

八年级数学学科练习卷

考生注意：本卷共有 24 题，请将所有答案写在答题纸上。写在试卷上一律不计分。

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 在平面直角坐标系的第四象限内有一点 P ，如果点 P 到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 3，那么点 P 的坐标是（ ）

- A. $(-2, 3)$ B. $(-3, 2)$ C. $(2, -3)$ D. $(3, -2)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值，点到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值，结合第四象限内点的坐标符号特征求解即可。

【详解】解：设点 P 的坐标为 (x, y) 。

$\because$ 点 P 到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 3，

$$\therefore |y| = 2, |x| = 3.$$

$\because$ 点 P 在第四象限，

$$\therefore x > 0, y < 0,$$

$$\therefore x = 3, y = -2.$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(3, -2)$ 。

2. 一次函数 $y = -x - 2$ 的图象不经过的象限是（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】

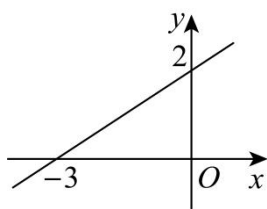
【分析】本题考查了一次函数的图象，熟练掌握一次函数图象的特点是解题关键。根据一次函数中的 $k = -1 < 0, b = -2 < 0$ 即可得。

【详解】解： $\because$ 在一次函数 $y = -x - 2$ 中， $k = -1 < 0, b = -2 < 0$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = -x - 2$ 的图象经过第二、三、四象限，不经过第一象限，

故选：A。

3. 已知一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象如图所示, 那么关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是 ()



- A. $x > 2$ B. $x < 2$ C. $x > -3$ D. $x < -3$

【答案】D

【解析】

【详解】解: 根据图象可知: 关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是 $x < -3$.

4. 已知点 $A(-3, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(2, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图像上, 那么 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_3 < y_1 < y_2$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据 $k < 0$ 确定反比例函数的图像位置与增减性, 再结合各点横坐标的符号判断 y 的正负, 最后比较同一象限内的函数值大小即可.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 $k < 0$,

$\therefore$ 函数图像分布在第二、四象限, 且每个象限内 y 随 x 的增大而增大.

$\because x_A = -3 < 0$, $x_B = -1 < 0$, $x_C = 2 > 0$,

$\therefore$ 点 A, B 在第二象限, 点 C 在第四象限.

$\therefore y_3 < 0$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, 可得 $y_3 < y_1$ 且 $y_3 < y_2$.

又 $\because -3 < -1 < 0$, 根据函数增减性可得 $y_1 < y_2$.

$\therefore$ 三者大小关系为 $y_3 < y_1 < y_2$.

5. 如果四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 且 $AO = CO$, 那么下列条件中不能判断四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是 ()

- A. $OB = OD$ B. $AD = BC$ C. $AD \parallel BC$ D. $\angle ABD = \angle CDB$

【答案】B

【解析】

【分析】已知四边形对角线交点 O 满足 $AO = CO$ ，根据平行四边形的判定定理，逐一分析各选项能否推出四边形为平行四边形即可得到答案.

【详解】解：A、因为 $AO = CO$ ， $OB = OD$ ，根据“对角线互相平分的四边形是平行四边形”可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 A 选项不合题意；

B、若 $AD = BC$ ，仅 $AO = CO$ 和 $AD = BC$ 无法推出 $OB = OD$ ，也无法证明四边形满足平行四边形的判定条件，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 B 符合题意；

C、 $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle OAD = \angle OCB,$$

$$\because \angle AOD = \angle COB, \quad AO = CO,$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OD = OB,$$

$$\because OA = OC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 C 选项不符合题意；

D 选项， $\because \angle ABD = \angle CDB$ ，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

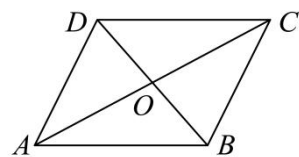
$$\therefore \angle OAB = \angle OCD,$$

$$\because \angle AOB = \angle COD, \quad AO = CO,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OB = OD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，选项 D 不符合题意.



6. 如图 1，动点 Q 从菱形 $ABCD$ 的点 A 处出发，沿边 $AB \rightarrow BC$ 匀速运动，运动到点 C 时停止. 设点 Q 的运动路程为 x ， OQ 的长为 y ， y 与 x 的函数图像如图 2 所示，当点 Q 运动到 BC 的中点时， OQ 的长是 ()

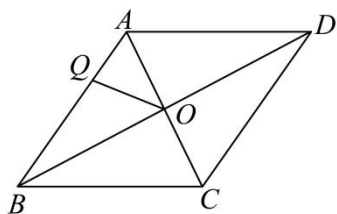


图1

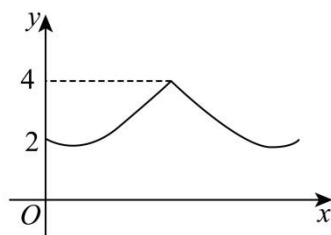


图2

A. 3

B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

C. $\sqrt{5}$

D. $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据图2可得 $OA = 2, OB = 4$ ，再利用菱形的性质求得 AB ，再利用中位线的性质即可解答.

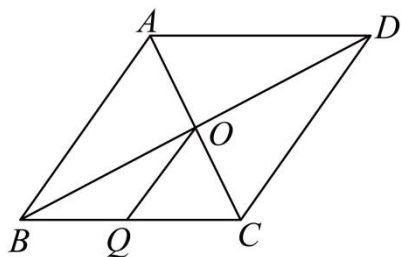
【详解】解：根据图2可得 $OA = 2, OB = 4$,

$\because$ 菱形 $ABCD$,

$\therefore AC \perp BD$,

$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 2\sqrt{5}$,

如图，当点 Q 运动到 BC 的中点时，



$\because BQ = CQ, AO = CO$,

$\therefore OQ = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$.

