

八年级数学

考生注意:

1. 本试卷共 23 题; 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 如果一个十边形的每个内角都是 n 度, 那么 n 的值是 ()

A. 36 B. 60 C. 72 D. 144

【答案】D

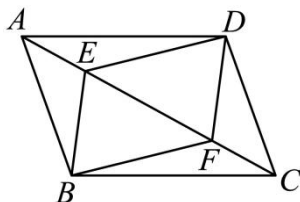
【解析】

【详解】解: $\because$ 该十边形每个内角相等,

$\therefore$ 该十边形是正十边形,

$\therefore$ 每个内角 $= \frac{(10-2) \times 180^\circ}{10} = 144^\circ$, 即 $n = 144$.

2. 如图, E 、 F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的两点, 连接 BE 、 DE 、 BF 、 DF . 下列四个条件中不能使四边形 $BEDF$ 为平行四边形的是 ()



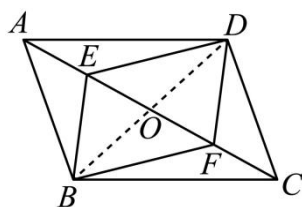
A. $AE = CF$ B. $\angle ABE = \angle CDF$ C. $BE = DF$ D. $BE \parallel DF$

【答案】C

【解析】

【分析】连接 BD , 交 AC 于点 O , 根据平行四边形的判定和性质及全等三角形的判定和性质依次对选项证明判断即可.

【详解】解: 连接 BD , 交 AC 于点 O ,



A、 $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AO = CO, BO = DO,$$

$$\because AE = CF,$$

$$\therefore AO - AE = CO - CF \text{ 即 } OE = OF,$$

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为平行四边形, 故选项不符合题意;

B、 $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DCF,$$

$$\because \angle ABE = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (\text{ASA}),$$

$$\therefore BE = DF, \angle AEB = \angle CFD,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle EFD,$$

$$\therefore BE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为平行四边形, 故选项不符合题意;

C、无法证明四边形 $BEDF$ 为平行四边形, 故选项符合题意;

D、 $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DCF$$

$$\because BE \parallel DF,$$

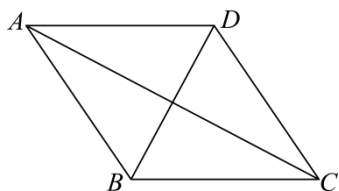
$$\therefore \angle BEF = \angle DFE$$

$$\therefore \angle BEF - \angle BAE = \angle DFE - \angle DCF$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF,$$

同选项 B 得四边形 $BEDF$ 为平行四边形, 故选项不符合题意.

3. 如图, 已知 AC 、 BD 是菱形 $ABCD$ 的对角线, $\angle ACD = 25^\circ$, 那么 $\angle ABD$ 是 ()



- A. 25° B. 65° C. 75° D. 85°

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据菱形的性质得出 $AB = BC = CD = AD$ ， $\angle ACD = \angle ACB = 25^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ，确定 $\angle BCD = 50^\circ$ ，得出 $\angle ABC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ ，再由菱形的性质求解即可.

【详解】 解： $\because$ 菱形 $ABCD$ ， $\angle ACD = 25^\circ$ ，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\angle ACD = \angle ACB = 25^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BCD = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ ，

$\because$ 菱形 $ABCD$ ，

$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 65^\circ$.

4. 已知一个矩形两条对角线的夹角是 60° ，一条对角线长为 2，那么这个矩形的面积是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用矩形 $ABCD$ 对角线相等且互相平分的性质，先推出等边 $\triangle AOB$ 得到矩形短边 $AB = 1$ ，再结合勾股定理求出长边长 $BC = \sqrt{3}$ ，最后计算矩形面积.

【详解】 解： $\because$ 矩形 $ABCD$ ，一条对角线长为 2，

$\therefore AC = BD = 2$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OB = \frac{1}{2} AC = 1$ ，

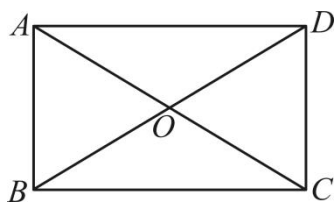
$\because$ 两条对角线的夹角是 60° ，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AB = OA = 1$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积是 $AB \cdot BC = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.



