

2025 学年第二学期

八年级数学

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分) (2026.6)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 24 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 5 题, 每题 4 分, 满分 20 分)

【下列各题的四个结论中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列函数中, 反比例函数的是 ()

- A. $y = 3x + 1$ B. $y = \frac{x}{3}$ C. $y = \frac{3}{x}$ D. $y = 3$

【答案】C

【解析】

【分析】一般地, 形如 $y = \frac{k}{x}$ (其中 k 为常数, 且 $k \neq 0$) 的函数叫做反比例函数, 据此可得答案.

【详解】解: 由反比例函数的定义可知, 四个选项中, 只有 C 选项中的函数是反比例函数.

2. 将直线 $y = 2x$ 向上平移 1 个单位, 平移后的新直线一定不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】先根据一次函数图象平移规则求出平移后的解析式, 再利用一次函数 k 和 b 的符号判断直线经过的象限, 即可得到不经过的象限.

【详解】解: 直线 $y = 2x$ 向上平移 1 个单位, 根据平移“上加下减”的规则, 可得平移后的解析式为

$$y = 2x + 1,$$

$$\because k = 2 > 0,$$

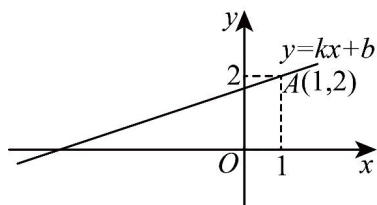
$\therefore$ 直线经过第一, 三象限,

$\because b=1>0$,

$\therefore$ 直线与 y 轴交于正半轴, 经过第二象限,

因此平移后的直线经过第一, 第二, 第三象限, 一定不经过第四象限.

3. 如图, 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图像经过点 $A(1,2)$, 则关于 x 的不等式 $kx+b < 2$ 的解集是 ()



A. $x > 1$

B. $x < 1$

C. $x > 0$

D. $x < 0$

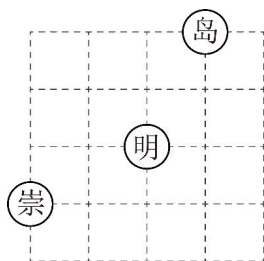
【答案】 B

【解析】

【分析】 根据图象经过点 $A(1,2)$ 写出 x 的范围即可.

【详解】 解: 由图象可知, 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图像经过点 $A(1,2)$, 则关于 x 的不等式 $kx+b < 2$ 的解集是 $x < 1$.

4. 如图, 在正方形网格中建立平面直角坐标系, 使“崇”, “明” 所在位置的坐标分别是 $(0,-1)$ 、 $(2,0)$, 则“岛” 的坐标是 ()



A. $(2,2)$

B. $(2,3)$

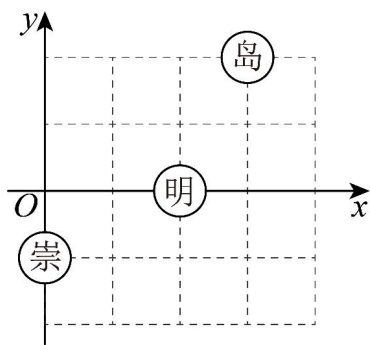
C. $(3,2)$

D. $(3,3)$

【答案】 C

【解析】

【详解】 解: 如图, 建立平面直角坐标系如下:



“岛”的坐标是 $(3, 2)$.

5. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = BC$, 下列说法能使四边形 $ABCD$ 为矩形的是 ()

- A. $\angle A = \angle B$ B. $\angle A = \angle D$ C. $AB = BC$ D. $AC = BD$

【答案】B

【解析】

【分析】已知 $AB \parallel CD$, $AD = BC$, 可得四边形 $ABCD$ 为等腰梯形或平行四边形, 结合矩形的判定, 逐一分析各选项即可.

【详解】解: $AB \parallel CD$, $AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形或平行四边形.

对选项 A: 若四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, AB 为底边, 等腰梯形同一底上的角相等, 满足 $\angle A = \angle B$, 但不是矩形, 故 A 不符合题意.

对选项 B: $AB \parallel CD$

$$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$$

$$\because \angle A = \angle D$$

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$$

同理可得 $\angle B = \angle C = 90^\circ$,

即四边形 $ABCD$ 四个内角均为直角,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 故 B 符合题意.

对选项 C: 等腰梯形可以满足腰长等于底边长, 即 $AB = BC$, 仍为等腰梯形, 不是矩形, 故 C 不符合题意.