二、填空题 (本大题共 11 题，每小题 4 分，满分 44 分)

7. 点 $(3, -1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为_____.

【答案】 $(-3, -1)$

【解析】

【分析】此题主要考查了关于 y 轴对称点的坐标特点，关键是掌握点的坐标的变化规律.

关于 y 轴对称点的坐标特点：横坐标互为相反数，纵坐标不变，据此可直接得到结果.

【详解】解：点 $(3, -1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-3, -1)$.

故答案为： $(-3, -1)$.

8. 函数 $y = \sqrt{x+2}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -2$

【解析】

【详解】解： $\because \sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义，

$$\therefore x+2 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -2,$$

故答案为 $x \geq -2$.

9. 直线 $y = -x - 3$ 的截距是_____.

【答案】 -3

【解析】

【详解】已知直线解析式为 $y = -x - 3$ ，对应可得 $b = -3$ ，因此直线的截距为 -3 .

10. 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像位于第一、三象限，那么 $k =$ _____. (只需写一个数值)

【答案】 1 (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像位置与 k 符号的关系，确定 k 的取值范围，写出一个符合条件的数值即可.

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像位于第一、三象限，

$$\therefore k > 0,$$

取符合条件的数值，得 $k = 1$.

11. 如果一个多边形的每个内角都等于 135° ，那么这个多边形的内角和是_____.

【答案】 1080°

【解析】

【分析】设这个多边形的边数为 n ，由该多边形每个内角都等于 135° ，可得其内角和为 $135^\circ \times n$ ，结合多边形内角和公式列方程求出边数 n ，再计算多边形的内角和即可.

【详解】解：设这个多边形的边数为 n ，

根据多边形内角和公式可得:

$$(n-2) \times 180^\circ = 135^\circ \times n,$$

解得 $n=8$,

则这个多边形的内角和为 $(8-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 如果 $\angle A : \angle B = 3 : 2$, 那么 $\angle D$ 的度数是_____.

【答案】 72° ## 72 度

【解析】

【分析】 利用平行四边形邻角互补, 对角相等的性质, 结合已知角度比例关系求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 平行四边形对边平行,

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ, \quad \angle D = \angle B,$$

$$\because \angle A : \angle B = 3 : 2,$$

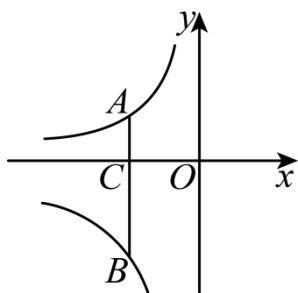
设 $\angle A = 3x$, $\angle B = 2x$, 则 $3x + 2x = 180^\circ$, 解得 $x = 36^\circ$,

$$\therefore \angle B = 2 \times 36^\circ = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle B = 72^\circ.$$

13. 函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($k_1 \neq 0$) 和 $y = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 \neq 0$) 的部分图像如图所示, 点 A 在 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图像上, 过点 A 作

$AB \parallel y$ 轴交 x 轴于点 C , 交 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像于点 B , 如果 $BC = 2AC$, 那么 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值是_____.



【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

【分析】 设点 A 的横坐标为 m , 根据 $AB \parallel y$ 轴可知点 B 、 C 的横坐标也为 m , 利用反比例函数解析式表示出线段 AC 和 BC 的长度, 结合 $BC = 2AC$ 建立等式, 化简即可求解.

【详解】 解: 设点 A 的横坐标为 m , 由图可知 $m < 0$,

$\because AB \parallel y$ 轴, 交 x 轴于点 C

$\therefore$ 点 B 、 C 的横坐标均为 m ，且点 C 的坐标为 $(m, 0)$ ，

$\therefore$ 点 A 在 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图像上，且位于第二象限，

$\therefore$ 点 A 的纵坐标为 $\frac{k_1}{m}$ ，且 $\frac{k_1}{m} > 0$ ，

$$\therefore AC = \frac{k_1}{m}.$$

$\therefore$ 点 B 在 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像上，且位于第三象限，

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 $\frac{k_2}{m}$ ，且 $\frac{k_2}{m} < 0$ ，

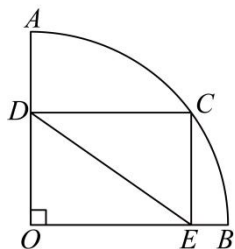
$$\therefore BC = -\frac{k_2}{m},$$

$$\therefore BC = 2AC,$$

$$\therefore -\frac{k_2}{m} = 2 \cdot \frac{k_1}{m},$$

$$\therefore \frac{k_1}{k_2} = -\frac{1}{2}.$$

14. 如图，已知圆心角为 90° 的扇形 AOB 的面积为 8π ， C 为弧 AB 上一点， D 、 E 分别为 OA 、 OB 上的点，连接 CD 、 CE 、 DE 。如果四边形 $ODCE$ 是矩形，那么 DE 的长是_____。