5. 平面直角坐标系中, 已知 $A(m, 0)$, $B(-3, 0)$, 且 $AB = 8$, 如果 A 是 x 轴正半轴上的点, 那么 m 的值是 ()

- A. -11 B. -5 C. 5 D. 11

【答案】C

【解析】

【分析】 A 、 B 两点都在 x 轴上, x 轴上两点的距离等于两点横坐标差的绝对值, 结合 A 在 x 轴正半轴的条件, 即可求出 m 的值.

【详解】解: $\because A(m, 0)$, $B(-3, 0)$ 都在 x 轴上,

$\therefore AB$ 的长度为 $|m - (-3)| = |m + 3|$,

又 $\because AB = 8$,

$\therefore |m + 3| = 8$,

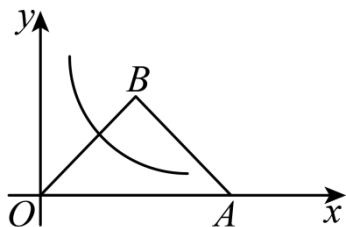
$\therefore m + 3 = 8$ 或 $m + 3 = -8$, 即 $m = 5$ 或 $m = -11$,

$\because A$ 是 x 轴正半轴上的点,

$\therefore m > 0$,

$\therefore m = 5$.

6. 如图, 在 $\triangle OAB$ 中, $\angle ABO = 90^\circ$, $AB = OB$, 且边 OA 在 x 轴上, 点 A 的横坐标是 6, 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像经过 $\triangle OAB$ 的重心 P , 那么 k 的值是 ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

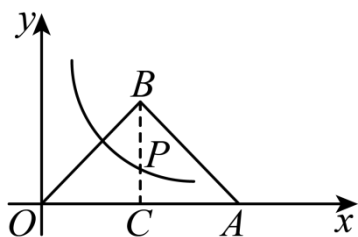
【答案】B

【解析】

【分析】连接 BP 并延长交 x 轴于点 C , 根据题意得出 $BC \perp OA$, $BC = OC = CA$, 确定 $BC = OC = CA = 3$,

再由重心的性质得出 $CP = \frac{1}{3}BC = 1$ ，确定 $P(3,1)$ ，代入解析式即可求解

【详解】解：连接 BP 并延长交 x 轴于点 C ，如图所示：



$\because \angle ABO = 90^\circ$ ， $AB = OB$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像经过 $\triangle OAB$ 的重心 P ，

$\therefore BC \perp OA$ ， $BC = OC = CA$ ，

$\therefore$ 点 A 的横坐标是 6，

$\therefore OA = 6$ ，

$\therefore BC = OC = CA = 3$ ，

$\therefore$ 重心 P ，

$\therefore CP = \frac{1}{3}BC = 1$ ，

$\therefore P(3,1)$ ，

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像经过 $\triangle OAB$ 的重心 P ，

$\therefore k = 1 \times 3 = 3$

二、填空题（本大题共 10 题，每题 4 分，满分 40 分）

7. 从七边形一个顶点出发，最多可引_____条对角线.

【答案】 4

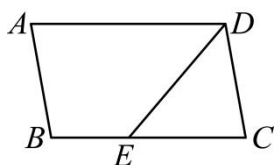
【解析】

【分析】 n 边形从一个顶点出发可以引 $(n-3)$ 条对角线，据此求解即可.

【详解】解：由题意得， $7-3=4$ ，

$\therefore$ 从七边形一个顶点出发，最多可引 4 条对角线.

8. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle ADC$ 的平分线交 BC 于点 E ，如果 $\angle A = 80^\circ$ ，那么 $\angle BED =$ _____°.



【答案】 130

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得出 $AB \parallel CD$ ， $\angle A = \angle C$ ，确定 $\angle ADC = 100^\circ$ ， $\angle A = \angle C = 80^\circ$ ，再由角平分线得出 $\angle CDE = 50^\circ$ ，利用三角形外角的性质即可求解.

【详解】解： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\therefore AB \parallel CD, \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \angle A + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 80^\circ,$$

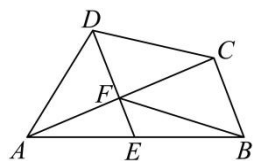
$$\therefore \angle ADC = 100^\circ, \angle A = \angle C = 80^\circ,$$

$\therefore \angle ADC$ 的平分线交 BC 于点 E ，

$$\therefore \angle CDE = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle CDE + \angle C = 50^\circ + 80^\circ = 130^\circ.$$

9. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 的中点, AC 、 DE 交于点 F , 如果 $AF = CF$, $BF \parallel CD$, $EF = 1$, 那么 DF 的长是_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】根据题意得出 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 确定 $EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2}BC$, 得出 $BC = 2$, 再由平行四边形的判定和性质即可求解.

