

2025-2026 学年八年级下学期期末模拟卷

数学·全解全析版

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 120 分)

注意事项:

- (1) 答题前请填写好自己的姓名、班级、考号等信息。
- (2) 请将答案正确填写在答题区域内。
- (3) 测试范围: 四边形、平面直角坐标系、一次函数、反比例函数。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题: 本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分。

1. 如果一个多边形的边数由 4 增加到 n (n 为整数, 且 $n > 4$), 那么它的外角和的度数 ()

- A. 不变 B. 增加 C. 减少 D. 不能确定

【答案】A

【详解】解: 因为多边形外角和为 360° , 所以外角和的度数是不变的.

故选: A.

2. 点 $A(m, n)$ 与 $B(-3, 2)$ 关于原点对称, 则 $m+n$ 的值为 ()

- A. -1 B. 2 C. 1 D. 5

【答案】C

【详解】解: $\because$ 点 $A(m, n)$ 与点 $B(-3, 2)$ 关于原点对称,

$$\therefore m = -(-3) = 3, \quad n = -2,$$

$$\therefore m+n = 3+(-2) = 1.$$

3. 下列函数中, y 是 x 的正比例函数的是 ()

- A. $y = -3x$ B. $y = 2 - x$ C. $y = -\frac{1}{x}$ D. $y = kx$

【答案】A

【详解】解: A、 $y = -3x$ 符合正比例函数的定义, 符合题意;

B、 $y = 2 - x$ 是一次函数, 常数项不为 0, 不是正比例函数, 不符合题意;

C、 $y = -\frac{1}{x}$ 是反比例函数, 不符合正比例函数的形式, 不符合题意;

D、 $y = kx$ 中未说明 $k \neq 0$, 当 $k = 0$ 时不是正比例函数, 不符合题意.

4. 若一个反比例函数的图象经过 $A(3, -5)$, $B(m+1, -3)$ 两点, 则 m 的值为 ()

- A. 4 B. -4 C. 5 D. -5

【答案】A

【详解】解：由题意得： $3 \times (-5) = (m+1) \times (-3)$ ，

解得 $m = 4$ ，

故选：A.

5. 一个多边形截去一个角后，得到的新多边形内角和为 540° ，则原多边形边数为（ ）

A. 4

B. 6

C. 4 或 6

D. 4 或 5 或 6

【答案】D

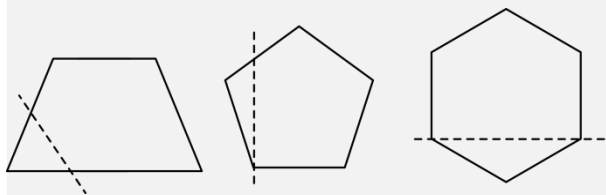
【详解】解：设新多边形边数为 n ，

$\therefore$ 新多边形内角和为 540° ，

$\therefore (n-2) \times 180^\circ = 540^\circ$ ，

解得 $n = 5$ ，

若多边形截去一个角，则会存在以下三种情况，多边形边数不变，增加 1 或减少 1，如下图所示：



$\therefore$ 原多边形边数为 4 或 5 或 6，

故选：D.

6. 如图 1 所示，在平面直角坐标系中，将 $\square ABCD$ 放置在第一象限，且 $AB \parallel x$ 轴. 直线 $y = -x$ 从原点出发沿 x 轴正方向平移，在平移过程中直线被平行四边形截得的线段长度 l 与直线在 x 轴上平移的距离 m 的函数图象如图 2 所示，则 $\square ABCD$ 的面积为（ ）

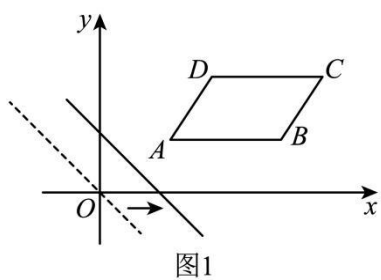


图1

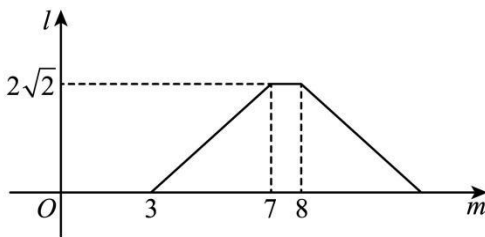


图2

A. 5

B. 10

C. $\sqrt{50}$

D. $\sqrt{75}$

【答案】B

【详解】解：作 $DM \perp AB$ 于点 M ，如图 1 所示，

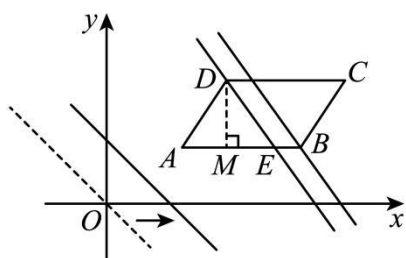


图1

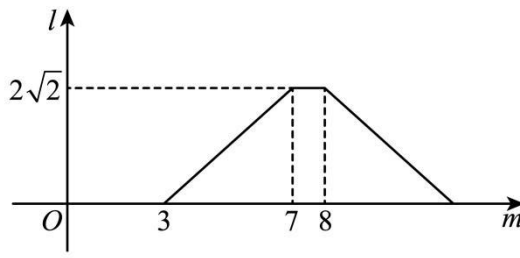


图2

由图象和题意可得， $AE = 7 - 3 = 4$ ， $EB = 8 - 7 = 1$ ， $DE = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore AB = 4 + 1 = 5$ ，