对选项 D: 等腰梯形对角线相等, 满足 $AC = BD$, 但等腰梯形不是矩形, 故 D 不符合题意.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置.】

6. 函数 $y = \sqrt{x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 可得 $x-1 \geq 0$, 解不等式即可, 熟知根号下需要大于等于 0, 是解题的关键.

【详解】 解: 根据二次根式的意义, 有 $x-1 \geq 0$,
解得 $x \geq 1$,

故自变量 x 的取值范围是 $x \geq 1$,

故答案为: $x \geq 1$.

7. 点 $A(2, -3)$ 向左平移 3 个单位长度后对应的点的坐标是_____.

【答案】 $(-1, -3)$

【解析】

【分析】 根据平移中点的坐标变化规律, 横坐标左移减, 右移加, 向左平移纵坐标不变, 依此计算即可.

【详解】 解: 点 $A(2, -3)$ 向左平移 3 个单位长度, 横坐标为 $2-3 = -1$, 纵坐标保持不变为 -3 ,
因此平移后对应点的坐标为 $(-1, -3)$.

8. 如果点 $M(-1, \sqrt{2})$ 关于 x 轴对称的点记为点 N , 那么线段 MN 长度是_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先根据关于 x 轴对称的点的坐标特征求出点 N 的坐标, 再计算线段 MN 的长度.

【详解】 解: $\because$ 点 $M(-1, \sqrt{2})$ 关于 x 轴对称的点记为点 N ,
 $\therefore N(-1, -\sqrt{2})$,
 $\therefore$ 线段 MN 长度是 $\sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

9. 已知函数 $y = (m-1)x + m^2 - 1$ 是正比例函数, 则 $m =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的定义, 解题的关键是掌握正比例函数的定义条件: 正比例函数 $y = kx$ 的

定义条件是: k 为常数且 $k \neq 0$, 自变量次数为1.

根据正比例函数的定义列出方程求解即可.

【详解】解: $\because y = (m-1)x + m^2 - 1$ 是正比例函数,

$$\therefore m^2 - 1 = 0 \text{ 且 } m - 1 \neq 0,$$

解得: $m = -1$;

故答案为: -1 .

10. 点 $P(2, a+1)$ 在第一象限, 且到 y 轴的距离是到 x 轴距离的 3 倍, 则 a 的值是_____.

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】先根据第一象限点的坐标特点判断横纵坐标的符号, 再结合点到坐标轴距离的定义和题目给出的倍数关系列方程, 解方程即可得到 a 的值.

【详解】解: $\because$ 点 $P(2, a+1)$ 在第一象限,

$$\therefore 2 > 0, \quad a+1 > 0,$$

$\therefore$ 点 $P(2, a+1)$ 到 y 轴的距离是到 x 轴距离的 3 倍,

$$\therefore |2| = 3|a+1|,$$

$$\therefore 2 = 3(a+1),$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3}.$$

11. 某函数符合如下条件: ①图像经过 $(2, 3)$; ②当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小. 请写出一个满足条件的函数表达式: _____.

【答案】 $y = \frac{6}{x}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据给定条件, 满足要求的函数可以为反比例函数, 可设反比例函数解析式, 利用待定系数法求解即可, 确定函数类型再求解是解题关键.

【详解】解: 选择反比例函数进行求解, 设函数表达式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

$\because$ 函数图象经过点 $(2, 3)$,

$$\therefore \text{将 } x = 2, y = 3 \text{ 代入得 } k = 2 \times 3 = 6,$$

∴ 满足条件的函数表达式可以为 $y = \frac{6}{x}$

12. 已知反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ ，当 $-3 \leq x \leq -1$ 时， y 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{2}{3} \leq y \leq 2$

【解析】

【分析】 根据反比例函数的比例系数判断图象位置与增减性，结合已知 x 的取值范围计算端点对应的 y 值，即可得到 y 的取值范围.

【详解】 解：∵ 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 中 $k = -2 < 0$,

∴ 函数图象位于第二、四象限，在每个象限内 y 随 x 的增大而增大，

∵ $-3 \leq x \leq -1 < 0$,

∴ 图象在第二象限，

当 $x = -3$ 时， $y = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ ，当 $x = -1$ 时， $y = -\frac{2}{-1} = 2$ ，

∴ 当 $-3 \leq x \leq -1$ 时， y 的取值范围是 $\frac{2}{3} \leq y \leq 2$.

13. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A : \angle B = 1 : 3$ ，则 $\angle C =$ _____.

【答案】 45° ## 45 度

【解析】

【分析】 利用平行四边形对边平行、对角相等的性质，结合已知角度比例关系求解即可.