【详解】解： $\because E$ 是边 AB 的中点, $AF = CF$ ，

$\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore EF \parallel BC, EF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore EF = 1$$

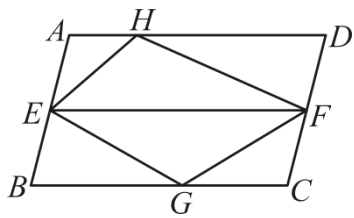
$$\therefore BC = 2,$$

$$\therefore BF \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $DFBC$ 为平行四边形，

$$\therefore DF = BC = 2.$$

10. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点, G 、 H 分别是边 BC 、 AD 上的动点, 如果 $S_{\text{平行四边形}ABCD} = 8$, 那么 $S_{\text{四边形}EGFH} = \underline{\hspace{2cm}}$.

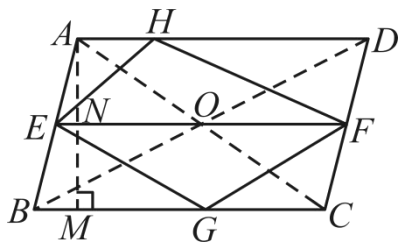


【答案】 4

【解析】

【分析】 连接 AC 、 BD 交于点 O , 连接 EF , 根据三角形中位线的性质得出 EF 经过点 O , 且 $EF \parallel AD$, 确定四边形 $AEFD$ 、 $EBCF$ 为平行四边形, $AD = EF = BC$, 过点 A 作 $AM \perp BC$ 交 EF 于点 N , 利用平行四边形的面积公式及三角形的面积公式求解即可.

【详解】 解: 连接 AC 、 BD 交于点 O , 连接 EF ,



$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点,

$$\therefore EO = \frac{1}{2}AD, EO \parallel AD, FO = \frac{1}{2}AD, FO \parallel AD,$$

$$\therefore EO \parallel FO,$$

$\therefore EF$ 经过点 O , 且 $EF \parallel AD$,

$\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore EF \parallel AD \parallel BC, AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 、 $EBCF$ 为平行四边形,

$$\therefore AD = EF = BC,$$

过点 A 作 $AM \perp BC$ 交 EF 于点 N , 交 BC 于点 M ,

$$\because S_{\text{平行四边形}ABCD} = 8,$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形}ABCD} = S_{\text{平行四边形}AEFD} + S_{\text{平行四边形}EBCF} = EF \cdot AN + EF \cdot MN = 8,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EGFH} = S_{\triangle EHF} + S_{\triangle EGF} = \frac{1}{2}EF \cdot AN + \frac{1}{2}EF \cdot MN = \frac{1}{2}(EF \cdot AN + EF \cdot MN) = 4.$$

11. 在平面直角坐标系中, 将线段 EF 先向下平移 3 个单位长度, 再向右平移 1 个单位长度, P 是线段 EF 上一点, 点 P 平移后的对应点为 $Q(0, -2.5)$, 则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $(-1, 0.5)$

【解析】

【分析】 点平移的坐标变化规律“左减右加, 上加下减”.

【详解】解: 由题意可知, 点 P 先向下平移 3 个单位长度, 再向右平移 1 个单位长度后得到对应点 $Q(0, -2.5)$., 因此将点 Q 向左平移 1 个单位长度, 再向上平移 3 个单位长度即可得到点 P , 则点 P 的坐标为 $(0-1, -2.5+3)$, 即 $P(-1, 0.5)$.

12. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(0, -2)$, 那么 $b =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 一次函数图象上的点的坐标满足函数解析式, 将已知点的坐标代入一次函数解析式, 即可求出 b 的值.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(0, -2)$,

$\therefore$ 将 $x = 0$, $y = -2$ 代入 $y = kx + b$, 得

$$-2 = k \cdot 0 + b,$$

解得 $b = -2$.

13. 如果函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的坐标是 $(3, 0)$, 那么一元一次方程 $kx+b=0$ 的解是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据方程的解是函数图象与 x 轴的交点的横坐标, 即可求解.