$\therefore$ 直线 DE 平行直线 $y = -x$ ，

$\therefore DM = ME$ ，

$\therefore DM = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = 2$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积是： $5 \times 2 = 10$ 。

第二部分（非选择题 共 102 分）

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。

7. 一个多边形的每一个外角都是 60° ，那么这个多边形的形状一定是_____。

【答案】 六边形

【详解】 解： $\because$ 一个多边形的每一个外角都是 60° ，

$\therefore$ 多边形的边数是 $360^\circ \div 60^\circ = 6$ ，

$\therefore$ 这个多边形的形状一定是六边形。

故答案为：六边形。

8. 在平面直角坐标系中，点 $M(a, b)$ 与点 $N(3, -1)$ 关于 y 轴对称，则 $a - b$ 的值是_____。

【答案】 -2

【详解】 解： $\because$ 点 $M(a, b)$ 与点 $N(3, -1)$ 关于 y 轴对称，

$\therefore a = -3$ ， $b = -1$ ，

$\therefore a - b = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$ 。

9. 直线 $y = 2x - 7$ 在 y 轴上的截距是_____。

【答案】 -7

【详解】 解：当 $x = 0$ 时， $y = 2 \times 0 - 7 = -7$

$\therefore$ 直线 $y = 2x - 7$ 在 y 轴上的截距为 -7

10. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-1, 2)$ ，则该函数的表达式为_____。

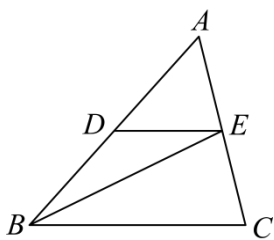
【答案】 $y = -\frac{2}{x}$

【详解】解：将点 $(-1, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ ，得 $2 = \frac{k}{-1}$ ，

解得 $k = -2$ ，

$\therefore$ 该函数的表达式为 $y = -\frac{2}{x}$ 。

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点，连接 BE ， DE 。如果 $\angle AED = \angle BEC$ ， $DE = 3$ ，那么 BE 的长为_____。



【答案】 6

【详解】解： $\because D$ 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB ， AC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE \parallel BC$ ， $BC = 2DE = 6$ ，

$\therefore \angle AED = \angle C$ ，

$\because \angle AED = \angle BEC$ ，

$\therefore \angle C = \angle BEC$ ，

$\therefore BE = BC = 6$ ，

故答案为：6。

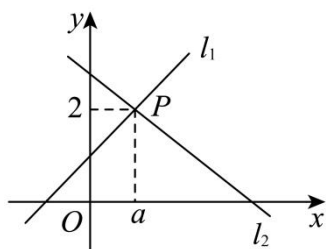
12. 点 $A(-\sqrt{2}, 6)$ 和点 $B(\sqrt{2}, -1)$ 之间的距离是_____。

【答案】 $\sqrt{57}$

【详解】解：根据勾股定理，得 $AB = \sqrt{(-\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + [6 - (-1)]^2} = \sqrt{57}$ ，

所以点 A 和 B 之间的距离是 $\sqrt{57}$ 。

13. 如图，直线 $l_1: y = x + 1$ 与直线 $l_2: y = mx + n$ 相交于点 $P(a, 2)$ ，则关于 x 的不等式 $x + 1 \geq mx + n$ 的解集为_____。



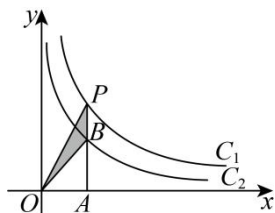
【答案】 $x \geq 1$

【详解】解：将点 $P(a, 2)$ 坐标代入直线 $y = x + 1$ ，得 $a = 1$ ，

从图中直接看出，当 $x \geq 1$ 时， $x + 1 \geq mx + n$ ，

故答案为： $x \geq 1$ 。

14. 如图，两个反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = \frac{4}{x}$ 在第一象限的图象分别是 C_1 和 C_2 ，若点 P 在 C_1 上， $PA \perp x$ 轴于点 A ，交 C_2 于点 B ，则 $\triangle POB$ 的面积为_____。



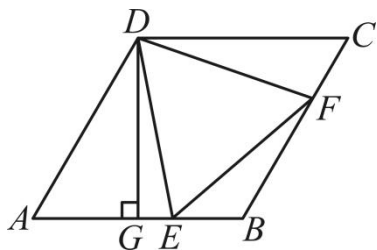
【答案】 1

【详解】解：∵ 点 P 在 C_1 上， $PA \perp x$ 轴于点 A ，交 C_2 于点 B ，且 C_1 是 $y = \frac{6}{x}$ ， C_2 是 $y = \frac{4}{x}$ ，

$$\therefore S_{\triangle OPA} = \frac{6}{2} = 3, \quad S_{\triangle BOA} = \frac{4}{2} = 2,$$