【详解】 解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle C$ ，

由两直线平行，同旁内角互补，可得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，

∵ $\angle A : \angle B = 1 : 3$ ，

设 $\angle A = x$ ，则 $\angle B = 3x$ ，

可得方程 $x + 3x = 180^\circ$ ，

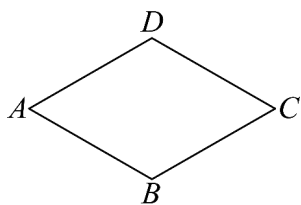
解得 $x = 45^\circ$ ，

即 $\angle A = 45^\circ$ ，

又∵ $\angle A = \angle C$ ，

∴ $\angle C = 45^\circ$.

14. 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，边 $AB = 6$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积是_____.

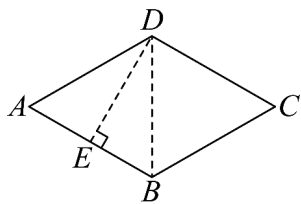


【答案】 $18\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 连接 BD ，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，根据已知条件可得 $\triangle ABD$ 是等边三角形，在 $Rt\triangle ADE$ 中利用勾股定理，求出 DE 的长，利用菱形面积等于边长 $\times$ 边上的高求解.

【详解】 解：连接 BD ，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E . 如图所示，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

$\therefore AD=AB=6$.

$\because \angle A=60^\circ$.

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\because DE \perp AB$.

$\therefore AE = \frac{1}{2} AB = 3$.

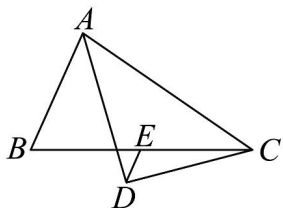
在 $Rt\triangle ADE$ 中, $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\text{菱形} ABCD} = AB \cdot DE = 6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$,

故答案为: $18\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了菱形的性质与等边三角形的判定，掌握有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形是解题的关键.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ， $CD \perp AD$ ，垂足为 D ， E 为 BC 中点， $AB=5$ ， $AC=9$ ，则 $DE =$ _____.

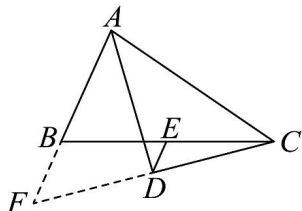


【答案】2

【解析】

【分析】延长 CD 交 AB 于点 F ，证明 $\triangle ADC \cong \triangle ADF$ (ASA)，则 $CD = DF$ ， $AF = AC = 9$ ，得到 $BF = AF - AB = 9 - 5 = 4$ ，根据 ED 是三角形 BCF 的中位线即可得到答案.

【详解】解：延长 CD 交 AB 于点 F ，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $CD \perp AD$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle FAD$ ， $\angle ADC = \angle ADF = 90^\circ$ ，

$\because AD = AD$ ，

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADF$ (ASA)，

$\therefore CD = DF$ ， $AF = AC = 9$ ，

$\therefore BF = AF - AB = 9 - 5 = 4$ ，

$\because E$ 是 BC 的中点，

$\therefore ED$ 是三角形 BCF 的中位线，

$\therefore DE = \frac{1}{2}BF = 2$.

16. 在平行四边形 $ABCD$ 中， AE 平分 $\angle BAD$ 交边 BC 于点 E ， DF 平分 $\angle ADC$ 交边 BC 于点 F ，若 $AB = 2$ ， $EF = 1$ ，则 $AD =$ _____.

【答案】3 或 5

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质与角平分线的定义，可证得 $AB = BE$ ， $CD = CF$ ，由 $AB = CD$ 得到 $BE = CF = AB$ ，对 E, F 在 BC 上的位置进行分类讨论，结合 $AD = BC$ 计算 AD 的长度.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $BC = AD$ ， $AB = CD$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle AEB$ ，

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle BAE$ ，

$$\therefore \angle AEB = \angle BAE,$$

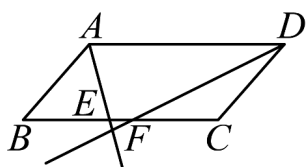
$$\therefore AB = BE,$$

同理可得: $DC = CF$,

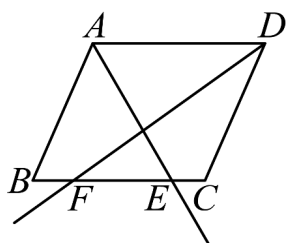
$$\therefore AB = 2, \quad AB = CD,$$

$$\therefore BE = CF = 2,$$

①当 E 位于 B, F 之间时, $BC = BE + CF + EF$, 即 $AD = 2 + 2 + 1 = 5$,

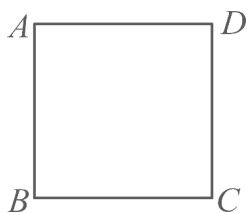


②当 F 位于 B, E 之间时, $BC = BE + CF - EF$, 即 $AD = 2 + 2 - 1 = 3$,



综上所述, $AD = 3$ 或 5 .

17. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, 点 E 是边 BC 上的一点, $BE = \frac{1}{4}BC$, 连接 AE , 将线段 AE 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到线段 AF , 连接 CF , 点 M 、 N 分别是线段 AE 、 CF 的中点, 则线段 MN 的长度是_____.



【答案】 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】证明 $\triangle FAD \cong \triangle EAB$, 说明 F 在直线 CD 上, 取 AC 中点 G , 连接 MG 并延长交 CD 于点 H , 结合中位线的性质推出 $\triangle GHC$ 为等腰直角三角形, 根据勾股定理计算即可.

【详解】解: 如图, 由正方形的性质知 $AB = AD$, $\angle B = \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FAE = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle EAB,$$

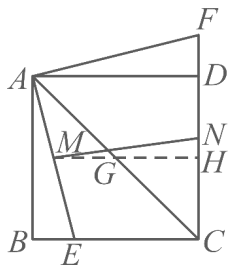
由旋转的性质知 $AF = AE$,

在 $\triangle FAD$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AF = AE \\ \angle FAD = \angle EAB , \\ AD = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle FAD \cong \triangle EAB (SAS)$,

$\therefore \angle ADF = \angle B = 90^\circ$, 即 F 在直线 CD 上;



由题意知 $DF = BE = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}AB = 1$, $EC = 4 - 1 = 3$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

取 AC 中点 G , 连接 MG 并延长交 CD 于点 H ,

$\because$ 点 M 为 AE 中点,

$\therefore MG$ 为 $\triangle AEC$ 的中位线,

$\therefore MG \parallel EC$, $MG = \frac{1}{2}EC = \frac{3}{2}$,

$\therefore MH \perp CD$, 即 $\angle GHC = \angle GHN = 90^\circ$,

$\because \angle ACD = 45^\circ$, $GC = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$,

$\triangle GHC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore HC^2 + GH^2 = 2GH^2 = GC^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$,

解得 $GH = HC = 2$,

$\therefore MH = MG + GH = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$,

$NH = CN - HC$

$= \frac{1}{2}CF - HC$

$= \frac{1}{2}(CD + DF) - HC$

$= \frac{1}{2} \times (4 + 1) - 2$

$$= \frac{1}{2},$$

$$\therefore MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 82 分)

【请将下列各题的解答过程写在答题纸的相应位置.】

18. 已知某反比例函数的图像经过点 $A(-2, 4)$.

(1) 这个函数的图像位于哪些象限?

(2) 若 $B(-3, m)$ 、 $C(n, -4)$ 也在这个函数的图像上, 求 m 、 n 的值.

【答案】(1) 这个函数的图像位于二、四象限;

$$(2) \quad m = \frac{8}{3}, n = 2.$$

【解析】

【分析】(1) 把 $A(-2, 4)$ 代入反比例函数解析式求出 k 的值, 即可得到答案;

(2) 反比例函数表达式为: $y = -\frac{8}{x}$. 把 $B(-3, m)$ 、 $C(n, -4)$ 代入进行解答即可.

【小问 1 详解】

解: 设反比例函数的表达式为: $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$

$\because$ 反比例函数的图像经过点 $A(-2, 4)$,

$$\therefore k = -2 \times 4 = -8 < 0$$

$\therefore$ 这个函数的图像位于二、四象限;

【小问 2 详解】

解: $\because k = -8$

$\therefore$ 反比例函数表达式为: $y = -\frac{8}{x}$.

把 $B(-3, m)$ 、 $C(n, -4)$ 代入上式,

$$\text{得 } m = \frac{-8}{-3}, -4n = -8$$

$$m = \frac{8}{3}, n = 2$$

19. 已知一个多边形的每一个内角都相等, 并且每个内角都等于与它相邻的外角的 4 倍.

(1) 求这个多边形的边数;

(2) 求这个多边形的内角和.

【答案】(1) 10; (2) 1440° .

【解析】

【分析】(1) 设这个多边形的一个外角为 α , 则与之相邻的内角为 4α , 根据邻补角和为 180° 列方程并解方程即可;

(2) 利用多边形内角和公式进行解答即可.