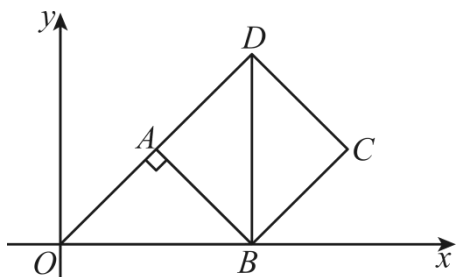
【详解】解: $\because$ 函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴的交点坐标是 $(3, 0)$,

$\therefore$ 方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=3$.

故答案为 3 .

【点睛】 本题考查一次函数与一元一次方程, 方程的解是函数图象与 x 轴的交点的横坐标

14. 如图, 在平面直角坐标系中, O 是原点, 点 A 在第一象限, 点 $B(2, 0)$, $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形, 以 AB 为边在 AB 右侧作正方形 $ABCD$, 那么点 C 的坐标是_____.

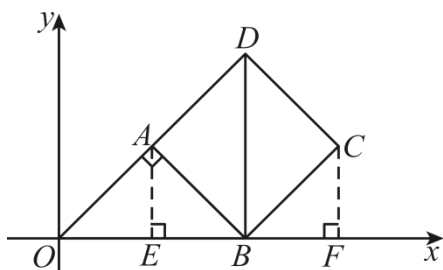


【答案】 $(3,1)$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AE \perp x$ 轴, 过点 C 作 $CF \perp x$ 轴, 根据等腰直角三角形的性质得出 $OB = 2, AE = BE = 1$, 再由全等三角形的判定和性质得出 $\triangle EAB \cong \triangle FBC (\text{AAS})$, $BF = AE = CF = BE = 1$, 结合图形即可求解.

【详解】解：过点 A 作 $AE \perp x$ 轴，过点 C 作 $CF \perp x$ 轴，如图所示：



$$\therefore \angle AEB = \angle CFB = 90^\circ,$$

∵ 点 $B(2,0)$, $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形, $AE \perp OB$,

$$\therefore OB = 2, AE = BE = 1,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EAB = 45^\circ,$$

∵ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, AB = BC,$$

$$\therefore \angle CBF = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle CBF = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle EAB \cong \triangle FBC (\text{AAS}),$$

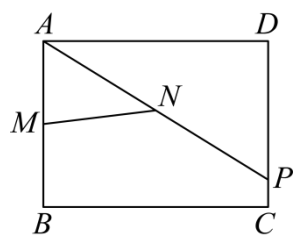
$$\therefore BF = AE = CF = BE = 1,$$

$$\therefore OF = OB + BF = 3,$$

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(3,1)$.

15. 如图, 已知矩形 $ABCD$, $AB=3$, $BC=4$, P 是边 CD 上一个动点, M 、 N 分别是线段 AB 、 AP

的中点，那么线段 MN 的长的取值范围是_____.

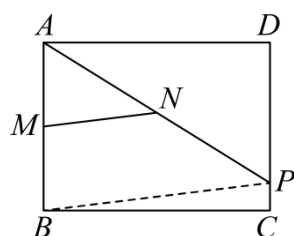


【答案】 $2 \leq MN \leq 2.5$

【解析】

【分析】连接 BP ，根据中位线的性质得出 $MN = \frac{1}{2}BP$ ，然后分两种情况分析：当点 P 与点 C 重合时，当点 P 与点 D 重合时，结合图形求解即可.

【详解】解：连接 BP ，如图所示：



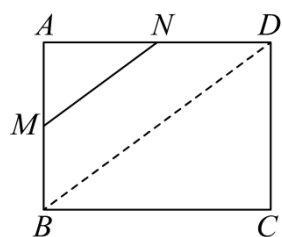
$\because M$ 、 N 分别是线段 AB 、 AP 的中点，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BP,$$

当点 P 与点 C 重合时， $BP = BC = 4$ ，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BP = 2,$$