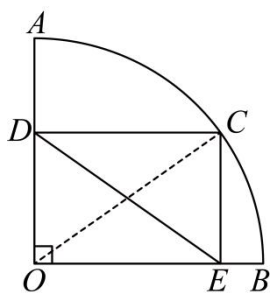


【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先利用扇形面积公式求出扇形半径 OC ，再根据矩形对角线相等的性质，得到 $DE = OC$ ，从而求出 DE 的长度。

【详解】解：连接 OC ，设扇形半径为 r 。



$\because$ 扇形 AOB 圆心角为 90° ，面积为 8π ，

$$\therefore \frac{90\pi r^2}{360} = 8\pi,$$

$$\therefore \frac{1}{4}\pi r^2 = 8\pi,$$

$$\therefore r^2 = 32,$$

$$\therefore r = 4\sqrt{2} \text{ (半径取正数)},$$

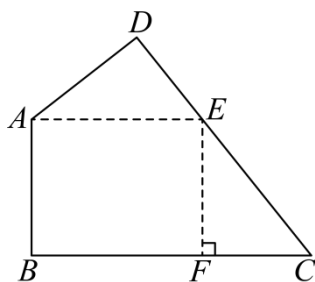
$$\therefore OC = 4\sqrt{2},$$

$\because$ 四边形 $ODCE$ 是矩形，

$$\therefore DE = OC,$$

$$\therefore DE = 4\sqrt{2}.$$

15. 如图，有一块不规则的四边形木板 $ABCD$ ， $AD = 2$ ， $CD = 4$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ 。先沿过点 A 与 AB 垂直的线裁剪，与 CD 的交点记为 E ，再沿过点 E 与 BC 垂直的线裁剪，与 BC 交于 F ，若裁剪下的 $\text{Rt}\triangle ADE$ 与 $\text{Rt}\triangle CEF$ 恰好可以拼成一个矩形，则木板 $ABCD$ 的周长是_____。



【答案】 12

【解析】

【分析】 证明四边形 $ABFE$ 是矩形，得到 $AB = EF$ ， $BF = AE$ ， $\angle AEF = 90^\circ$ ，进而得 $\angle DAE = \angle CEF$ ，再根据两个三角形拼成矩形可得 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle EFC$ ，从而得到对应边相等，设 $AE = EC = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中利用勾股定理求出 x 的值，进而求出各边长，再求出 AB 的长，最后计算周长即可。

【详解】 解： $\because AE \perp AB$ ， $EF \perp BC$ ，

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ, \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是矩形,

$$\therefore AB = EF, BF = AE, \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle CEF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AED + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CEF,$$

$\therefore$ 裁剪下的 $\text{Rt}\triangle ADE$ 与 $\text{Rt}\triangle CEF$ 恰好可以拼成一个矩形,

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle EFC,$$

$$\therefore AE = EC, AB = EF = AD = 2, DE = CF,$$

$$\text{设 } AE = EC = x, \text{ 则 } DE = CD - EC = 4 - x,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADE \text{ 中, } \angle D = 90^\circ, \text{ 由勾股定理得 } AD^2 + DE^2 = AE^2,$$

$$\therefore 2^2 + (4 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x = 2.5,$$

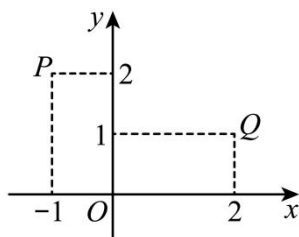
$$\therefore AE = EC = 2.5, CF = DE = 4 - 2.5 = 1.5,$$

$$\therefore BF = AE = 2.5,$$

$$\therefore BC = BF + CF = 2.5 + 1.5 = 4,$$

$$\therefore \text{木板 } ABCD \text{ 的周长 } AB + BC + CD + AD = 2 + 4 + 4 + 2 = 12.$$

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于非坐标轴上的点 P 给出如下定义: 过点 P 向两坐标轴作垂线段, 若垂线段和坐标轴围成的矩形的周长为 l , 则称点 P 是 l 系矩形点. 图中的 P 、 Q 两点均为 6 系矩形点. 如果第一象限的点 M 在直线 $y = 2x + 1$ 上, 且点 M 是 10 系矩形点, 那么点 M 的坐标是_____.



【答案】 $\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题是一道新定义题, 涉及到一次函数和矩形周长公式, 设 $M(x, 2x + 1)$, 利用 10 系矩形点, 可

知矩形周长，利用矩形周长公式即可求出 x 值，从而推断出 M 坐标.

【详解】解：∵ 第一象限的点 M 在直线 $y = 2x + 1$ 上，

∴ 设 $M(x, 2x + 1)$.

∵ 点 M 是 10 系矩形点，

∴ 点 M 和坐标轴围成的矩形周长是 10，

$$\therefore (x + 2x + 1) \times 2 = 10,$$

$$\therefore x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore 2x + 1 = 2 \times \frac{4}{3} + 1 = \frac{11}{3}.$$

$$\therefore M\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

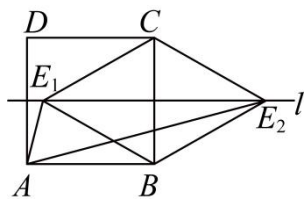
17. 在正方形 $ABCD$ 中，将边 BA 绕着点 B 旋转，当点 A 落在边 AD 的垂直平分线上的点 E 处时， $\angle AEB$ 的度数是_____.