【小问1详解】

解: 设这个多边形的一个外角为 α , 则与之相邻的内角为 4α ,

$$\therefore \alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 36^\circ$$

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$$

【小问2详解】

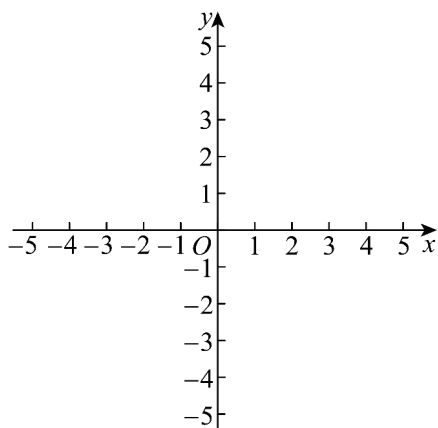
$$\text{内角和} = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$= (10-2) \cdot 180^\circ$$

$$= 1440^\circ$$

答: 这个多边形的边数是10, 内角和为 1440° .

20. 已知 $A(1,2)$ 、 $B(-1,2)$ 、 $C(-2,-1)$ 三个点.

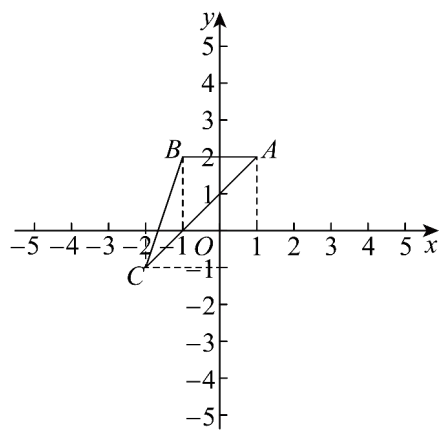


(1) 在如图所示的平面直角坐标系中, 描出 A 、 B 、 C 三个点, 并顺次连接 AB 、 BC 、 AC , 得 $\triangle ABC$;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的周长;

(3) 在平面上找一点 D , 使以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形, 直接写出点 D 的坐标.

【答案】 (1)



(2) $2 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

(3) $(0, -1), (-4, -1), (2, 5)$.

【解析】

【分析】 (1) 描出 A 、 B 、 C 三个点，并顺次连接 AB 、 BC 、 AC ，得 $\triangle ABC$ 即可；

(2) 根据勾股定理求出边长，求出周长即可；

(3) 由平移的性质和平行四边形的判定和性质进行解答即可.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

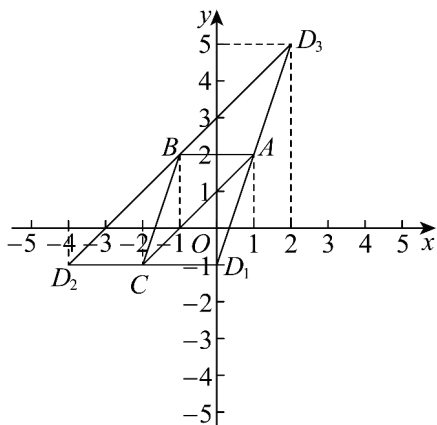
解: $\because A(1, 2)$ 、 $B(-1, 2)$ 、 $C(-2, -1)$

$\therefore AB = 1 - (-1) = 2, BC = \sqrt{(-2+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}, AC = \sqrt{(1+2)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $AB + BC + AC = 2 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

【小问 3 详解】

解: 如图,



把点 C 向右平移 2 个单位得到点 $D_1(0, -1)$, 则 $CD_1 \parallel AB$, $CD_1 = AB = 2$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD_1$ 是平行四边形,

把点 C 向作平移 2 个单位得到点 $D_2(-4, -1)$, 则 $CD_2 \parallel AB$, $CD_2 = AB = 2$,

$\therefore$ 四边形 ABD_2C 是平行四边形,

设延长 D_2B 与 D_1D_3 相交于点 D_3 ,

$\because$ 四边形 $ABCD_1$ 是平行四边形, 四边形 ABD_2C 是平行四边形,

$\therefore BD_3 \parallel AC, BC \parallel AD_3$,

$\therefore$ 四边形 AD_3BC 是平行四边形,

$\because A(1, 2)$ 、 $B(-1, 2)$ 、 $C(-2, -1)$

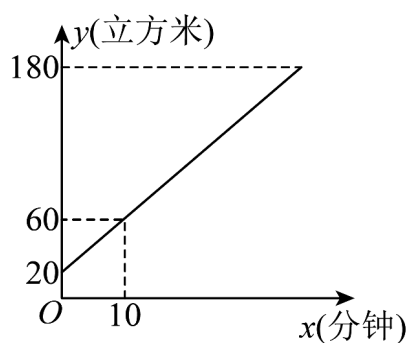
$\therefore$ 点 C 向右平移 3 个单位, 向上平移 3 个单位得到 $A(1, 2)$,

$\therefore BD_3 \parallel AC, BD_3 = AC$,

$\therefore$ 点 B 向右平移 3 个单位, 向上平移 3 个单位得到 $D_3(-1+3, 2+3)$, 即 $D_3(2, 5)$

综上所述, 点 D 的坐标为 $(0, -1), (-4, -1), (2, 5)$.