当点 P 与点 D 重合时，



$\because$ 矩形 $ABCD$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AB = CD = 3,$$

$$\therefore BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

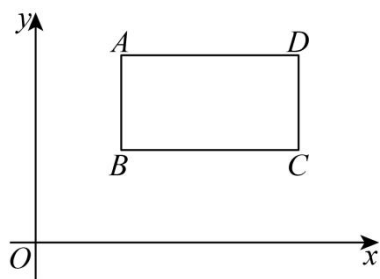
$$\therefore MN = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}BD = 2.5,$$

$$\therefore 2 \leq MN \leq 2.5.$$

16. 定义：如果一条直线能将矩形分成面积相等的两部分，那么称这条直线是这个矩形的一条“面积等分

线”。如图，矩形 $ABCD$ 的顶点为 $A(1,2)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(3,1)$ 、 $D(3,2)$ ，这个矩形与 x 轴夹角为 45° 的

“面积等分线”的表达式是_____。

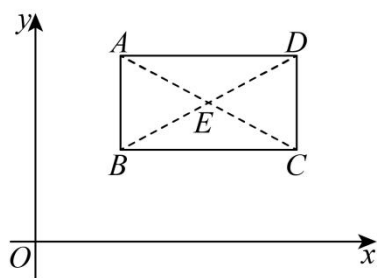


【答案】 $y = x - \frac{1}{2}$ 或 $y = -x + \frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 如图，连接 AC ， BD 交于点 E ，首先根据矩形的性质和中点坐标公式求出点 E 的坐标，然后利用待定系数法求解。

【详解】 解：如图，连接 AC ， BD 交于点 E ，



$\because$ 矩形 $ABCD$ 的顶点为 $A(1,2)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(3,1)$ 、 $D(3,2)$ ，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ ，即 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

设这个矩形与 x 轴夹角为 45° 的“面积等分线”的表达式为 $y = x + a$ 或 $y = -x + b$

$\therefore$ 将 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 代入 $y = x + a$ 或 $y = -x + b$ 得， $\frac{3}{2} = 2 + a$ 或 $\frac{3}{2} = -2 + b$

解得 $a = -\frac{1}{2}$ ， $b = \frac{7}{2}$

$\therefore y = x - \frac{1}{2}$ 或 $y = -x + \frac{7}{2}$ 。

三、解答题（本大题共 7 题，其中第 17、18 题每题 10 分，第 19、20 题每题 12 分，第 21 至 23 题每题 14 分，满分 86 分）

17. 已知一次函数 $y = 2x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像交于点 $A(1,3)$ 。

(1) 求 k 和 b 的值；

(2) 判断反比例函数的图像位于哪些象限?

(3) 在平面直角坐标系 xOy 中, 求直线 $y = 2x + b$ 上位于 x 轴上方的所有点的横坐标的取值范围.

【答案】(1) $k = 3$; $b = 1$

(2) 第一、三象限 (3) $x > -0.5$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法代入函数解析式求解即可;

(2) 根据反比例函数的性质即可求解;

(3) 根据题意列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意点 $A(1, 3)$ 既在一次函数也在反比例的图像上,

$$\therefore 3 = 2 \times 1 + b,$$

解得 $b = 1$;

$$3 = \frac{k}{1},$$

解得 $k = 3$;

【小问 2 详解】

由 (1) 可得 $k = 3 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数的图像位于第一、三象限;

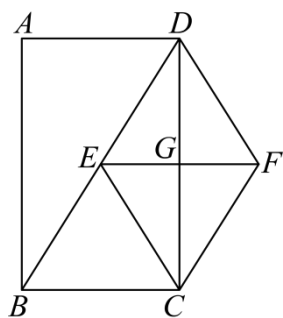
【小问 3 详解】

根据题意得: $2x + 1 > 0$,

解得 $x > -0.5$.

$\therefore$ 所有这样的点的横坐标的取值范围是 $x > -0.5$.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在对角线 BD 上, 以 BC 、 BE 为一组邻边作平行四边形 $BCFE$, EF 与边 CD 交于点 G , 连接 CE 、 DF .



(1) 当 $AB = 6$, $BC = 4$ 时, 求四边形 $CEDF$ 的面积;

(2) 如果 E 为 BD 中点, 求证: 四边形 $CEDF$ 为菱形.