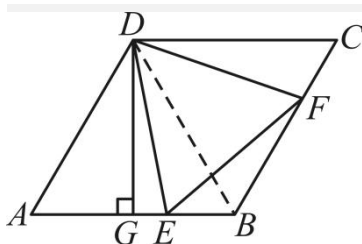
$$\therefore S_{\triangle POB} = S_{\triangle POA} - S_{\triangle BOA} = 3 - 2 = 1.$$

15. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，点 E, F 分别在边 AB, BC 上， $\triangle DEF$ 为等边三角形， $DG \perp AB$ 。若 $AD = 6$ ， $AE = 4$ ，则 EF 的长为_____。



【答案】 $2\sqrt{7}$

【详解】解：如图，连接 BD ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore AB = AD = 6$,

又 $\because \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$\because DG \perp AB$,

$\therefore AG = BG = \frac{1}{2}AB = 3$,

$\therefore EG = AE - AG = 1$,

由勾股定理得, $DG = \sqrt{AD^2 - AG^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

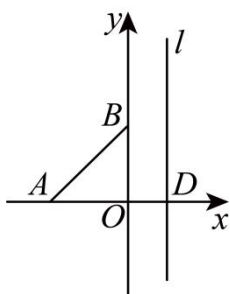
$\therefore DE = \sqrt{DG^2 + EG^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7}$,

$\because \triangle DEF$ 是等边三角形,

$\therefore EF = DE = 2\sqrt{7}$.

故答案为: $2\sqrt{7}$.

16. 如图, 在平面直角坐标系中, $A(-2,0)$, $B(0,2)$, 直线 $l \perp x$ 轴, 垂足为点 $D(1,0)$, 点 P 为直线 l 上一动点, 当 $S_{\triangle PAB} = 2$ 时, 则点 P 坐标_____.



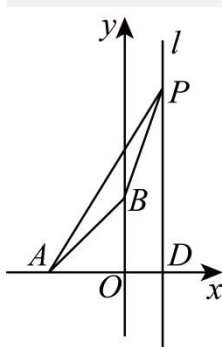
【答案】 $(1,1)$ 或 $(1,5)$

【详解】 解: 设点 P 的坐标为 $(1, p)$,

$\because A(-2,0)$, $B(0,2)$, $D(1,0)$,

$$\therefore AD=3, \quad OB=2, \quad OA=2, \quad OD=1,$$

如图所示，当点 P 在点 B 上方时，



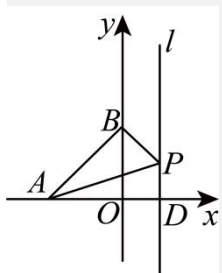
$$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PAD} - S_{\triangle AOB} - S_{\text{梯形}OBPD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3p - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{2+p}{2} \times 1 = 2,$$

解得 $p=5$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1,5)$;

如图所示，当点 P 在点 B 下方，且在 x 轴上方时，



$$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle AOB} + S_{\text{梯形}OBPD} - S_{\triangle PAD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{2+p}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 3p = 2,$$

解得 $p=1$,

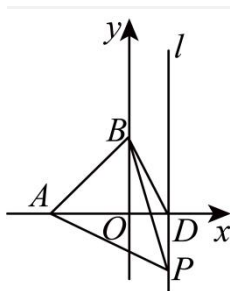
$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1,1)$;

如图所示，当点 P 在 x 轴下方时，

$$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle APD} - S_{\triangle PBD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3(-p) - \frac{1}{2} \times 1 \cdot (-p) = 2,$$

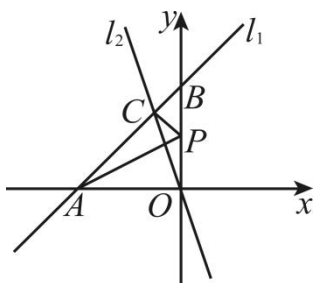
解得 $p=1$ (舍去);



综上所述，点 P 的坐标为 $(1,1)$ 或 $(1,5)$ ，

故答案为： $(1,1)$ 或 $(1,5)$ 。

17. 如图所示，在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = x + 4$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 A 、点 B ，直线 $l_2: y = -3x$ 过原点且与直线 l_1 相交于点 C ，点 P 为 y 轴上一动点，当 $PA + PC$ 的值最小时，此时点 P 的坐标为 _____。



【答案】 $\left(0, \frac{12}{5}\right)$

【详解】解： $\because$ 直线 $l_1: y = x + 4$ ①与直线 $l_2: y = -3x$ ②相交于点 C ，

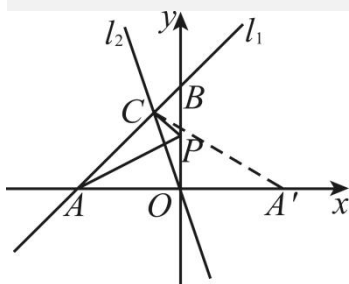
$\therefore$ 联立①②解得， $x = -1$ ， $y = 3$ ，