21. 某室内游泳馆小型泳池蓄水总量为 180 立方米, 当加水加满时, 进水阀门自动停止加水. 已知泳池蓄水量 y (立方米) 与注水时间 x (分钟) 的图像如图所示. 同时, 注水过程中池内水的温度 t (摄氏度) 与时间 x (分钟) 的关系满足: $t = \frac{28.4x + 40}{x + 2}$.



(1) 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 当泳池刚好注满水时, 池内的水温是多少摄氏度.

【答案】 (1) $y = 4x + 20 (0 \leq x \leq 40)$

(2) 当泳池刚好注满水时, 池内的水温是 28 摄氏度

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解；

(2) 将 $y=180$ 代入 $y=4x+20$ 求出 $x=40$ ，然后代入 $t=\frac{28.4x+40}{x+2}$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 y 关于 x 的函数的表达式为： $y=kx+b(k \neq 0)$

$\because$ 点 $(0,20)$ 、 $(10,60)$ 在函数图像上

$$\therefore \begin{cases} b=20 \\ 10k+b=60 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k=4 \\ b=20 \end{cases}$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数的表达式为 $y=4x+20(0 \leq x \leq 40)$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 当泳池刚好注满水时， $y=180$

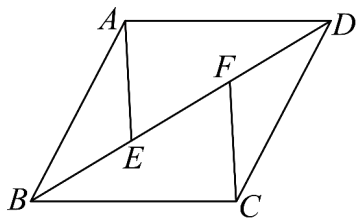
$$\text{即 } 4x+20=180$$

解得 $x=40$

$$\therefore \text{池内水温 } t = \frac{28.4 \times 40 + 40}{40 + 2} = 28(^{\circ}\text{C})$$

答：当泳池刚好注满水时，池内的水温是 28 摄氏度.

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=CD$ ， $AE=CF$ ， $BF=DE$.



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

(2) 连接 AF 、 CE 、 AC ，并且 AC 与 BD 相交于点 O ，请从① $AB=BC$ ，② $AE=AF$ ，③ $AO=OF$ ，

④ $\angle AEB=135^{\circ}$ 四个关系中选其中两个作为条件，使得四边形 $AECF$ 为正方形，你选择的条件是：

_____ (只填写序号)，并写出相应的证明过程.

【答案】(1) 证明： $\because BF=DE$ ，

$$\therefore BE=DF，$$

$$\therefore AB=CD，AE=CF，$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

(2) 答案不唯一, 填一种情况即可:

①③或①④或②③或②④.

当选择①③时, 证明如下:

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\therefore OE = OF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形,

$$\therefore OA = OF,$$

$$\therefore OA = OC = OF = OE,$$

$$\therefore AC = EF,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 为矩形,

$$\text{又} \therefore AB = BC,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 为菱形,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为正方形.

【解析】

【分析】(1) 先根据 SSS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 则可得 $\angle ABE = \angle CDF$ 进而可得 $AB \parallel CD$, 根据“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”即可得证.

(2) 根据正方形的判定方法, 可选择①③或①④或②③或②④. 当选择①③时, 可先证平行四边形 $AECF$ 为矩形, 再证平行四边形 $AECF$ 为菱形, 则可得四边形 $AECF$ 为正方形.

【小问 1 详解】

略

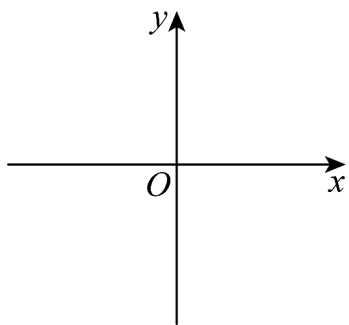
【小问 2 详解】

略

【点睛】 本题考查了平行四边形，矩形，菱形，正方形的判定，熟练掌握它们的判定方法是解题的关键.

23. 【新定义：在平面直角坐标系中，如果一个点的横坐标比纵坐标多 1，则称该点为“多一点”，例如点 $(3,2)$ 、 $(0,-1)$ 都是“多一点”.】

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = 2x + b$ 的图像上存在“多一点” P ，且与 y 轴交于点 Q .