【答案】(1) $S_{\text{四边形}CEDF} = 12$

(2) 证明: $\because E$ 为 BD 中点,

$$\therefore BE = DE,$$

$\because$ 平行四边形 $BCFE$,

$$\therefore BE = CF, DE \parallel CF,$$

$$\therefore DE = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 为平行四边形,

由 (1) 得 $\angle DGE = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 为菱形

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得出 $AB = CD = 6$, $\angle BCD = 90^\circ$, 再由平行四边形的性质得出 $BC = EF = 4$, $BC \parallel EF$, $\angle BCD = \angle DGE = 90^\circ$, 结合图形得出 $S_{\text{四边形}CEDF} = S_{\triangle CDE} + S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}CD \cdot EF$ 求解即可;

(2) 根据题意得出 $BE = DE$, 再由平行四边形的性质和判定得出四边形 $CEDF$ 为平行四边形, 利用菱形的判定即可证明.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore AB = CD = 6, \angle BCD = 90^\circ,$$

$\because$ 平行四边形 $BCFE$,

$$\therefore BC = EF = 4, BC \parallel EF,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle DGE = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四边形}CEDF} &= S_{\triangle CDE} + S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}CD \cdot EG + \frac{1}{2}CD \cdot GF = \frac{1}{2}CD(EG + GF) = \frac{1}{2}CD \cdot EF \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12. \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

略.

19. 如图, 某天小海偶然打开爸爸手机的设置 $\rightarrow$ 电池 $\rightarrow$ 电池健康, 显示最大容量与循环计数. 他上网搜索后知道了最大容量是一个动态值, 循环计数就是充电次数, 是指电池从满电状态(100%)到完全放电(0%), 再重新充满电的完整充放电次数. 于是他收集并记录了爸爸的手机在使用过程中的循环计数与最大容量的

一组数据（见表格）.

循环计数 x (次)	最大容量 $y(\%)$
200	94
300	91
400	88

10:01

电池健康

电池健康

正常

最大容量

97%

循环计数

100

生产日期

2025 年 1 月

初次使用

2025 年 2 月

- (1) 电池的最大容量随着循环计数的增加而_____（填写增大或减小）；
- (2) 如果 y 是 x 的一次函数，求该一次函数的表达式；
- (3) 根据 (2) 中的函数，回答下列问题：
- ①当循环充电次数为 500 次时，电池最大容量是多少？
- ②电池最大容量每下降 1%，大约经过多少次循环充电？
- ③厂家建议，在实际使用中，当电池最大容量低于 80%时需更换电池. 假设每天的循环计数是 1 次，请你帮小海估算一下，从初次使用算起，大约多少天后建议爸爸更换电池？

【答案】 (1) 减小 (2) $y = -0.03x + 100$

(3) ① 85%；② 34 次；③ 667 天

【解析】

【分析】 (1) 根据表格直接得出结果即可；

(2) 设所求一次函数的表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，利用待定系数法求解即可；

(3) ①将 $x = 500$ ，代入一次函数解析式即可求解；②根据函数解析式得：每下降 1%，减少 0.03 次，列式计算即可；③根据题意建立不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解：根据表格得：电池的最大容量随着循环计数的增加而减小；

【小问 2 详解】

设所求一次函数的表达式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，

$$\text{根据题意得} \begin{cases} 94 = 200k + b \\ 91 = 300k + b \end{cases}$$

$$\text{解二元一次方程组，得} \begin{cases} k = -0.03 \\ b = 100 \end{cases}$$

所以，该一次函数的表达式为 $y = -0.03x + 100$ 。

【小问 3 详解】

①当 $x = 500$ 时， $y = -0.03 \times 500 + 100 = 85$ ，

答：电池最大容量是 85%。

②根据函数解析式得：每下降 1%，减少 0.03 次，

$$\therefore 1 \div 0.03 = 33\frac{1}{3} \approx 34 \text{ (次)};$$

答：大约经过 34 次循环充电。

③ $y = -0.03x + 100 < 80$ ，

$$\text{解得：} x > 666\frac{2}{3}.$$

答：大约 667 天后建议爸爸更换电池。

20. 如图 1，一张平行四边形纸片 $ABCD$ ($AD > AB$)。折叠这张纸片，可以得到对角线 BD ， $\angle ABD$ 、 $\angle BDC$ 的平分线，两条角平分线分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F 。