$\therefore C(-1, 3)$ ；

在 $y = x + 4$ 中，当 $y = 0$ 时， $x = -4$ ，

$\therefore A(-4, 0)$ ，

作点 $A(-4, 0)$ 关于 y 轴的对称点 $A'(4, 0)$ ，连接 CA' 交 y 轴于点 P ，此时 $PC + PA$ 最小，如图：



设直线 CA' 的解析式为 $y = kx + b$ ，

把 $C(-1,3)$, $A'(4,0)$ 代入得: $\begin{cases} -k+b=3 \\ 4k+b=0 \end{cases}$,

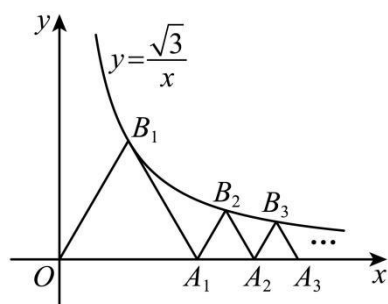
解得: $\begin{cases} k=-\frac{3}{5} \\ b=\frac{12}{5} \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 CA' 的解析式为 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}$,

令 $x=0$ 时 $y=\frac{12}{5}$,

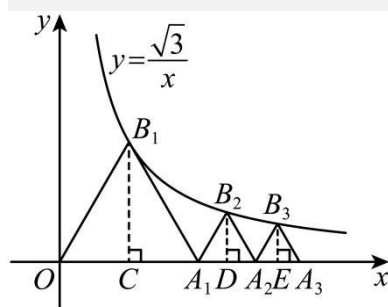
$\therefore$ 点 $P(0, \frac{12}{5})$.

18. 如图, $\triangle OB_1A_1$, $\triangle A_1B_2A_2$, $\triangle A_2B_3A_3$, $\dots$, $\triangle A_{n-1}B_nA_n$ 都是一边在 x 轴上的等边三角形, 点 B_1 , B_2 , B_3 , $\dots$, B_n 都在反比例函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}(x>0)$ 的图象上, 点 A_1 , A_2 , A_3 , $\dots$, A_n 都在 x 轴上, 则 A_{2027} 的坐标为_____.



【答案】 $(2\sqrt{2027}, 0)$

【详解】 解: 如图, 过点 B_1 作 $B_1C \perp x$ 轴于 C , 过点 B_2 作 $B_2D \perp x$ 轴于 D , 过点 B_3 作 $B_3E \perp x$ 轴于 E ,



$\therefore \triangle OB_1A_1$, $\triangle A_1B_2A_2$, $\triangle A_2B_3A_3$, $\dots$, $\triangle A_{n-1}B_nA_n$ 都是一边在 x 轴上的等边三

角形,

$\therefore$ 设 $OC=t$, 则 $B_1C=\sqrt{3}t$,

$\therefore B_1(t, \sqrt{3}t)$,

$\therefore$ 点 B_1 在反比例函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}(x>0)$ 的图象上,

$$\therefore \sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{t}, \text{ 解得 } t=1 \text{ 或 } t=-1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore OC=1, \quad OA_1=2,$$

$$\therefore A_1(2,0),$$

同理设 A_1D 长度为 m , 则 B_2D 长度为 $\sqrt{3}m$,

$$\therefore B_2(2+m, \sqrt{3}m),$$

$\because$ 点 B_2 在反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore \sqrt{3}m = \frac{\sqrt{3}}{2+m}, \text{ 解得 } m = \sqrt{2}-1 \text{ 或 } m = -\sqrt{2}-1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore A_1D = \sqrt{2}-1, \quad A_1A_2 = 2\sqrt{2}-2,$$

$$\therefore OA_2 = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore A_2(2\sqrt{2}, 0),$$

同理设 A_2E 长度为 n , 则 B_3E 长度为 $\sqrt{3}n$,

$$\therefore B_3(2\sqrt{2}+n, \sqrt{3}n),$$

$\because$ 点 B_3 在反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore \sqrt{3}n = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+n}, \text{ 解得 } n = \sqrt{3}-\sqrt{2} \text{ 或 } n = -\sqrt{3}-\sqrt{2} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore A_2E = \sqrt{3}-\sqrt{2}, \quad A_2A_3 = 2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

$$\therefore OA_3 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore A_3(2\sqrt{3}, 0),$$

以此类推可得: $A_n(2\sqrt{n}, 0),$

$$\therefore A_{2027}(2\sqrt{2027}, 0).$$

三、解答题: 本题共 8 小题, 共 66 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. (5 分) 在平面直角坐标系中, 已知点 $P(2a-3, a+1)$ 在 x 轴上, 求点 P 的坐标.

【详解】解: $\because$ 点 $P(2a-3, a+1)$ 在 x 轴上,

$$\therefore a+1=0,$$

$$\therefore a=-1, \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

$$\therefore 2a-3=-5,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标是 } (-5,0). \cdots \cdots (6 \text{ 分})$$

20. (5 分) 已知一次函数 $y=k_1x-4$ 与正比例函数 $y=k_2x$ 的图像都经过点 $(2,-8)$.