【答案】 15° 或 75°

【解析】

【分析】分点 E 在 AB 上方和点 E 在 AB 下方两种情况讨论，由旋转的性质可得 $BA = BE$ ，结合正方形的性质和线段垂直平分线的性质得到等腰三角形顶角的度数，再利用等腰三角形的性质即可求解 $\angle AEB$ 的度数.

【详解】解：如图，设 AD 的垂直平分线为 l ，



∵ 正方形 $ABCD$ 中， l 是 AD 垂直平分线，

∴ $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD = BC = BA$ ， l 也是 BC 的垂直平分线，

∴ 将边 BA 绕着点 B 旋转，点 A 落在边 AD 的垂直平分线上的点 E 处，

∴ $BA = BE$ ，

∴ 点 A 落在边 AD 的垂直平分线上的点 E 处，

∴ $CE = BE = BA = BC$ ，

∴ BEC 是等边三角形，

$$\therefore \angle CBE = 60^\circ,$$

当点 E 落在正方形内部时, 则 $\angle ABE_1 = \angle ABC - \angle CBE_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$$\therefore BA = BE_1,$$

$$\therefore \angle AE_1B = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ;$$

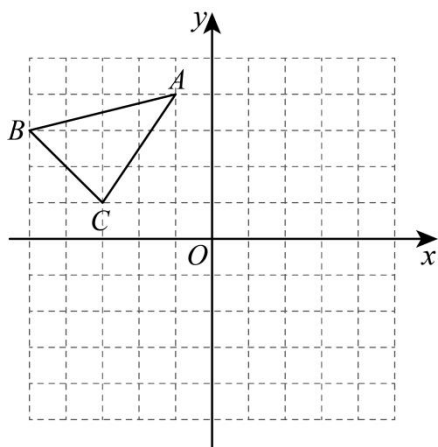
当点 E 落在正方形外部时, 则 $\angle ABE_2 = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$,

$$\therefore BA = BE_2,$$

$$\therefore \angle AE_2B = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 82 分)

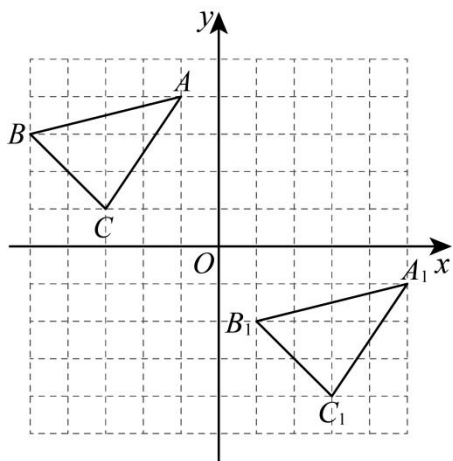
18. 如图, $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-1,4)$ 、 $B(-5,3)$ 、 $C(-3,1)$, 将 $\triangle ABC$ 向右平移 6 个单位长度, 再向下平移 5 个单位长度得到 $\triangle A_1B_1C_1$.



(1) 请画出 $\triangle A_1B_1C_1$, 并写出其各个顶点的坐标;

(2) 点 $P(a,b)$ 是 $\triangle ABC$ 边上一点, 经过平移后, 点 P 的对应点是点 P_1 , 写出点 P_1 的坐标.

【答案】 (1) $\triangle A_1B_1C_1$, 如图所示:



其中: $A_1(5, -1)$, $B_1(1, -2)$, $C_1(3, -4)$;

(2) 点 P_1 的坐标为 $(a+6, b-5)$.

【解析】

【分析】(1) 根据平移的性质画出图形即可, 根据图形即可写出其各个顶点的坐标;

(2) 按点的平移规律: 横坐标左减右加, 纵坐标上加下减, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 略

【小问 2 详解】

解: 点 $P(a, b)$ 的对应点是点 P_1 ,

$\therefore$ 点 P_1 的坐标为 $(a+6, b-5)$.

19. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-3, 2)$ 、 $B(1, 4)$.

(1) 求 A 、 B 两点间的距离;

(2) 如果点 P 在 x 轴上, 且满足 $PA = PB$, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $2\sqrt{5}$

(2) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据两点间距离公式求解即可;

(2) 设 $P(m, 0)$, 根据 $PA = PB$, 利用两点间距离公式列出方程, 解方程求出 m 的值即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $A(-3, 2)$ 、 $B(1, 4)$,

$\therefore A$ 、 B 两点间的距离为 $\sqrt{(-3-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{5}$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 P 在 x 轴上,

$\therefore$ 设 $P(m, 0)$,

$\because PA = PB$, $A(-3, 2)$ 、 $B(1, 4)$,

$\therefore PA^2 = PB^2$,

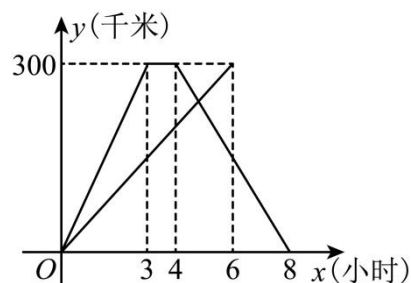
$\therefore (-3-m)^2 + (2-0)^2 = (1-m)^2 + (4-0)^2$,

$\therefore 9 + 6m + m^2 + 4 = 1 - 2m + m^2 + 16$

解得: $m = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

20. A 、 B 两地间的公路长为 300 千米, 甲、乙两车同时从 A 地出发沿这一公路驶向 B 地, 甲车到达 B 地 1 小时后沿原路返回. 如图是它们离 A 地的路程 y (千米) 与行驶时间 x (小时) 之间的函数图象.



(1) 求甲车返回过程中 y 与 x 之间的函数表达式;

(2) 当乙车与返回的甲车相遇时, 求乙车行驶的路程.

