

2025 学年第二学期八年级数学练习 (202606)

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 填空题须在对应矩形框内作答, 超出对应边框作答无效.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 在平面直角坐标系中, 点 $P(1, -2)$ 所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了各象限内点的坐标的符号特征, 记住各象限内点的坐标的符号是解决的关键, 四个象限的符号特点分别是: 第一象限 $(+, +)$; 第二象限 $(-, +)$; 第三象限 $(-, -)$; 第四象限 $(+, -)$. 根据平面直角坐标系中各象限点的坐标符号特征判断即可.

【详解】解: $\because$ 点 P 的横坐标 $1 > 0$, 纵坐标 $-2 < 0$,

$\therefore$ 点 $P(1, -2)$ 在第四象限.

故选: D.

2. 下列 y 关于 x 的函数中, 是正比例函数的是 ()

- A. $y = \frac{x}{3}$; B. $y = \frac{3}{x}$;
C. $y = x + 3$; D. $y = \frac{x+1}{3}$.

【答案】A

【解析】

【分析】本题根据正比例函数的定义判断各选项即可, 正比例函数的定义为: 形如 $y = kx$ (k 为常数, 且 $k \neq 0$) 的函数是 y 关于 x 的正比例函数.

【详解】首先明确正比例函数定义：形如 $y = kx$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数,

$\therefore$ 选项 A 中, $y = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$, 符合 $y = kx$ 的形式, 且 $k = \frac{1}{3} \neq 0$, $\therefore$ A 是正比例函数;

$\therefore$ 选项 B 中, $y = \frac{3}{x}$ 是反比例函数, 不符合正比例函数形式, $\therefore$ B 错误;

$\therefore$ 选项 C 中, $y = x + 3$ 是一次函数, 常数项为 $3 \neq 0$, 不是正比例函数, $\therefore$ C 错误;

$\therefore$ 选项 D 中, 整理得 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, 常数项为 $\frac{1}{3} \neq 0$, 是一次函数, 不是正比例函数, $\therefore$ D 错误.

因此选 A.

3. 已知点 $A(1, y_1)$ 和 $B(-1, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象上, 那么下列结论正确的是 ()

- A. $y_1 = y_2$; B. $y_1 = -y_2$; C. $y_1 > 0$; D. $y_2 < 0$.

【答案】B

【解析】

【分析】根据反比例函数的比例系数 k 的意义, 判断 y_1 与 y_2 的关系即可.

【详解】解: $\because$ 点 $A(1, y_1)$ 和点 $B(-1, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象上,

$$\therefore 1 \cdot y_1 = (-1) \cdot y_2 = k,$$

$$\therefore y_1 = -y_2.$$

4. 已知一次函数 $y = 2x + b - 1$ 的图像经过第一、二、三象限, 那么 ()

- A. $b > 1$; B. $b > -1$; C. $b < 1$; D. $b < -1$.

【答案】A

【解析】

【分析】一次函数 $y = kx + c$ 中, $k > 0$ 时图象经过第一、三象限, 截距 $c > 0$ 时图象与 y 轴交于正半轴, 经过第二象限.

【详解】解: 将函数整理为 $y = 2x + (b - 1)$, 可得 $k = 2 > 0$, 截距为 $b - 1$,

$\because$ 函数图象经过第一、二、三象限, $k = 2 > 0$ 已经满足图象过第一、三象限, 要经过第二象限, 需图象与 y 轴交于正半轴, 即 $b - 1 > 0$,

解得 $b > 1$.

5. 下列命题中, 假命题是 ()

- A. 菱形的对角线互相平分

- B. 菱形对角线的交点到四条边的距离相等
- C. 菱形的对角线互相垂直
- D. 菱形对角线的交点到四个顶点的距离相等

【答案】D

【解析】

【分析】根据菱形的性质推理判断即可.

【详解】解：A，这是菱形的性质，所以该选项是真命题，不合题意；

B，菱形的对角线平分对角，角平分线上的点到这个角两边的距离相等，所以该选项是真命题，不合题意；

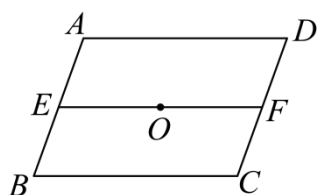
C，这是菱形的性质，所以该选项是真命题，不合题意；

D，菱形的对角线不相等，所以菱形对角线的交点到四个顶点的距离不一定相等，所以该选项是假命题，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查真命题和假命题，菱形的性质，掌握菱形的性质是解题的关键.

6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别为边 AB 、 CD 的中点， O 为 EF 的中点，过点 O 的直线分别交边 AD 、 BC 于点 G 、 H ，连接 EH 、 HF 、 FG 、 GE 。下列结论正确的是（ ）



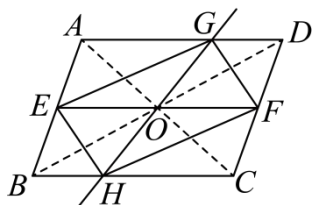
- A. $\angle GEH$ 的大小是 $\angle D$ 的一半；
- B. 边 EG 的长度是边 CD 的一半；
- C. 四边形 $EHFG$ 的面积是四边形 $ABCD$ 面积的一半；
- D. 四边形 $EHFG$ 的周长是四边形 $ABCD$ 周长的一半.

【答案】C

【解析】

【分析】由题意易得四边形 $A E F D$ 、 $B C F E$ 都为平行四边形，四边形 $E H F G$ 是平行四边形，然后根据平行四边形的性质可进行排除选项.