(1) 分别求出这两个函数的解析式;

(2) 求一次函数图像与 x 轴和 y 轴围成的三角形面积.

【详解】(1) 解: 把点 $(2,-8)$ 代入函数 $y=k_1x-4$ 得,

$$-8=2k_1-4, \quad k_1=-2$$

则函数解析式为: $y=-2x-4$;

把点 $(2,-8)$ 代入函数 $y=k_2x$ 得,

$$k_2=-4$$

则函数解析式为: $y=-4x$; $\cdots \cdots (3 \text{ 分})$

(2) 解: 令 $y=-2x-4$ 中的 $y=0$, 则 $x=-2$,

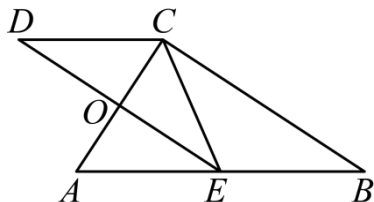
$\therefore$ 与 x 轴的交点为 $(-2,0)$,

令 $y=-2x-4$ 中的 $x=0$, 则 $y=-4$,

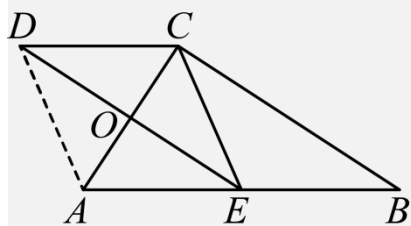
$\therefore$ 与 y 轴的交点为 $(0,-4)$,

$\therefore$ 三角形面积为: $S=\frac{1}{2} \times 4 \times 2=4$. $\cdots \cdots (6 \text{ 分})$

21. (6 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, E 为 AB 的中点, 四边形 $BCDE$ 是平行四边形, 求证: AC 与 DE 互相垂直平分.



【详解】解: 如图, 连接 AD ,



$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形,

$\therefore BE = CD, BE \parallel CD,$

$\therefore \angle ACB = 90^\circ, E$ 为 AB 的中点,

$\therefore AE = BE = CE,$

$\therefore AE = CD,$

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形, $\cdots\cdots$ (4 分)

又 $\therefore AE = CE,$

$\therefore$ 平行四边形 $AECD$ 是菱形,

$\therefore AC$ 与 DE 互相垂直平分. $\cdots\cdots$ (6 分)

22. (6 分) 一个反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $P(2, -3)$.

(1) 求该反比例函数的解析式.

(2) 当 $y = 3$ 时, 求 x 的值.

【详解】 (1) 解: 将 $P(2, -3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得

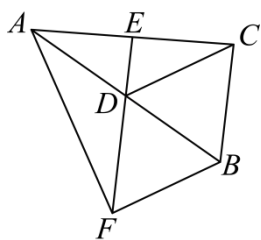
$$k = 2 \times (-3) = -6,$$

$\therefore$ 该反比例函数的解析式为 $y = -\frac{6}{x}$; $\cdots\cdots$ (4 分)

(2) 解: 当 $y = 3$ 时, 代入 $y = -\frac{6}{x}$ 得 $3 = -\frac{6}{x},$

$x = -2$. $\cdots\cdots$ (6 分)

23. (8 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为边 AB, AC 的中点, 延长 ED 至点 F , 使得 $DF = 2DE$, 连接 CD, BF .



(1) 求证: 四边形 $BCDF$ 是平行四边形;

(2) AF ，如果 $AF = AC$ ，请判断四边形 $BCDF$ 是什么特殊的平行四边形，并证明.

【详解】(1) 证明： $\because D, E$ 分别为边 AB, AC 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC, DE \parallel BC,$$

$$\therefore DF = 2DE,$$

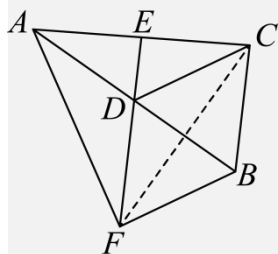
$$\therefore DF = BC,$$

$$\therefore DF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形；…… (3 分)

(2) 解：四边形 $BCDF$ 是菱形.

联结 CF ；



$\because$ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形，

$\therefore BD, CF$ 互相平分，

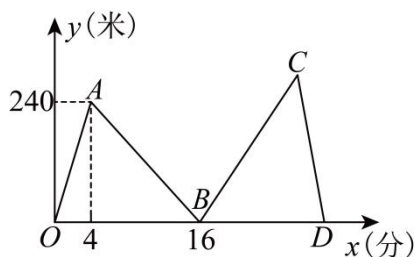
$\because AF = AC$ ，

$\therefore AB \perp CF$ ，即 $BD \perp CF$ ，

$\because$ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形，

$\therefore$ 平行四边形 $BCDF$ 是菱形.…… (7 分)

24. (10 分) 甲、乙两人在笔直的湖边公路上同起点、同终点、同方向匀速步行 2400 米，先到终点的人原地休息. 已知甲先出发 4 分钟，在整个步行过程中，甲、乙两人间的距离 y (米) 与甲出发的时间 x (分) 之间的关系如图中折线 $OA-AB-BC-CD$ 所示.