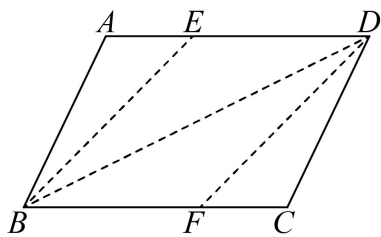


图 1

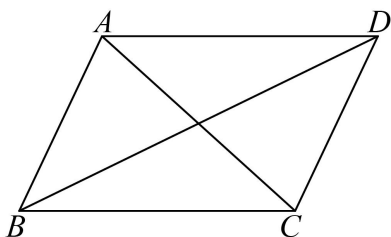
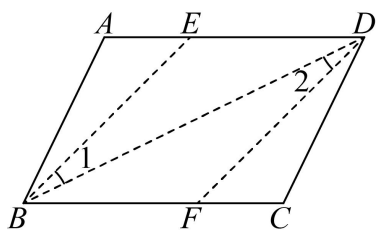


图 2

(1) 证明：四边形 $BEDF$ 是平行四边形；

(2) 你还有哪些方法能折出一个平行四边形？选择一种折法简要描述，在图 2 中画出示意图并说明你的方法是正确的。

【答案】(1) 证明：如图，



$\because$ 平行四边形纸片 $ABCD$,

$\therefore BF \parallel DE, AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABD = \angle BDC$,

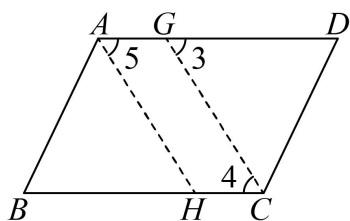
由折叠可得 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle ABD$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle BDC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore BE \parallel DF$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形;

(2) 如图, (方法不唯一)



证明: $\because$ 平行四边形纸片 $ABCD$,

$\therefore \angle BCD = \angle BAD, AG \parallel CH$,

$\therefore \angle 3 = \angle 4$,

由折叠可得 $\angle 4 = \frac{1}{2} \angle BCD$, $\angle 5 = \frac{1}{2} \angle BAD$,

$\therefore \angle 4 = \angle 5$,

$\therefore \angle 3 = \angle 5$,

$\therefore AH \parallel CG$,

$\therefore$ 四边形 $AGCH$ 是平行四边形.

【解析】

【分析】(1) 如图, 由平行四边形的性质得到 $BF \parallel DE$, $AB \parallel CD$, 得到 $\angle ABD = \angle BDC$, 然后结合折叠的性质得到 $\angle 1 = \angle 2$, 推出 $BE \parallel DF$, 即可证明四边形 $BEDF$ 是平行四边形;

(2) 折叠平行四边形纸片 $ABCD$, 可以得到 $\angle BCD$ 、 $\angle BAD$ 的平分线, 两条角平分线分别交 AD 、 BC

于点 G 、 H ，由平行四边形的性质得到 $\angle BCD = \angle BAD$ ， $AG \parallel CH$ ，然后结合折叠的性质得到 $\angle 3 = \angle 5$ ，推出 $AH \parallel CG$ ，即可证明四边形 $AGCH$ 是平行四边形.

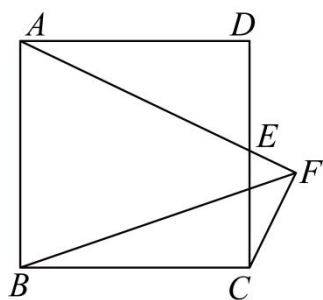
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

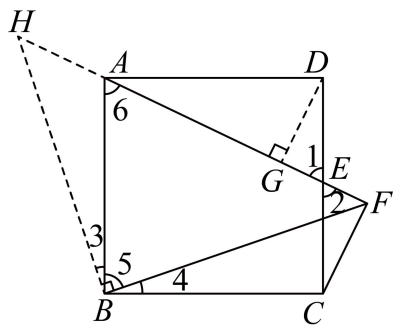
21. 如图，已知正方形 $ABCD$ ， $AB = 4$ ， E 是线段 CD 上一点，过点 C 作 AE 的垂线，垂足为点 F 。



- (1) 如果 E 是线段 CD 的中点，求 CF 的长；
- (2) 连接 BF ，求证： BF 平分 $\angle AFC$ ；
- (3) 设 $BF = x$ ，试用含 x 的代数式表示四边形 $ABCF$ 的面积。

【答案】(1) $CF = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

- (2) 过点 B 作 $BH \perp BF$ ，垂足为点 B ，延长 FA 交 BH 于点 H ，



$$\therefore \angle FBH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 5 = 90^\circ,$$

