由折叠可知, $\angle ABE = \angle FBE, \angle CBG = \angle FBG$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle EBG = \angle FBE + \angle FBG$$

$$= \frac{1}{2}\angle ABF + \frac{1}{2}\angle CBF$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ABF + \angle CBF)$$

$$= \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$= 45^\circ;$$

【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

解: 设 $AE = x$,

∵ 正方形边长为 3,

$$\therefore ED = 3 - x,$$

由 (2) 同理可得, E, F, G 共线, 则 $EG = AE + CG$,

设 $CG = y$, 则 $EG = x + y$, $DG = 3 - y$,

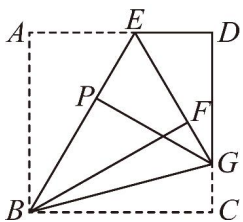
$$\text{在 } Rt\triangle DEG \text{ 中, } (3-x)^2 + (3-y)^2 = (x+y)^2$$

$$\text{解得 } y = \frac{9-3x}{x+3},$$

$$\therefore DG = 3 - y = \frac{6x}{x+3},$$

由折叠可得, $PE = DE = 3 - x$, $PG = DG = \frac{6x}{x+3}$, $\angle P = \angle D = 90^\circ$,

当点 P 落在 BE 边上时, 如图,



$$\therefore \angle EBG = 45^\circ, \angle BPG = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BPG$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore BP = PG,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABE \text{ 中, } BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{9 + x^2},$$

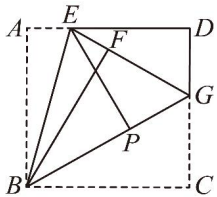
$$\text{又 } \because BE = BP + PE = PG + PE,$$

$$\therefore \sqrt{9 + x^2} = \frac{6x}{x+3} + (3-x)$$

$$18x^2 - 54 = 0$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{3} \text{ (负根舍去),}$$

当点 P 落在 BG 边上时, 如图,



$$\therefore \angle EBG = 45^\circ, \angle BPE = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BEP$ 为等腰直角三角形, 即 $PE = BP$,

$$\therefore BE^2 = PE^2 + BP^2 ,$$

$$\therefore BE = \sqrt{2}PE ,$$

$$\therefore \sqrt{9+x^2} = \sqrt{2}(3-x)$$

$$x^2 - 12x + 9 = 0$$

解得 $x = 6 - 3\sqrt{3}$ 或 $x = 6 + 3\sqrt{3} > 3$ (舍去),

综上所述, AE 的长为 $6 - 3\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$.