(1) 求线段 AB 的表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 求乙比甲早几分钟到达终点？

【详解】(1) 解：根据题意得：

设线段 AB 的表达式为： $y = kx + b (4 \leq x \leq 16)$ ，

把 $(4, 240)$ ， $(16, 0)$ 代入得：

$$\begin{cases} 4k + b = 240 \\ 16k + b = 0 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k = -20 \\ b = 320 \end{cases}$ ，

即线段 AB 的表达式为： $y = -20x + 320 (4 \leq x \leq 16)$ ，…… (4 分)

(2) 解：线段 OA 可知：甲的速度为： $\frac{240}{4} = 60$ (米/分)，

乙的步行速度为： $\frac{240 + (16 - 4) \times 60}{16 - 4} = 80$ (米/分)，

在 B 处甲乙相遇时，与出发点的距离为： $240 + (16 - 4) \times 60 = 960$ (米)，

与终点的距离为： $2400 - 960 = 1440$ (米)，

相遇后，到达终点甲所用的时间为： $\frac{1440}{60} = 24$ (分)，

相遇后，到达终点乙所用的时间为： $\frac{1440}{80} = 18$ (分)， $24 - 18 = 6$ (分)，

答：乙比甲早 6 分钟到达终点。…… (8 分)

25. (12 分) 小普在综合与实践课上，参加了以“神奇的正方形”为主题的数学活动，通过“折、转、探”等方式研究有关正方形折纸的有趣结论。

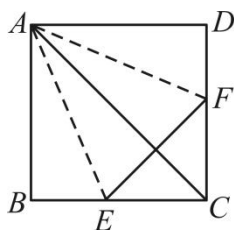


图-1

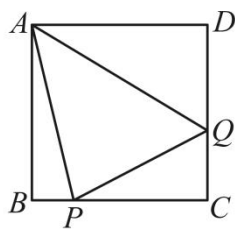
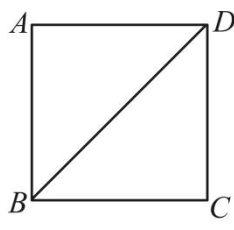
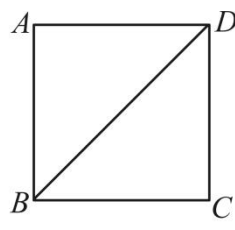


图-2



备用图



备用图

(1) 折一折：如图-1，小普将正方形纸片 $ABCD$ 折叠，使边 AB 、 AD 都落在对角线 AC 上，展开得折痕 AE 、 AF ，联结 EF 。那么 $\angle EAF =$ _____ 度；如果 $AB = 1$ ，那么 EF 的长度等于 _____；

(2) 转一转：小普将图-1 中的 $\angle EAF$ 绕点 A 旋转，使它的两边分别交直线 BC 、 CD 于点 P 、 Q 。

① 如图-2，当点 P 、 Q 在边 BC 、 CD 上，联结 PQ 。如果 $BP = 1$ ， $DQ = 3$ ，求 $\triangle APQ$ 的面积；

② 探一探：联结 BD ，射线 AP 、 AQ 分别交对角线 BD 所在直线于点 M 、 N ，且点 N 在正方形内部。正方

形的边长 $AB = a$ ，联结 CM 。如果 $\triangle PCM$ 是等腰三角形，请直接写出线段 CP 的长度_____。（用含有字母 a 的代数式表示）

【详解】（1）解：如图 1，延长 CB 至点 F' ，使 $BF' = DF$ ，连接 AF' ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

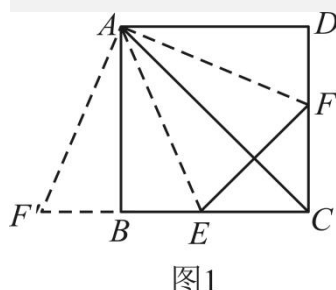


图1

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ$ ， $AB = BC = CD = AD$ ， $\angle BCD = \angle D = \angle ABE = 90^\circ$ ，

由折叠得： $\angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 22.5^\circ$ ， $\angle DAF = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle ADC = 22.5^\circ$ ，

$\therefore \angle EAF = 22.5^\circ + 22.5^\circ = 45^\circ$ ，

设 $DF = x$ ，

$\because AD = AB$ ， $\angle D = \angle ABF' = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABF'$ (SAS)，

$\therefore AF = AF'$ ， $\angle DAF = \angle BAF' = 22.5^\circ = \angle BAE$ ，

$\because AB = AB$ ， $\angle ABE = \angle ABF' = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ABF'$ ，

$\therefore BE = BF' = x$ ，

$\because \angle EAF = \angle EAF' = 45^\circ$ ， $AE = AE$ ，

$\therefore \triangle AEF' \cong \triangle AEF$ ，

$\therefore EF = EF' = 2x$ ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 是正方形，且边长 $= 1$ ，