【详解】解：由题意可得如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, O 为 EF 的中点,

$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD, AB = CD$,

$\because E, F$ 分别为边 AB, CD 的中点,

$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB = DF = CF = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore$ 四边形 $Aefd, BCFE$ 都为平行四边形,

$\because O$ 为 EF 的中点,

$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD$,

$\because$ 过点 O 的直线分别交边 AD, BC 于点 G, H ,

$\therefore$ 根据平行四边形是中心对称图形可知: $OG = OH$,

$\because OF = OE$,

$\therefore$ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形,

对于 A、B 选项, 随着直线 GH 的位置变化, 平行四边形 $EHFG$ 的形状也会随之改变, 进而可知: $\angle GEH$ 的大小不一定是 $\angle D$ 的一半, 边 EG 的长度不一定是边 CD 的一半, 故错误;

对于 C 选项: $\because S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}S_{\square AEFD}, S_{\square AEFD} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$,

$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD}$,

$\because S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}S_{\square EHFG}$,

$\therefore S_{\square EHFG} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$, 故该选项正确;

根据三角形三边关系可知: $EG + GF > EF$,

$\therefore 2(EG + GF) > 2EF = 2AD$,

即 $C_{\square EHFG} > 2AD$,

$\therefore$ 四边形 $EHFG$ 的周长不一定是四边形 $ABCD$ 周长的一半, 故该选项错误.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 函数 $y = \sqrt{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【分析】 根据被开方式是非负数列式求解即可.

【详解】 解: 依题意, 得 $x-2 \geq 0$,

解得: $x \geq 2$,

故答案为 $x \geq 2$.

【点睛】 本题考查了函数自变量的取值范围, 函数有意义时字母的取值范围一般从几个方面考虑: ①当函数解析式是整式时, 字母可取全体实数; ②当函数解析式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0; ③当函数解析式是二次根式时, 被开方数为非负数. ④对于实际问题中的函数关系式, 自变量的取值除必须使表达式有意义外, 还要保证实际问题有意义.

8. 如果点 P 在 y 轴正半轴上, 且它到 x 轴的距离为 2, 那么点 P 的坐标是_____.

【答案】 $(0,2)$

【解析】

【分析】 根据点 P 在 y 轴正半轴上, 可得点 P 的横坐标为 0, 纵坐标为正数, 结合点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值, 即可求出点 P 的坐标.

【详解】 解: $\because$ 点 P 在 y 轴正半轴上,

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 0, 纵坐标大于 0.

$\because$ 点 P 到 x 轴的距离为 2,

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 2,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,2)$.

9. 如果点 $A(-3,2)$ 和点 B 关于 x 轴对称, 则点 B 的坐标是_____.

【答案】 $(-3,-2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了坐标与图形变化—轴对称, 根据关于 x 轴对称的点横坐标相同, 纵坐标互为相反数进行求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(-3,2)$ 和点 B 关于 x 轴对称,

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(-3,-2)$,

故答案为: $(-3,-2)$.

10. 已知正比例函数 $y=kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的函数值 y 随 x 的值增大而减小, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 0$

【解析】

【分析】 根据正比例函数图象的性质可以得出结论.

【详解】 解: $\because$ 对于正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$), y 随 x 的值增大而减小,

$\therefore k < 0$.

故答案为: $k < 0$.

【点睛】 本题主要考查了正比例函数的图象性质, 准确分析判断是解题的关键.

11. 如果某反比例函数的图像经过点 $A(2,3)$, 那么它的图像位于_____象限.

【答案】 一、三

【解析】

【分析】 先设反比例函数的一般解析式, 将已知点 $A(2,3)$ 代入求出比例系数 k , 由 k 的符号判断函数图像所在的象限.

【详解】 解: 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

将点 $A(2,3)$ 代入得, $3 = \frac{k}{2}$,

解得 $k = 6 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数的图像位于第一、第三象限.

12. 已知函数 $y = \frac{2}{3}x - 1$, 如果函数值 $y > 5$, 那么相应的自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 9$

【解析】

【分析】 根据题意, 先求出函数值 $y = 5$ 时对应的自变量 x 的值, 再结合一次函数的增减性即可求出 $y > 5$ 时自变量 x 的取值范围.

【详解】 解: 当 $y = 5$ 时, $\frac{2}{3}x - 1 = 5$,

移项得 $\frac{2}{3}x = 6$,

解得 $x = 9$,

$\because$ 一次函数 $y = \frac{2}{3}x - 1$ 中, $\frac{2}{3} > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

∴当 $y > 5$ 时, $x > 9$,

故答案为 $x > 9$.

13. 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(2, 1)$, 如果直线 $AB \parallel x$ 轴, 那么点 B 的坐标可以是_____ (写出一个即可).

【答案】

$(3, 1)$ (答案不唯一, 纵坐标为 1 且横坐标不为 2 即可)

【解析】

【分析】根据平行于 x 轴的直线上点的坐标特征, 可知点 A 与点 B 纵坐标相等, 且横坐标不相等, 据此确定点 B 的坐标要求, 写出符合要求的坐标即可.

【详解】解: ∵直线 $AB \parallel x$ 轴,

∴ $y_B = y_A = 1$, 且 $x_B \neq x_A$,

∴点 B 的坐标可以是 $(3, 1)$.

14. 已知近视眼镜镜片的度数 y (度) 与镜片焦距 x (米) 成反比例. 若 400 度的近视眼镜镜片的焦距为 0.25 米, 那么 y 与 x 的函数表达式为_____. (不要求写自变量的取值范围)

【答案】 $y = \frac{100}{x}$

【解析】

【分析】根据题意可设 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 再代入已知对应值求出比例系数 k , 即可得到所求函数表达式.

【详解】解: 根据题意可设 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

将 $x = 0.25$, $y = 400$ 代入得 $400 = \frac{k}{0.25}$,

解得 $k = 100$,

∴ $y = \frac{100}{x}$,

故答案为: $y = \frac{100}{x}$.

15. 一个多边形从一个顶点出发可引 3 条对角线, 这个多边形的内角和等于_____.