【答案】(1) $y = -75x + 600 (4 \leq x \leq 8)$;

(2) 当乙车与返回的甲车相遇时, 乙车行驶的路程为 240 千米.

【解析】

【分析】(1) 设出一次函数解析式, 代入图象上的两个点 $(4, 300)$ 和 $(8, 0)$, 即可解答;

(2) 利用待定系数法求得乙车行驶过程中 y 与 x 之间的函数表达式, 根据题意得到 $50x = -75x + 600$, 进一步求得速度即可解答.

【小问 1 详解】

解：由图象可知，甲车返回过程的图象经过点 $(4, 300)$ 和 $(8, 0)$ ，

设甲车返回过程中 y 与 x 之间的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

将这两点坐标代入，得：
$$\begin{cases} 4k + b = 300 \\ 8k + b = 0 \end{cases}$$
，

解得：
$$\begin{cases} k = -75 \\ b = 600 \end{cases}$$
，

$\therefore$ 甲车返回过程中 y 与 x 之间的函数表达式为 $y = -75x + 600 (4 \leq x \leq 8)$ ；

【小问2详解】

解：由图象可知，乙车的图象经过点 $(0, 0)$ 和 $(6, 300)$ ，

设乙车行驶过程中 y 与 x 之间的函数表达式为 $y = mx$ ，

将点 $(6, 300)$ 代入，得： $6m = 300$ ，

解得： $m = 50$ ，

$\therefore$ 乙车的函数表达式为 $y = 50x$ ，

当乙车与返回的甲车相遇时，两车离A地的路程相等，

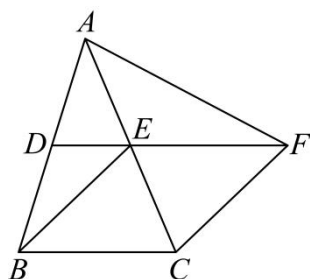
即： $50x = -75x + 600$ ，

解得： $x = 4.8$ ，

当 $x = 4.8$ 时，乙车行驶的路程为： $y = 50 \times 4.8 = 240$ (千米)，

答：当乙车与返回的甲车相遇时，乙车行驶的路程为240千米。

21. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点，延长 DE 到点 F ，使 $EF = 2DE$ 。



(1) 求证： $BE = CF$ ；

(2) 连接 AF ，延长 BE 交 AF 于点 G ，当 $AD = AG$ 时，求证：四边形 $BCFE$ 是菱形。

【答案】(1) 证明：已知在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE \parallel BC$ ，且 $2DE = BC$ ，

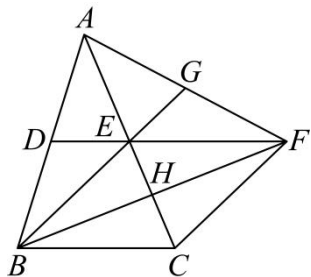
又 $EF = 2DE$,

$\therefore EF = BC$, 且 $EF \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是平行四边形,

$\therefore BE = CF$.

(2) 证明: 连接 AF , 延长 BE 交 AF 于点 G , 连接 BF 交 CE 于点 H ,



由 (1) 知, 四边形 $BCFE$ 是平行四边形,

$\therefore EG \parallel CF$, $BH = HF$,

$\because D$ 是边 AB 的中点,

$\therefore G$ 是 AF 的中点, $AG = \frac{1}{2}AF$,

$\because AD = AG$, $AD = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore AB = AF$,

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle AFH$ 中,

$$\begin{cases} AB = AF \\ AH = AH \\ BH = HF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle AFH (SSS)$,

$\therefore \angle BAC = \angle FAC$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AF \\ AE = AE \\ \angle BAH = \angle FAH \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE (SAS)$

$\therefore BE = FE$,

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是菱形.

【解析】

【分析】(1) 先根据题意得到 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，再根据三角形中位线的性质得出四边形 $BCFE$ 的一组对边平行且相等，进而得证.

(2) 连接 BF 交 CE 于点 H ，利用平行四边形的性质得到 $EG \parallel CF$ ， $BH = HF$ ，再结合条件证出 $\triangle ABH \cong \triangle AFH$ (SSS)，得到 $\angle BAH = \angle FAH$ ，进而证出 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$ (SAS)，得到 $BE = FE$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

22. 将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 落在边 AD 上的点 B' 处，折痕与 AD 边交于点 E ，与 BC 边交于点 F ，点 A 落在点 A' 处.