$\therefore BC = DC = 1$ ，

$\therefore CE = CF = 1 - x$ ，

由勾股定理得： $CE^2 + CF^2 = EF^2$ ，

$\therefore (1-x)^2 + (1-x)^2 = (2x)^2$ ，

$\therefore x_1 = -1 + \sqrt{2}$ ， $x_2 = -1 - \sqrt{2}$ （舍），

$\therefore EF = 2x = 2\sqrt{2} - 2$ ，

故答案为：45， $2\sqrt{2}-2$ ；……（2分）

（2）①如图2，由旋转得： $\angle PAQ = 45^\circ$ ，

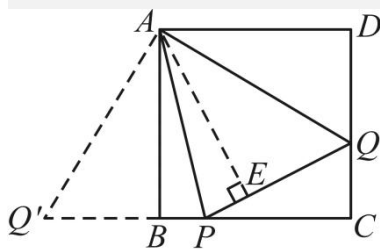


图2

延长CB至点Q，使 $BQ=DQ$ ，连接AQ'，过点A作 $AE \perp PQ$ 于点E，

同理得： $\triangle ADQ \cong \triangle ABQ$ ， $\triangle APQ \cong \triangle APQ$ ，

$\therefore BQ=DQ=3$ ， $PQ=PQ$ ， $\angle APB=\angle APE$ ，

$\therefore BP=1$ ，

$\therefore PQ=3+1=4$ ，

$\therefore PQ=4$ ，

设 $PC=a$ ， $BC=CD=a+1$ ，

$\therefore CQ=a+1-3=a-2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 中， $PC^2+CQ^2=PQ^2$ ，

$\therefore a^2+(a-2)^2=4^2$ ，

$\therefore a^2-2a-6=0$ ，

解得： $a_1=1-\sqrt{7}$ （舍）， $a_2=1+\sqrt{7}$ ，

$\therefore AB=BC=a+1=1+\sqrt{7}+1=\sqrt{7}+2$ ，

$\therefore \angle ABP=\angle AEP=90^\circ$ ， $\angle APB=\angle APE$ ， $AP=AP$ ，

$\therefore \triangle APB \cong \triangle APE$ （AAS），

$\therefore AE=AB=\sqrt{7}+2$ ，

$\therefore \triangle APQ$ 的面积 $=\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot AE = \frac{1}{2} \times 4 \times (\sqrt{7}+2) = 2\sqrt{7}+4$ ；

②分两种情况：

i) 如图3， $PC=PM$ ，过点M作 $MG \perp BC$ 于点G，则 $\angle BGM=\angle CGM=90^\circ$ ，

设 $\angle BCM=a$ ， $PG=x$ ，

$$\therefore \angle CMP = \angle BCM = a,$$

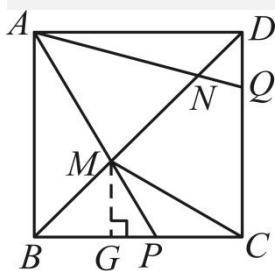


图3

$$\therefore \angle BPM = 2a,$$

$$\because AB = BC, \angle ABM = \angle CBM, BM = BM,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CBM,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle BCM = a,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore a + 2a = 90^\circ,$$

$$\therefore a = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BPM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PMG = 30^\circ,$$

$$\therefore CP = PM = 2x, GM = \sqrt{3}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle BMG$ 中, $\angle MBG = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BMG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BG = MG = \sqrt{3}x,$$

$$\because BC = a,$$

$$\therefore \sqrt{3}x + x + 2x = a,$$

$$\therefore x = \frac{a}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})a}{6},$$

$$\therefore PC = 2x = \frac{(3 - \sqrt{3})a}{3}; \dots\dots (6 \text{ 分})$$

ii) 如图 4, $PC = PM$,

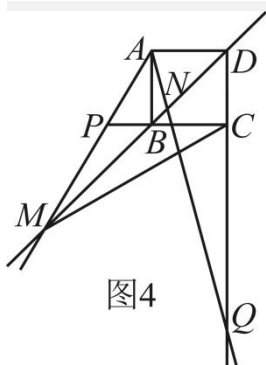


图4

$$\therefore \angle PCM = \angle PMC,$$

同理得: $\triangle ABM \cong \triangle CBM$,

$$\therefore \angle BAM = \angle PCM = \angle CPM,$$

$$\therefore \angle APB = \angle PCM + \angle CPM = 2\angle PAB,$$

$$\therefore \angle ABP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle PAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB = 30^\circ,$$

设 $PB = b$, 则 $AP = 2b$,

$$\therefore AB = \sqrt{3}b,$$

$$\therefore AB = a,$$

$$\therefore a = \sqrt{3}b,$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore PC = BC + PB = a + \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}a;$$

综上, 线段 CP 的长度 $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}a$ 或 $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}a$ (9 分)

26. (14 分) 如图 1, 已知点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, 且 a, b 满足 $\sqrt{a+1} + (a+b+3)^2 = 0$, 平行四边形 $ABCD$ 的边

AD 与 y 轴交于点 E , 且 E 为 AD 中点, 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 经过 C, D 两点.