(1) 当“多一点” P 的横坐标为 -3 时，求 b 的值；

(2) 当点 P 在第一象限， $\triangle OPQ$ 的面积为 3 时，

①求点 P 的坐标；

②在坐标平面内存在点 M ，使点 O 是 $\triangle MPQ$ 的重心，求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $b = 2$

(2) ① $(2,1)$ ；② $(-2,2)$

【解析】

【分析】 (1) 根据“多一点”的定义解题；

(2) ①设点 P 的坐标为 $(a, a-1)$ ，代入 $y = 2x + b$ ，根据 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} OQ \cdot x_P$ 计算即可；

②设 MP 与 y 轴交点为 N ，连接 MO 并延长交 PQ 于点 H ，过点 P 作 $PE \perp y$ 轴于 E ， $MF \perp y$ 轴于 F ，由重心的定义推出 $MN = PN$ ， $PH = HQ$ ，得到点 H 的坐标以及直线 OH 的解析式，证明 $\triangle MFN \cong \triangle PEN$ ，可得 M 点的横坐标，代入再入直线 OH 的解析式即可求其纵坐标.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 P 是“多一点”，且横坐标为 -3 ，

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 $-3-1=-4$ ，

即 $P(-3,-4)$ ，

代入 $y = 2x + b$ ，

$$\text{得 } 2 \times (-3) + b = -4,$$

$$\therefore b = 2;$$

【小问 2 详解】

解：① $\because$ 点 P 是“多一点”，

设点 P 的坐标为 $(a, a-1)$,

代入 $y = 2x + b$,

$$\text{得 } a - 1 = 2a + b,$$

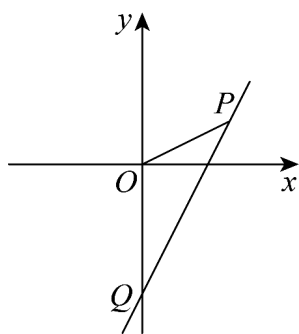
$$\therefore b = -a - 1,$$

又 $\because$ 点 P 在第一象限,

$$\therefore a > 0 \text{ 且 } a - 1 > 0,$$

解得 $a > 1$,

如图,



$$\therefore \triangle OPQ \text{ 的面积为 } 3, \text{ 且 } S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} OQ \cdot |x_P|,$$

$$\text{其中 } OQ = |b| = |-a - 1| = a + 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (a + 1) a = 3,$$

解得 $a = 2$ (负值舍去),

$$\therefore P(2, 1);$$

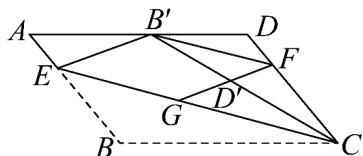
②设 MP 与 y 轴交点为 N , 连接 MO 并延长交 PQ 于点 H , 过点 P 作 $PE \perp y$ 轴于 E , $MF \perp y$ 轴于 F ,

24. 【问题背景】

在学习了综合与实践《折纸与数学》后，某数学兴趣小组对平行四边形纸片折叠过程中的线段关系进行了探究.

【操作实践】

操作：折叠平行四边形纸片 $ABCD$ ，使点 B 落在边 AD 上，记作点 B' ，且使折痕经过点 C ，得到折痕 CE 和线段 EB' ；再次折叠纸片，使点 D 落在 $B'C$ 上，记作点 D' ，使折痕经过点 B' ，得到折痕 $B'F$ 和线段 FD' ，把纸片展开，延长 FD' 交 CE 于点 G .



【初步猜想】

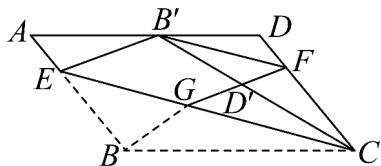
(1) 小组成员通过观察、测量等操作，猜想如下：

- ① CE 与 $B'F$ 存在特殊的位置关系：_____；
 ② BE 和 CF 有确定的数量关系：_____.

请补充上述过程中横线上的内容，并对②中的数量关系进行论证，写出证明过程.

【推理证明】

(2) 如图，当点 B 在 FD' 的延长线上时，求证： $\frac{BD'}{B'E} = \frac{3}{2}$.



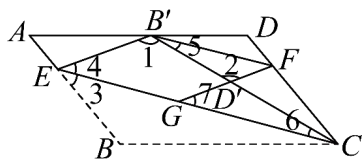
【运用提升】

(3) 连接 BB' 交折痕 CE 于点 H ，连接 $B'G$.