【答案】 720° ## 720 度

【解析】

【分析】本题主要考查了多边形的内角和公式, 多边形的对角线的公式, 求出多边形的边数是解题的关键.

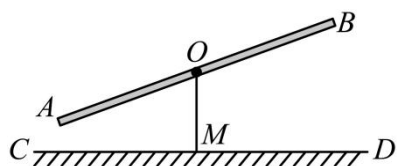
根据从多边形的一个顶点可以作对角线的条数公式 $(n-3)$ 求出边数，然后根据多边形的内角和公式 $(n-2) \times 180^\circ$ 列式进行计算即可得解.

【详解】解：由题意得，多边形的边数为： $3+3=6$ ，

$\therefore$ 内角和为： $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$ ，

故答案为： 720° .

16. 如图是跷跷板示意图，支柱 OM 经过 AB 的中点 O ， OM 与地面 CD 垂直于点 M ， $OM = 40\text{cm}$ ， 当跷跷板的一端 A 着地时， 另一端 B 离地面的高度为_____ cm .

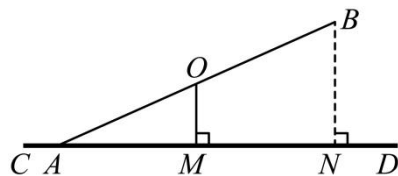


【答案】 80

【解析】

【分析】本题考查的是相似三角形的判定和性质. 过点 B 作 $BN \perp CD$ 交 AC 的延长线于 N ，求得 $OM \parallel BN$ ，得到 $\triangle AOM \sim \triangle ABN$ ，根据相似三角形的性质解答即可.

【详解】解：过点 B 作 $BN \perp CD$ 交 AC 的延长线于 N ，



$\therefore OM \perp CD$ ，

$\therefore OM \parallel BN$ ，

$\therefore \triangle AOM \sim \triangle ABN$ ，

$\therefore \frac{OM}{BN} = \frac{AO}{AB}$ ，

$\therefore AO = OB$ ， $OM = 40\text{cm}$ ，

$\therefore \frac{40}{BN} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore BN = 80\text{cm}$ ，

$\therefore$ 另一端 B 离地面的高度为 80cm .

故答案为： 80.

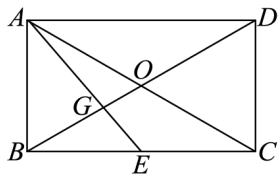
17. 在矩形 $ABCD$ 中， G 为 $\triangle ABC$ 的重心， 如果 $BG = 2$ ， 那么它的对角线 AC 的长是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】先利用三角形重心的性质得到 AC 边上中线的长度，再结合矩形对角线的性质计算对角线 AC 的长.

【详解】解：如图，设 AC ， BD 交于点 O ，取 BC 的中点 E ，连接 AE 交 OB 于点 G ，



$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore OG = \frac{1}{2}BG = 1,$$

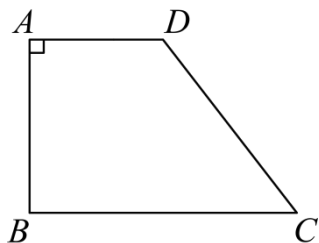
$$\therefore OB = OG + GB = 1 + 2 = 3,$$

$\because ABCD$ 是矩形，

$$\therefore OA = OB = OC = 3,$$

$$\therefore AC = AO + OC = 3 + 3 = 6.$$

18. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AD = 3$ ， $BC = 6$. 点 E 在边 AD 上，将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 所在直线翻折，点 A 落在点 F 处，连接 EF 并延长，交边 BC 于点 G . 如果四边形 $EGCD$ 是平行四边形，那么 AE 的长是_____.

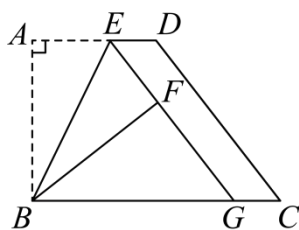


【答案】2

【解析】

【分析】由折叠的性质可知： $AE = EF$ ， $AB = BF = 4$ ， $\angle BAD = \angle BFE = 90^\circ$ ， $\angle AEB = \angle FEB$ ，由题意易得 $ED = CG$ ， $\angle GBE = \angle AEB = \angle FEB$ ，则有 $BG = EG$ ，设 $AE = EF = x$ ，则有 $DE = AD - AE = 3 - x = CG$ ，进而根据勾股定理建立方程进行求解即可.

【详解】解：由题意可得如图所示：



由折叠的性质可知： $AE = EF$, $AB = BF = 4$, $\angle BAD = \angle BFE = 90^\circ$, $\angle AEB = \angle FEB$,

$$\therefore \angle BFG = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $EGCD$ 是平行四边形,

$$\therefore ED = CG,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle GBE = \angle AEB = \angle FEB,$$

$$\therefore BG = EG,$$

设 $AE = EF = x$, 则有 $DE = AD - AE = 3 - x = CG$,

$$\therefore BG = BC - CG = 6 - (3 - x) = x + 3 = EG,$$

$$\therefore FG = EG - EF = x + 3 - x = 3,$$

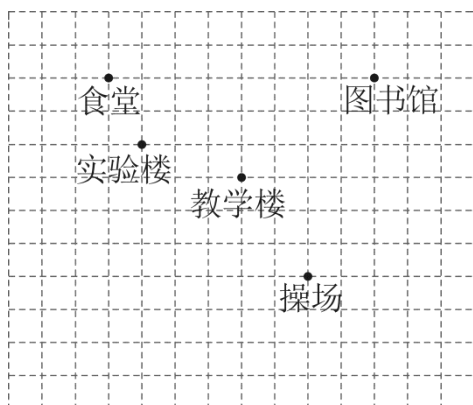
在 $Rt\triangle BFG$ 中, 由勾股定理得: $4^2 + 3^2 = (x + 3)^2$,