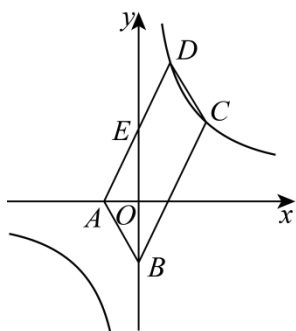


图1

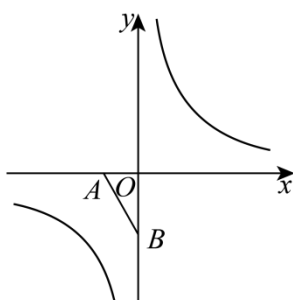


图2(备用图)

(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 求反比例函数表达式;

(3) 点 P 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上, 点 Q 在 x 轴上, 若以点 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形, 直接写出满足要求的所有点 Q 的坐标.

【详解】(1) 解: $\because \sqrt{a+1} + (a+b+3)^2 = 0$, $\sqrt{a+1} \geq 0, (a+b+3)^2 \geq 0$,

$$\therefore \begin{cases} a+1=0 \\ a+b+3=0 \end{cases}, \text{解得, } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases},$$

$\therefore a = -1$, $b = -2$. $\cdots\cdots$ (2分)

(2) 解: 由 (1) 可知, $a = -1$, $b = -2$,

$\therefore A(-1, 0)$, $B(0, -2)$,

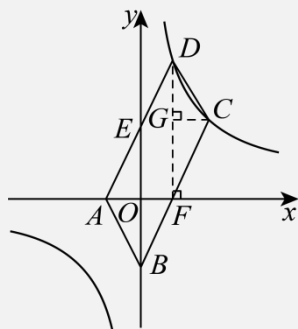
$\therefore AO = 1$

$\because E$ 为 AD 中点, 且点 E 的横坐标为 0 , 设点 D 的横坐标为 x_D ,

$$\therefore \frac{x_D + (-1)}{2} = 0,$$

$\therefore x_D = 1$, 设 $D(1, t)$,

如图, 过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 过点 C 作 $CG \perp DF$ 于点 G ,



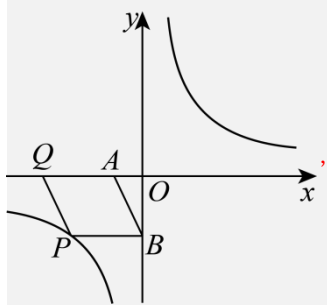
$\therefore DF \parallel y$ 轴,

$\therefore \angle FDE = \angle OEA = \angle EBC$,
 $\therefore \angle ABO = \angle CDG$, 且 $AB = CD$, $\angle AOB = \angle CGD = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle AOB \cong \triangle CGD \text{ (AAS)}$,
 $\therefore CG = AO = 1$, $DG = BO = 2$,
 $\therefore C(2, t-2)$,
 $\therefore$ 点 $D(1, t)$, $C(2, t-2)$ 都在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上,
 $\therefore k = xy = t = 2(t-2)$,
 $\therefore t = 2t - 4$, 解得: $y = 4$,
 $\therefore D(1, 4)$,
 $\therefore D(1, 4)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上,
 $\therefore k = xy = 1 \times 4 = 4$,
 $\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{4}{x}$ (6 分)

(3) 解: 设 $Q(q, 0)$, $P\left(p, \frac{4}{p}\right)$,

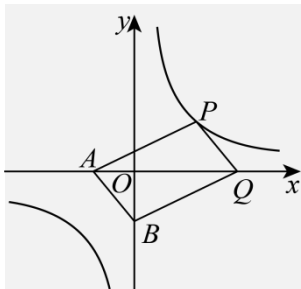
①当 AB 为边时:

第一种情况: 如图所示, 若 $ABPQ$ 为平行四边形, 则 $AB \parallel AQ$, $AQ = PB$, 即 $PB \parallel x$ 轴



$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 -2 , 即 $\frac{4}{p} = -2$, 解得: $p = -2$,
 $\therefore P(-2, -2)$, 即 $PB = 2$,
 $\therefore AQ = -1 - q = 2$, 解得: $q = -3$,
 $\therefore Q_1(-3, 0)$;

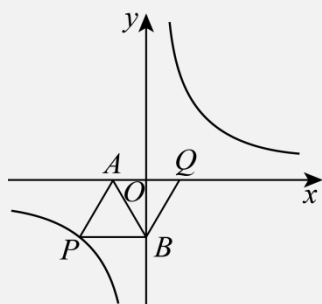
第二种情况: 如图所示, 若 $ABQP$ 为平行四边形,



$$\therefore \begin{cases} \frac{-1+q}{2} = \frac{0+p}{2} \\ \frac{0+0}{2} = \frac{-2+\frac{4}{p}}{2} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} p=2 \\ q=3 \end{cases},$$

$$\therefore Q_2(3,0);$$

②当 AB 为对角线时: 如图所示,



$$\because PB \parallel AQ, PB = AQ,$$

$$\therefore \text{点 } P、B \text{ 的横坐标相同, 即 } \frac{4}{p} = -2, \text{ 解得: } p = -2,$$

$$\therefore P(-2, -2), \text{ 即 } PB = 2,$$

$$\therefore PB = AQ = 2,$$

$$\therefore q - (-1) = 2, \text{ 解得: } q = 1,$$

$$\therefore Q_3(1,0).$$

综上, $Q_1(-3,0); Q_2(3,0); Q_3(1,0)$. …… (10 分)