已知 $BC = 5$ ， $B'G = 2\sqrt{2}$ ，设 $EH = x$ ， $EG = y$ ，求 y 关于 x 的函数表达式. (不要求写出自变量的取值范围)

【答案】(1) ① $CE \parallel B'F$ ；② $BE = CF$ ，

证明：依题 BEC 翻折得 $\triangle B'EC$ ， $\triangle DB'F$ 翻折得 $\triangle D'B'F$ ，



$\therefore \angle B = \angle 1, \angle D = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$

$$\angle 5 = \frac{1}{2} \angle DB'D', \angle 6 = \frac{1}{2} \angle BCB'$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形

$$\therefore \angle B = \angle D, AD \parallel BC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DB'D' = \angle BCB', \quad \angle 3 = \angle DCE$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 5 = \angle 6, \angle 4 = \angle DCE$$

$$\therefore B'E \parallel GF, \quad B'F \parallel CE$$

$\therefore$ 四边形 $B'EGF$ 为平行四边形

$$\therefore B'E = GF, \angle 4 = \angle 7$$

$$\therefore \angle DCE = \angle 7$$

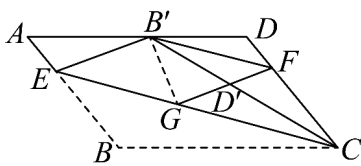
$$\therefore GF = FC$$

$$\therefore FC = B'E$$

又 $\because$ 翻折得 $B'E = BE$

$$\therefore BE = FC$$

(2) 连接 BG ,



$$\because BE = FC, \quad \angle BEC = \angle ECD, \quad \angle BGE = \angle FGC$$

$$\therefore \triangle BEG \cong \triangle FCG$$

$$\therefore EG = GC, \quad BG = GF$$

$$\because GF = B'E$$

$$\therefore BG = B'E$$

$\therefore$ 四边形 $B'EGF$ 为平行四边形

$$\therefore B'F \text{ 平行且等于 } EG$$

$$\therefore B'F \text{ 平行且等于 } GC$$

$\therefore$ 四边形 $B'GCF$ 为平行四边形

$$\therefore B'D' = CD', \text{ 即 } D'G \text{ 是 } \triangle CEB' \text{ 的中位线}$$

$$\therefore D'G = \frac{1}{2} B'E$$

$$\therefore \frac{BD'}{B'E} = \frac{3}{2}.$$

$$(3) \quad y = \frac{17}{4x}$$

【解析】

【分析】(1) 证明四边形 $B'EGF$ 为平行四边形, 则 $B'E = GF, \angle 4 = \angle 7$, 证明 $GF = FC, FC = B'E$, 又由翻折得 $B'E = BE$, 即可得到结论;

(2) 连接 BG , 证明 $\triangle BEG \cong \triangle FCG$, 得到 $EG = GC, BG = GF$, 证明四边形 $B'EGF$ 为平行四边形, 则 $B'F$ 平行且等于 EG , 得到 $B'F$ 平行且等于 GC , 则四边形 $B'GCF$ 为平行四边形, 得到 $B'D' = CD'$, 即 $D'G$ 是 $\triangle CEB'$ 的中位线, 即可得到结论;

(3) 作 $FM \perp CE$ 于 M , $B'C = BC = 5$, 证明 $\triangle EHB' \cong \triangle CMF$, 则 $MC = EH = x$, 得到 $GC = 2x$, 得到 $HG = EG - EH = y - x$, 则 $HC = x + y$, 再用勾股定理列方程即可求出答案.

【小问 1 详解】

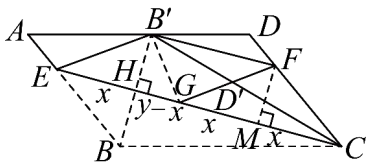
略;

【小问 2 详解】

略;

【小问 3 详解】

解: 作 $FM \perp CE$ 于 M , $B'C = BC = 5$



$$\therefore EH = GM = x, \angle B'HE = \angle FMG = 90^\circ, B'E = FG$$

$$\therefore \triangle EHB' \cong \triangle CMF,$$

$$\therefore MC = EH = x$$

$$\therefore FG = FC$$

$$\therefore GC = 2x$$

$$\text{由 } HG = EG - EH = y - x$$

$$\therefore HC = x + y$$

$$\text{在 Rt}\triangle B'HC \text{ 中, } B'H^2 = B'C^2 - HC^2 = 5^2 - (x + y)^2$$

$$\text{在 Rt}\triangle B'HG \text{ 中, } B'H^2 = B'G^2 - HG^2 = (2\sqrt{2})^2 - (y - x)^2$$

$$\therefore 5^2 - (x + y)^2 = (2\sqrt{2})^2 - (y - x)^2$$

$$\text{即 } y = \frac{17}{4x}$$