解得: $x = 2$ (负根舍去),

$$\therefore AE = 2.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

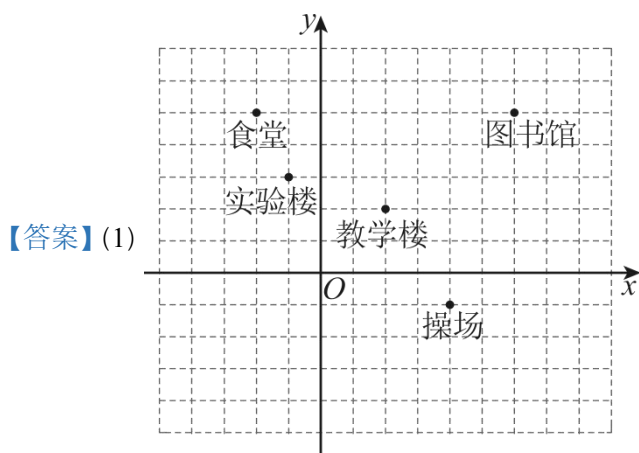
19. 某学校的校园平面简图如图 4 所示, 方格纸中的每个小方格都是边长为 1 的正方形, 已知教学楼的坐标为 $(2, 2)$, 实验楼的坐标为 $(-1, 3)$.



(1) 根据题目条件, 在图中建立适当的平面直角坐标系;

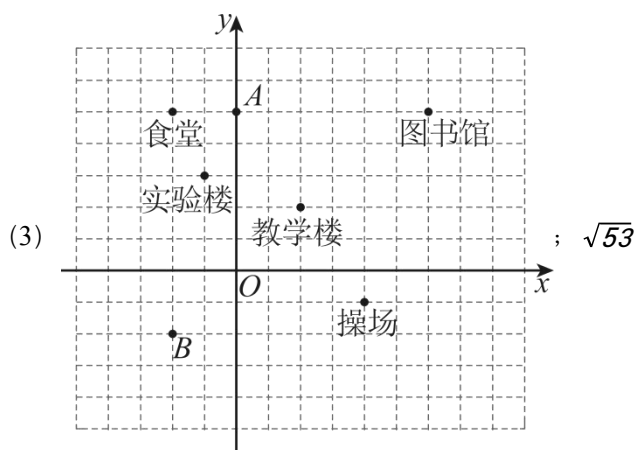
(2) 根据 (1) 中建立的平面直角坐标系, 直接写出操场、食堂和图书馆的坐标;

(3) 已知办公楼 A 和学生宿舍 B 的坐标分别为 $(0,5)$ 和 $(-2,-2)$, 请在图中标出 A 和 B 的位置, 并计算 A 、 B 两点之间的距离.



(2) 操场的坐标为 $(4, -1)$, 食堂的坐标为 $(-2, 5)$,

图书馆的坐标为 $(6, 5)$



【解析】

【分析】(1) 根据教学楼和实验楼的坐标可确定原点和坐标轴的位置, 据此建立对应的平面直角坐标系即可;

(2) 根据 (1) 以及操场, 食堂和图书馆的位置可得对应的坐标;

(3) 根据 (1) 先描出点 A 和点 B , 再根据两点间的距离公式求解即可.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得操场的坐标为 $(4, -1)$, 食堂的坐标为 $(-2, 5)$, 图书馆的坐标为 $(6, 5)$;

【小问 3 详解】

解: 图见答案,

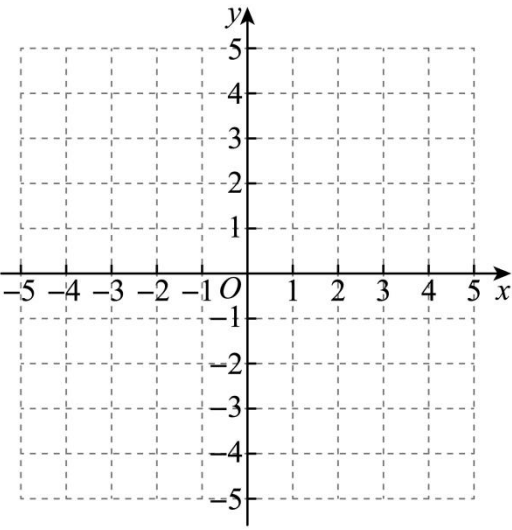
$\therefore$ 办公楼 A 和学生宿舍 B 的坐标分别为 $(0, 5)$ 和 $(-2, -2)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{53}.$$

20. 小华用“描点法”绘制一个正比例函数图像和一个反比例函数图像，他列表取值的部分数据如表 1 和表 2.

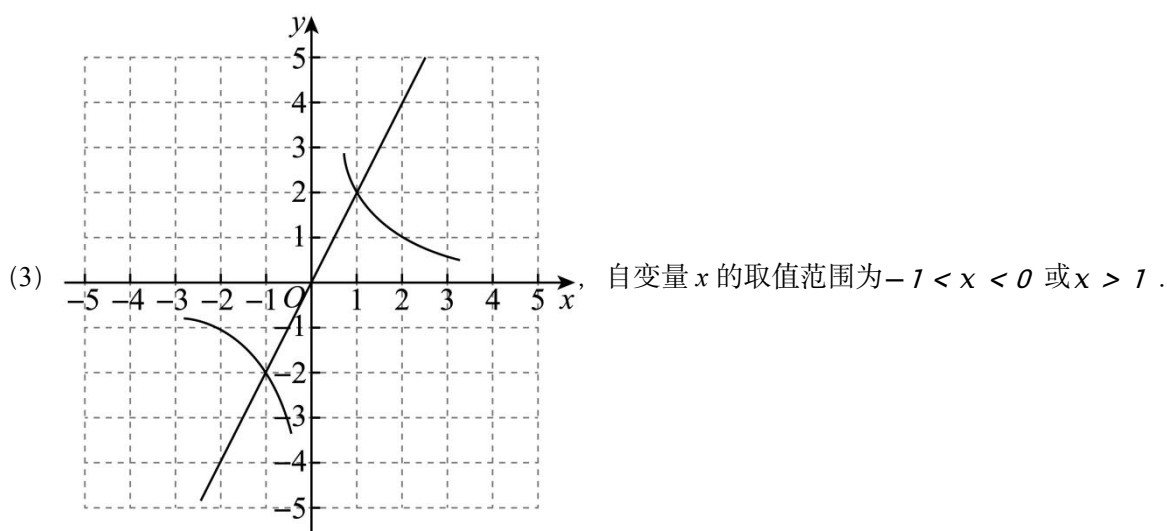
表 1:							表 2:					
x	$\cdots$	a	1	2	$\cdots$		x	$\cdots$	a	1	2	$\cdots$
y_1	$\cdots$	-2	2	1	$\cdots$		y_2	$\cdots$	b	2	4	$\cdots$