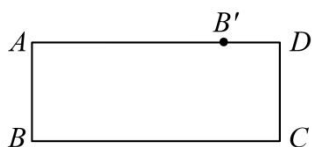


图1

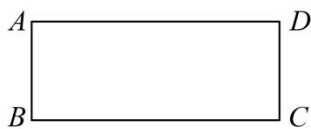


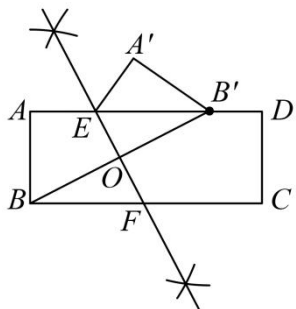
图2

(1) 如图 1，请在图中作出示意图（其中折痕 EF 请用直尺和圆规作出，并保留作图痕迹）；

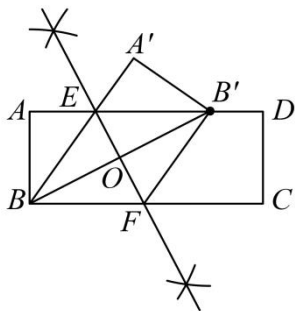
(2) 在图 1 中，连接 BE ，求证： $BE = B'E$ ；

(3) 设 $AB = 2$ ， $BC = 5$ （如图 2），当点 B' 与点 D 重合时，求 AE 的长.

【答案】(1)



(2) 证明：连接 BE ， $B'E$ ，如图所示：



根据折叠的性质可得 $BE = B'E$ ， $FB' = BF$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\begin{aligned}
&\therefore B'E \parallel BF, \\
&\therefore \angle OEB' = \angle OFB, \quad \angle OB'E = \angle OBF, \\
&\text{又} \because BO = B'O, \\
&\therefore \triangle OB'E \cong \triangle OBF \text{ (AAS)}, \\
&\therefore EB' = BF, \\
&\because BE = B'E, \quad FB' = BF, \\
&\therefore BE = B'F.
\end{aligned}$$

$$(3) \quad AE = \frac{21}{10}$$

【解析】

【分析】(1) 按照题意画图即可.

(2) 根据折叠的性质可得 $EF \perp BB'$, $BO = B'O$, $BE = B'E$, $FB' = BF$, 结合矩形和平行线的性质证明 $\triangle OB'E \cong \triangle OBF$ (AAS), 进而可证 $BE = B'F$.

(3) 根据折叠的性质可得 $A'B' = AB = 2$, $B'E = 5 - AE = 5 - A'E$, 结合勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

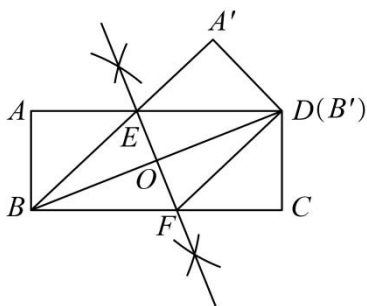
解: 按照题意画图, 如图所示.

【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

解: 当点 B' 与点 D 重合时, 如图所示:



根据折叠的性质可得 $BE = B'E$, $A'B' = AB$, $\angle A = \angle A' = 90^\circ$,

$$\because AB = 2, \quad BC = 5,$$

$$\therefore AB' = BC = 5, \quad A'B' = AB = 2,$$

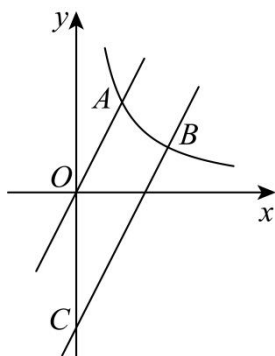
$$\therefore B'E = 5 - AE = 5 - A'E,$$

由勾股定理可得 $B'E^2 = A'E^2 + A'B'^2$, 即 $(5 - A'E)^2 = A'E^2 + 2^2$,

解得: $A'E = \frac{21}{10}$,

$AE = \frac{21}{10}$.

23. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 正比例函数 $y = 2x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像相交于点 $A(1, m)$.



(1) 求反比例函数的表达式;

(2) 如果将正比例函数 $y = 2x$ 的图像向下平移, 得到的新函数的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像相交于点 $B(n, 1)$, 与 y 轴交于点 C , 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 D 是坐标平面内一点, 当以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形时, 请直接写出点 D 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{2}{x} (x > 0)$

(2) 3 (3) $D(3, 6)$ 或 $D(-1, -2)$ 或 $D(1, -4)$.

【解析】

【分析】 (1) 先根据正比例函数求出点 A 的坐标, 再利用待定系数法即可求出反比例函数的解析式.

(2) 先求出点 B 的坐标, 利用一次函数平移的性质设出平移后的解析式, 利用待定系数法求出平移后的解析式, 进而可求出点 C 的坐标, 再利用待定系数法求出直线 AB 的解析式, 令直线 AB 与 y 轴交于点 E , 求出点 E 的坐标, 最后根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BEC} - S_{\triangle AEC}$ 求出即可.

(3) 设出点 D 的坐标, 然后分三种情况求解即可.

【小问 1 详解】

解: 把点 $A(1, m)$ 代入 $y = 2x$,

则 $m = 2$,

$\therefore A(1, 2)$,

把 $A(1,2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 得: $k = 1 \times 2 = 2$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为: $y = \frac{2}{x} (x > 0)$.