- 请判断表 1 和表 2 分别对应哪种函数，并分别写出它们的函数表达式；
- 求表格中 a 、 b 的值；
- 在平面直角坐标系中，画出这两个函数的大致图像，并结合这两个函数的图像，直接写出当 $y_1 < y_2$ 时，自变量 x 的取值范围.



【答案】 (1) 表 1 对应反比例函数， $y_1 = \frac{2}{x}$ ；表 2 对应正比例函数， $y_2 = 2x$

(2) $a = -1$ ， $b = -2$



【解析】

【分析】(1) 根据表格中的自变量和函数值进行判断即可；

(2) 根据所求函数解析式进行解答即可；

(3) 根据表格画出函数图象，根据函数图象的位置和交点坐标写出自变量 x 的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解：根据表 1 可知， $xy = 1 \times 2 = 2 \times 1 = 2$ ，

$\therefore$ 表 1 对应反比例函数，即 $y_1 = \frac{2}{x}$ ，

根据表 2 可知， $2 = 1 \times 2, 4 = 2 \times 2$ ，即 $y_2 = 2x$ ，

$\therefore$ 表 2 对应正比例函数，即 $y_2 = 2x$ ，

【小问 2 详解】

解：由题意可得， $-2 = \frac{2}{a}$

$$-2a = 2，$$

解得 $a = -1$ ，

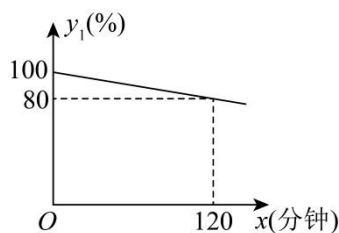
由题意可得， $b = 2a = -2$

【小问 3 详解】

根据表格画出函数图象，根据图象可知，自变量 x 的取值范围为 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$.

21. 某款手机在不同状态下的电量变化是不同的.

手机在正常连续使用模式时，剩余电量 $y_1(\%)$ 与使用时间 x (分钟) 之间是一次函数关系，其部分图像如图所示. 手机在快速充电模式时，充电电量 $y_2(\%)$ 与充电时间 t (分钟) 之间满足正比例函数关系，10 分钟可以充电 40% .



(1) 求正常使用状态下, 剩余电量 $y_1(\%)$ 与使用时间 x (分钟) 之间的函数表达式, 并写出自变量 x 取值范围;

(2) 将手机电量充满至 100% 时开始正常使用, 持续使用了 180 分钟.

①此时手机剩余电量是多少?

②若此时立即进入快速充电模式, 如果手机要充到 80% 电量, 需要充电多少分钟?

【答案】 (1) $y_1 = -\frac{1}{6}x + 100 (0 \leq x \leq 600)$

(2) ① 70%; ② 2.5 分钟

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可;

(2) ①把 $x = 180$ 代入 $y_1 = -\frac{1}{6}x + 100 (0 \leq x \leq 600)$ 中求出 y_1 的值即可得到答案;

②求出 $y_2 = 4x$, 再求出 $y_2 = 80 - 70 = 10$ 时 x 的值即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 设 $y_1 = kx + b (k \neq 0)$,

由题意得,
$$\begin{cases} 120k + b = 80 \\ b = 100 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{6} \\ b = 100 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{6}x + 100 (0 \leq x \leq 600);$$

【小问 2 详解】

解: ①在 $y_1 = -\frac{1}{6}x + 100 (0 \leq x \leq 600)$ 中, 当 $x = 180$ 时, $y_1 = -\frac{1}{6} \times 180 + 100 = 70$,

$\therefore$ 此时手机剩余电量是 70%;

②设 $y_2 = k'x (k' \neq 0)$, 则 $40 = 10k'$,

解得 $k' = 4$,

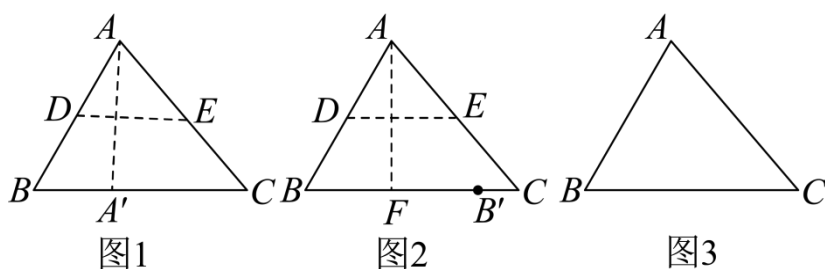
$$\therefore y_2 = 4x,$$

当 $y_2 = 80 - 70 = 10$ 时, $4x = 10$,

解得 $x = 2.5$,

$\therefore$ 需要充电 2.5 分钟.

22. 在学习了《折纸与数学》之后, 同学们利用三角形纸片 ABC 开展了“折三角形中位线”的探究活动.



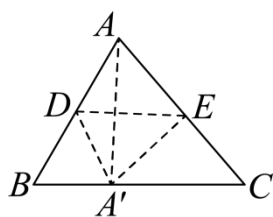
【甲同学的方案】如图 1, 将三角形纸片 ABC 的顶点 A 沿着某一直线折叠, 使得点 A 落在边 BC 上点 A' 处, 此时折痕 DE 就是它的一条中位线;

【乙同学的方案】如图 2, 将三角形纸片 ABC 的顶点 B 沿着经过顶点 A 的直线折叠, 使得顶点 B 落在边 BC 上点 B' 处, 折痕与边 BC 的交点记为 F ; 再将顶点 A 沿着某一直线折叠, 使得点 A 恰好落在点 F 处, 此时折痕 DE 就是它的一条中位线;

(1) 说明甲、乙两位同学的方案是否正确, 若正确, 请说明理由 (写出证明过程); 若不正确, 请举出反例或说明原因;

(2) 除了上述两种方法, 请你再设计一种不同于甲、乙同学的折纸方案, 折出 $\triangle ABC$ 的一条中位线, 在图 3 中用虚线画出折痕, 并写出结论.

【答案】(1) 解: 甲同学的方案不正确,
原因: 连接 DA' , EA' ,



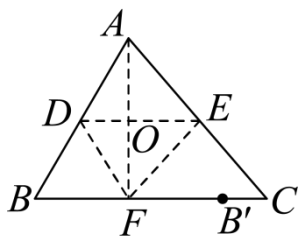
根据折痕 DE 可得, DE 垂直平分 AA' ,

$\therefore DA = DA'$, $EA = EA'$,

不能证明点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点, 也就不能证明折痕 DE 就是三角形纸片 ABC 的一条中位线;

乙同学的方案正确, 理由如下:

如图, 连接 DF , EF ,



根据折痕 DE 可得, DE 垂直平分 AF ,

$$\therefore DA = DF , EA = EF ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle DFA ,$$

根据折痕 AF 可得, $\angle AFB = \angle AFC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DAF + \angle ABF = 90^\circ , \angle AFD + \angle BFD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle ABF ,$$

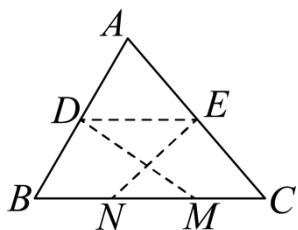
$$\therefore BD = DF ,$$

$$\therefore BD = AD = DF , \text{ 即 } D \text{ 为 } AB \text{ 中点,}$$

同理可得 $EA = EF = EC$, 即 E 为 AC 中点,

$\therefore$ 折痕 DE 是三角形纸片 ABC 的一条中位线;

(2) 解: 如图, 将三角形纸片 ABC 沿直线 DM 折叠, 使得顶点 A 与 B 重合, 折痕 DM 交 AB 于 D , 再将三角形纸片 ABC 沿直线 EN 折叠, 使得顶点 A 与 C 重合, 折痕 EN 交 AC 于 E , 即可得到 D 为 AB 中点, E 为 AC 中点, 折痕 DE 是三角形纸片 ABC 的一条中位线;



【解析】

【分析】(1) 甲同学的方案连接 DA' , EA' , 根据折痕 DE 可得, DE 垂直平分 AA' , 得到 $DA = DA'$, $EA = EA'$, 但是不能证明点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点, 也就不能证明折痕 DE 就是三角形纸片 ABC 的一条中位线;

乙同学的方案连接 DF , EF , 根据折痕 DE 可得, DE 垂直平分 AF , 得到 $DA = DF$, $EA = EF$, 则 $\angle DAF = \angle DFA$, 再根据折痕 AF 可得, $\angle AFB = \angle AFC = 90^\circ$, 求出 $\angle BFD = \angle ABF$, 得到 $BD = DF$, D 为 AB 中点, 同理可得 $EA = EF = EC$, 即 E 为 AC 中点, 折痕 DE 是三角形纸片 ABC 的一条中位线;

(2) 将三角形纸片 ABC 沿直线 DM 折叠, 使得顶点 A 与 B 重合, 折痕 DM 交 AB 于 D , 再将三角形纸

片 ABC 沿直线 EN 折叠, 使得顶点 A 与 C 重合, 折痕 EN 交 AC 于 , 即可得到 D 为 中点, 为 AC 中点, 折痕 DE 是三角形纸片 ABC 的一条中位线;

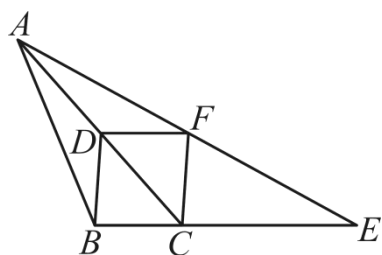
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 的中点, E 是 BC 延长线上的点, 且 $CE = 2BC$, 连接 AE , F 是线段 AE 的中点, 连接 DB 、 DF 、 FC .



(1) 求证: 四边形 $BCFD$ 是平行四边形;

(2) 当 $AF = AB = \sqrt{5}BC$ 时, 求证: 四边形 $BCFD$ 是正方形.