【小问 2 详解】

解: 将 $B(n,1)$ 代入 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$,

$$\text{则 } 1 = \frac{2}{n},$$

$$\therefore n = 2,$$

$$\therefore B(2,1),$$

设正比例函数 $y = 2x$ 的图像向下平移后的一次函数解析式为: $y = 2x + b$,

把 $B(2,1)$ 代入 $y = 2x + b$,

$$\text{则 } 1 = 2 \times 2 + b,$$

$$\text{解得: } b = -3,$$

$\therefore$ 平移后的一次函数解析式为: $y = 2x - 3$,

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = -3,$$

$$\therefore C(0,-3),$$

设直线 AB 的解析式为: $y = mx + n$,

$$\text{则 } \begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases},$$

故直线 AB 的解析式为: $y = -x + 3$,

令直线 AB 与 y 轴交于点 E ,

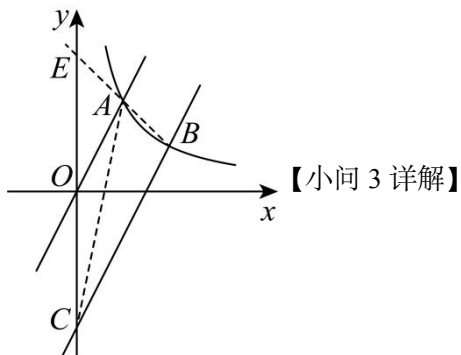
$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = 3,$$

$$\therefore E(0,3),$$

$$\therefore CE = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BEC} - S_{\triangle AEC}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}CE \cdot x_B - \frac{1}{2}CE \cdot x_A \\
&= \frac{1}{2} \times 6 \times 2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$



解：设点 $D(x, y)$ ，然后分三种情况求解：

$$A(1, 2) \quad B(2, 1) \quad C(0, -3)$$

当以 AB 为对角线时，则 AB 的中点坐标为： $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ ，即 $(1.5, 1.5)$ ，

$$\text{则 } \frac{0+x}{2} = 1.5, \quad \frac{-3+y}{2} = 1.5,$$

$$\therefore x = 3, \quad y = 6,$$

$$\therefore D(3, 6),$$

当以 AC 为对角线时，则 AC 的中点坐标为： $\left(\frac{1+0}{2}, \frac{2-3}{2}\right)$ ，即 $(0.5, -0.5)$ ，

$$\text{则 } \frac{2+x}{2} = 0.5, \quad \frac{1+y}{2} = -0.5,$$

$$\therefore x = -1, \quad y = -2,$$

$$\therefore D(-1, -2),$$

当以 BC 为对角线时，则 BC 的中点坐标为： $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$ ，即 $(1, -1)$ ，

$$\text{则 } \frac{1+x}{2} = 1, \quad \frac{2+y}{2} = -1,$$

$$\therefore x = 1, \quad y = -4,$$

$$\therefore D(1, -4),$$

综上：当以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形时，则 $D(3,6)$ 或 $D(-1,-2)$ 过 $D(1,-4)$ 。

24. 点 E 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内部一点，连接 AE 、 BE 、 CE 、 DE ， $AE = AB$ 。

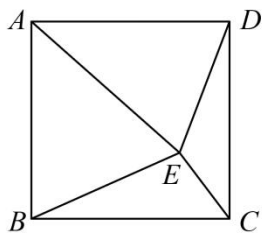


图1

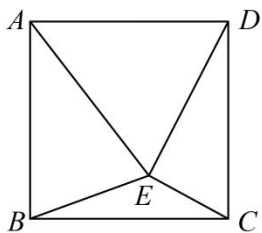
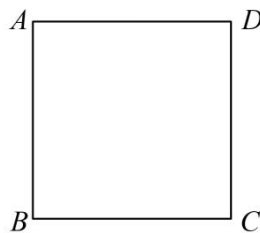


图2



备用图

- (1) 如图 1，求 $\angle BED$ 的度数；
- (2) 如图 2，当 $CE \perp DE$ 时，求 $\triangle ADE$ 的面积；
- (3) 延长 DE 交边 BC 于点 F ，当 $\triangle EFC$ 是以 EC 为腰的等腰三角形时，求 BF 的长。

【答案】 (1) 135°

(2) $\frac{2}{5}$

(3) $\sqrt{3}-1$ 或 $2-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由 $AE = AB = AD$ 可知 $\triangle ABE$ 、 $\triangle AED$ 是等腰三角形，由它们的内角和为 180° ，可得 $\angle BAE + \angle DAE + 2\angle AEB + 2\angle AED = 360^\circ$ ，从而解得 $\angle BED$ 的度数；

(2) 过点 A 作 $AH \perp DE$ 于点 H ，由 $\triangle AHD \cong \triangle DEC$ (AAS) 及等腰三角形三线合一的性质可知， $AH = DE$ ， $2CE = DE$ ，由勾股定理得 CE ，可得 AH 与 DE ，即可得到 $\triangle ADE$ 的面积；