【答案】(1) 证明: $\because D$ 是边 AC 的中点, F 是线段 AE 的中点,

$\therefore DF$ 是 $\triangle ACE$ 的中位线,

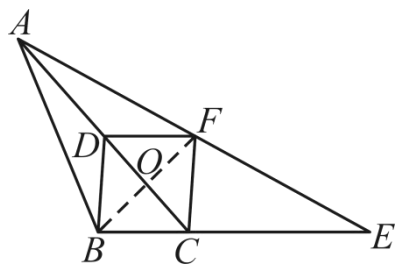
$\therefore DF \parallel CE$, $DF = \frac{1}{2}CE$, 即 $CE = 2DF$,

又 $\because CE = 2BC$, E 是 BC 延长线上的点,

$\therefore BC = DF$, $BC \parallel DF$,

$\therefore$ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形;

(2) 证明: 如图, 连接 BF , 交 CD 于点 O ,



由 (1) 知四边形 $BCFD$ 是平行四边形,

$\therefore OB = OF$, $OD = OC$,

又 $\because AF = AB$,

$\therefore AO \perp BF$,

$\therefore DC$ 、 BF 互相垂直平分,

$\therefore$ 四边形 $BCFD$ 是菱形,

$\therefore BC = CF$,

$\because F$ 是线段 AE 的中点, $AF = AB = \sqrt{5}BC$,

$\therefore EF = AF = \sqrt{5}BC$,

又 $\because CE = 2BC$,

$\therefore$ 在 $\triangle CEF$ 中, 即 $CE^2 = (2BC)^2 = 4BC^2$, $CF^2 = BC^2$, $EF^2 = (\sqrt{5}BC)^2 = 5BC^2$,

即 $CE^2 + CF^2 = EF^2$,

$\therefore \triangle CEF$ 是直角三角形, $\angle ECF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BCFD$ 是正方形.

【解析】

【分析】(1) 先根据中位线的性质得 $DF \parallel CE$, $DF = \frac{1}{2}CE$, 即 $CE = 2DF$, 进而可得 $BC = DF$,

$BC \parallel DF$, 根据对边平行且相等的四边形是平行四边形, 即可证明;

(2) 连接 BF , 交 CD 于点 O , 根据平行四边形的性质得 $OB = OF$, $OD = OC$, 再根据等腰三角形三线合一的性质得 $AO \perp BF$, 则 DC 、 BF 互相垂直平分, 四边形 $BCFD$ 是菱形, $BC = CF$, 再勾股定理逆定理证明 $\triangle CEF$ 是直角三角形, $\angle ECF = 90^\circ$, 即可得出结论.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

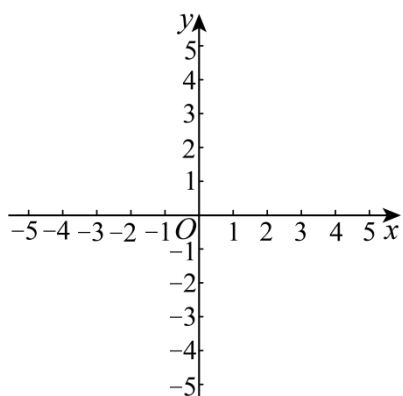
24. 阅读材料: 我们知道正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图像经过定点 $(0, 0)$. 进一步研究一次函数 $y = kx + k + 2 (k \neq 0)$ 的图像, 将它整理成 $y = k(x + 1) + 2$ 后, 当含字母系数 k 的项为 0 即 $x + 1 = 0$, $x = -1$ 时, $y = 2$, 因此该函数的图像经过定点 $(-1, 2)$.

解决问题:

已知一次函数 $y = (a - 1)x + 3 - 2a (a \neq 1)$ 的图像经过定点 P .

(1) 求定点 P 的坐标;

- (2) 在平面直角坐标系中, 如图, 该一次函数的图像上有一点 Q , 当点 Q 横坐标增加 2 时, 其纵坐标增加 3.



①求此时该一次函数的表达式;

②设一次函数 $y = (a - 1)x + 3 - 2a$ ($a \neq 1$) 的图像与 y 轴交于点 A , 点 M 在 x 轴正半轴上, 直线 MP 与 y 轴正半轴交于点 N , 以 AM 、 AN 为邻边作平行四边形 $AMGN$, 如果 P 恰好是平行四边形 $AMGN$ 两条对角线的交点, 求点 N 的坐标.

【答案】 (1) $(2, 1)$;

(2) ① $y = \frac{3}{2}x - 2$; ② $N(0, 2)$

【解析】

【分析】 (1) 把原函数解析式变形为 $y = a(x - 2) + (3 - x)$, 根据题干中的方法即可求出答案;

(2) ①设该一次函数的表达式为 $y = kx + b$, 根据图像经过定点 $P(2, 1)$ 解得 $b = 1 - 2k$, 设点 Q 的坐标为 (x_1, y_1) , 则变化后的点的坐标为 $(x_1 + 2, y_1 + 3)$, 代入函数解析式得到方程组, 解得 $k = \frac{3}{2}$, $b = -2$, 即可求出一次函数的表达式; ②求出 $A(0, -2)$, 四边形 $AMGN$ 是平行四边形, 且 P 是对角线的交点, P 是线段 MN 的中点, 设 $N(0, n)$, $M(m, 0)$, 根据中点坐标公式解得 $m = 4$, $n = 2$, 即可得到点 N 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $y = (a - 1)x + 3 - 2a = a(x - 2) + (3 - x)$,

当 $x - 2 = 0$, 即 $x = 2$ 时, $y = 1$,

$\therefore$ 定点 P 的坐标为 $(2, 1)$;

【小问 2 详解】

解: 设该一次函数的表达式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 图像经过定点 $P(2,1)$.

$$\therefore 1 = 2k + b,$$

$$\text{解得 } b = 1 - 2k,$$

设点 Q 的坐标为 (x', y') , 则变化后的点的坐标为 $(x' + 2, y' + 3)$, 代入函数解析式可得,

$$\begin{cases} y' = kx' + 1 - 2k \\ y' + 3 = k(x' + 2) + 1 - 2k \end{cases},$$

$$\text{两式相减得到 } 2k = 3,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{2},$$

$$\therefore b = 1 - 2k = 1 - 2 \times \frac{3}{2} = -2,$$

$$\therefore \text{该一次函数的表达式为 } y = \frac{3}{2}x - 2;$$

$$\text{②由①可知, 一次函数解析式为 } y = \frac{3}{2}x - 2,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -2,$$

$$\therefore A(0, -2),$$

$\therefore$ 四边形 $AMGN$ 是平行四边形, 且 P 是对角线的交点,

$\therefore P$ 是线段 MN 的中点,

$$\text{设 } N(0, n), M(m, 0),$$

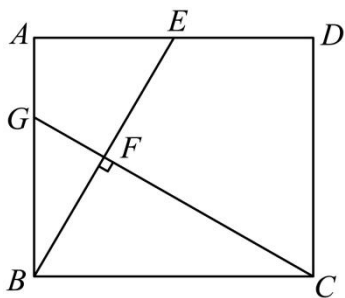
$$\therefore \frac{m+0}{2} = 2, \frac{0+n}{2} = 1,$$

$$\text{解得 } m = 4, n = 2,$$

$$\therefore N(0, 2)$$

25. 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, $BE = BC$, $CF \perp BE$, 垂足为 F , 延长 CF , 交射线 BA 于点 G .

(1) 如图, 当点 G 在边 AB 上时,



①求证: $\triangle ABE \cong \triangle FCB$;

②如果 $CD = 4$, $DE = 3$, 求 $EF:BF$ 的值;

(2) 连接 EG 和 CE . 如果 $\triangle BEG$ 是以 BG 为腰的等腰三角形, 求 $\angle DCE$ 的度数.

【答案】(1) ①证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle A = \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle CBF = 90^\circ ,$$

$$\because CF \perp BE ,$$

$$\therefore \angle BFC = 90^\circ , \angle BCF + \angle CBF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BCF ,$$

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 和 } \triangle FCB \text{ 中, } \begin{cases} \angle A = \angle BFC = 90^\circ \\ \angle ABE = \angle BCF , \\ BE = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCB (\text{AAS}) .$$

② 18: 7

(2) 30° 或 22.5°

【解析】

【分析】(1) ①根据矩形的性质及直角三角形两锐角互余的性质得出 $\angle ABE = \angle BCF$, 根据 $BE = BC$, 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle FCB (\text{AAS})$;

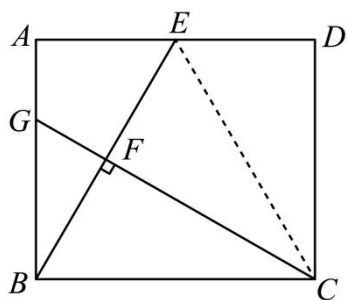
②利用勾股定理求出 $CE = 5$, 根据全等三角形的性质得出 $CF = 4$, 利用勾股定理求出 $EF = 3$, 设 $BF = x$, 根据 $BE = BC$, 利用勾股定理列方程, 求出 x 的值, 进而求出比值即可;

(2) 分 $BG = EG$ 和 $BG = BE$ 两种情况, 分别得出 $\triangle BCE$ 是等边三角形, $\triangle GBC$ 是等腰直角三角形, 进而根据矩形的性质及三角形内角和定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: ①略

②解: 如图, 连接 CE ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $CD = 4$, $DE = 3$,

$$\therefore \angle D = 90^\circ, AB = CD = 4, CE = \sqrt{DE^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

由①可知, $\triangle ABE \cong \triangle FCB$,

$$\therefore CF = AB = 4,$$

$$\therefore CF \perp BE,$$

$$\therefore EF = \sqrt{CE^2 - CF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

设 $BF = x$,

$$\therefore BE = BC,$$

$$\therefore BC = BF + EF = x + 3,$$

$$\therefore BC^2 = BF^2 + CF^2,$$

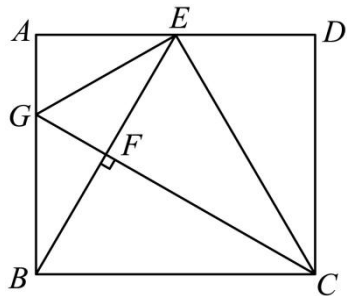
$$\therefore (x + 3)^2 = x^2 + 4^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{7}{6}, \text{ 即 } BF = \frac{7}{6},$$

$$\therefore EF:BF = 3:\frac{7}{6} = 18:7.$$

【小问2详解】

解: 如图, 当 $BG = EG$ 时,



$$\therefore CF \perp BE,$$

$\therefore CG$ 是 BE 的垂直平分线,

$$\therefore CE = BC,$$

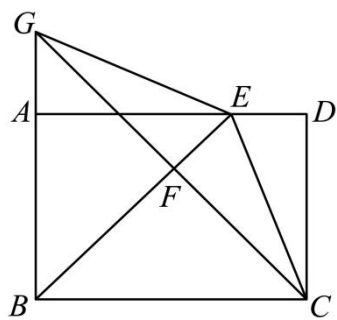
$$\therefore BE = BC,$$

$$\therefore BE = BC = CE,$$

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形, $\angle BCE = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DCE = \angle BCD - \angle BCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ;$$

如图, 当 $BG = BE$ 时,



$$\therefore BE = BC ,$$

$$\therefore BG = BC ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^{\circ} ,$$

$\therefore \triangle GBC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle GCB = 45^{\circ} ,$$

$$\therefore CF \perp BE ,$$

$$\therefore \angle EBC = 45^{\circ} ,$$

$$\therefore BE = BC ,$$

$$\therefore \angle BCE = \frac{1}{2} \times (180^{\circ} - 45^{\circ}) = 67.5^{\circ} ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle BCD - \angle BCE = 90^{\circ} - 67.5^{\circ} = 22.5^{\circ} .$$

综上所述: $\angle DCE$ 的度数为 30° 或 22.5° .