(3) 分情况讨论，① $EC = EF$ ，② $EC = FC$ ，通过解直角三角形，得到 EC 的长度，即可计算出 BF 的长度。

【小问 1 详解】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是正方形内部一点， $AE = AB$ ，

$$\therefore AE = AB = AD, \quad \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB, \quad \angle AED = \angle ADE,$$

$$\therefore \triangle ABE、\triangle AED \text{ 的内角和为 } 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle ABE + \angle AEB = 180^\circ, \quad \angle DAE + \angle AED + \angle ADE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle DAE + 2\angle AEB + 2\angle AED = 360^\circ,$$

$$\therefore 90^\circ + 2\angle BED = 360^\circ$$

$$\therefore \angle BED = 135^\circ;$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是正方形内部一点， $AE = AB$ ，

$$\therefore AE = AD = CD, \quad \angle ADC = 90^\circ,$$

如图，过点 A 作 $AH \perp DE$ 于点 H ，

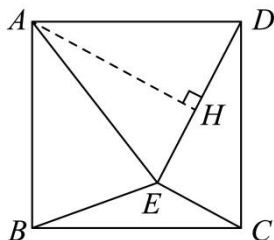


图2

$$\therefore \angle AHD = 90^\circ,$$

又 $\because CE \perp DE$ ，

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADH + \angle CDE = 90^\circ, \quad \angle DCE + \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle DCE,$$

在 $\triangle AHD$ 与 $\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases} \angle AHD = \angle DEC \\ \angle ADH = \angle DCE, \\ AD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AHD \cong \triangle DEC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AH = DE, \quad DH = CE,$$

又 $\because AE = AD$ ， $AH \perp DE$ ，

$$\therefore EH = DH,$$

$$\therefore DH = CE,$$

$$\therefore 2CE = DE,$$

令 $CE = x$ ，则 $DE = 2x$ ，

在 $Rt\triangle DEC$ 中， $CE^2 + DE^2 = CD^2$ ，即 $x^2 + (2x)^2 = 1^2$ ，

$$\text{解得, } x = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad DE = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

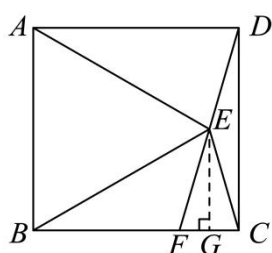
$$\therefore AH = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times AH \times DE = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5};$$

【小问3详解】

解：延长 DE 交边 BC 于点 F ， EFC 是以 EC 为腰的等腰三角形，

当 $EC = EF$ 时，如下图所示，过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G ，



备用图

$$\therefore FG = CG = \frac{1}{2}CF, \quad EG \parallel DC,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle DFC, \quad \angle EGF = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle DFC,$$

$$\therefore \frac{FG}{FC} = \frac{EF}{DF} = \frac{EG}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EF = DE = CE,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ECD,$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ - \angle EDC, \quad \angle BCE = 90^\circ - \angle ECD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BCE,$$

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} AD = BC \\ \angle ADE = \angle BCE, \\ DE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCE (SAS)$$

$$\therefore AE = BE, \quad \angle DAE = \angle CBE,$$

$$\therefore AB = AE = BE,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle EAB = \angle ABE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CBE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = \angle BCE = \angle BEC = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ECD = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = 30^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, 且边长为 1,

$$\therefore EG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2},$$

设 $FG = CG = x$,

$$\because FG^2 + EG^2 = EF^2$$

$$\therefore x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = EF^2$$

$$\because \angle CBE = \angle CEF = 30^\circ, \angle BCE = \angle ECF, \quad EF = EC, \quad BE = BC,$$

$$\therefore \triangle CBE \sim \triangle CEF,$$

$$\therefore \frac{CE}{CF} = \frac{BE}{EF}, \quad \text{即 } CE \cdot EF = BE \cdot CF,$$

$$\because EC = EF,$$

$$\therefore EF^2 = BE \cdot CF,$$

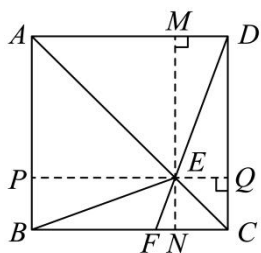
$$\therefore x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \times 2x$$

$$\text{解得 } x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (x_2 > 1, \text{ 故舍去}),$$

$$\therefore FG = CG = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BF = BC - FG - CG = 1 - 2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 1,$$

当 $EC = FC$ 时, 如下图所示, 过点 E 作 $MN \perp BC$ 交 AD 于点 M , 交 BC 于点 N , $PQ \perp CD$ 交 AB 于点 P , 交 CD 于点 Q ,



备用图

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD \parallel BC$, 四边形 $CNEQ$ 及四边形 $APEM$ 都是矩形,

$\because$ 点 F 在 DE 的延长线上,

$\therefore \angle ADE = \angle CFE$,

$\because \angle CEF = \angle CFE, \angle ADE = \angle AED$

$\therefore \angle AED = \angle CEF$,

$\therefore \angle AED + \angle CED = \angle CEF + \angle CED = 180^\circ$

$\therefore$ 点 C 在 AE 的延长线上, 即点 C 、 E 、 A 共线,

$\therefore$ 点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上,

$\therefore CN = CQ = EQ = EN$, $AP = PE = EM = AM$, $\angle ECN = \angle PAE = 45^\circ$

设 $CN = CQ = EQ = EN = y$, 则 $AP = PE = EM = AM = 1 - y$,

在 $Rt\triangle APE$ 中, $AP^2 + PE^2 = AE^2$, 即 $(1 - y)^2 + (1 - y)^2 = 1^2$

解得 $y_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($y_2 > 1$, 故舍去),

$\therefore CN = EN = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore CE = \sqrt{2} - 1$,

$\therefore FC = EC = \sqrt{2} - 1$,

$\therefore BF = BC - FC = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$

综上, $BF = \sqrt{3} - 1$ 或 $BF = 2 - \sqrt{2}$.