$\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4,$$

∵ 四边形内角和 360°

$$\therefore \angle 6 + \angle BCF + \angle ABC + \angle CFE = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle 6 + \angle BCF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 6 + \angle BAH = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAH = \angle BCF$$

$$\therefore \triangle ABH \cong \triangle BCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore BH = BF,$$

$$\therefore \angle H = \angle BFH,$$

在 $Rt\triangle BFH$ 中, $\angle H + \angle BFH = 90^\circ$, $\angle H = 45^\circ$,

$$\therefore \angle BFC = \angle CFE - \angle BFH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle BFH,$$

∴ BF 平分 $\angle AFC$;

$$(3) S_{\text{四边形}ABCF} = \frac{1}{2}x^2$$

【解析】

【分析】(1) 过点 D 作 $DG \perp AF$, 垂足为点 G , 根据正方形的性质及全等三角形的判定和性质得出 $\triangle DGE \cong \triangle CFE (\text{AAS})$, $CF = DG$, 再由勾股定理确定 $AE = 2\sqrt{5}$, 利用三角形等面积法即可求解;

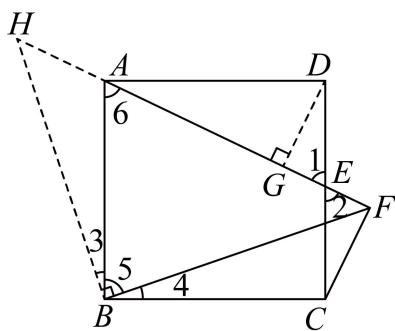
(2) 过点 B 作 $BH \perp BF$, 垂足为点 B , 延长 FA 交 BH 于点 H , 根据正方形的性质及全等三角形的判定和性质得出 $\triangle ABH \cong \triangle BCF (\text{ASA})$, $BH = BF$, $\angle H = \angle BFH$, 确定 $\angle BFC = \angle CFE - \angle BFH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, 即可证明;

(3) 由 (2) 得出 $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BCF}$, 确定 $S_{\text{四边形}ABCF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BFH}$, 结合图形求解即可.

【小问 1 详解】

解: 过点 D 作 $DG \perp AF$, 垂足为点 G ,

$$\therefore \angle DGE = 90^\circ,$$



$\because$ 过点 C 作 AE 的垂线, 垂足为点 F

$$\therefore \angle CFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGE = \angle CFE,$$

$\because E$ 是线段 CD 的中点,

$$\therefore DE = CE = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \triangle DGE \cong \triangle CFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore CF = DG,$$

$\because$ 正方形 $ABCD$

$$\therefore AB = CD = AD = 4, \quad \angle ADE = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AD = 4$, $DE = 2$, $AE^2 = AD^2 + DE^2$,

$$\therefore AE = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times AD \times DE = \frac{1}{2} \times AE \times DG$$

$$\therefore DG = \frac{AD \times DE}{AE} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore CF = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

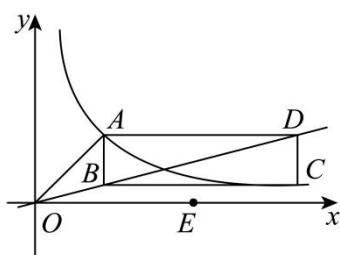
由 (2) $\triangle ABH \cong \triangle BCF$ 得 $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BCF}$,

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BFH},$$

$$\therefore S_{\triangle BFH} = \frac{1}{2} \times BF^2,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCF} = \frac{1}{2}x^2.$$

22. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 图像上, 将点 A 先向下平移至点 B , 再向右平移至图像上另外一点 C , 以 AB 、 BC 为一组邻边作矩形 $ABCD$, 连接 OA 、 OD , 点 E 在 x 轴正半轴上.



(1) 如果 $k = 2$, 且 $\angle AOE = 45^\circ$, 求点 A 的坐标;

(2) 求证: 点 B 在直线 OD 上;

(3) 如果 $OA = \frac{1}{2}BD$, 求证: $\angle DOE = \frac{1}{3}\angle AOE$.

【答案】 (1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(2) 根据题意设点 A 坐标为 $(a, \frac{k}{a})$, 点 C 坐标为 $(b, \frac{k}{b})$,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore B$ 坐标为 $(a, \frac{k}{b})$, 点 D 坐标为 $(b, \frac{k}{a})$,

设直线 OD 的函数表达式为 $y = k_1x (k_1 \neq 0)$, 点 D 在直线 OD 上,

$$\therefore \frac{k}{a} = k_1b,$$

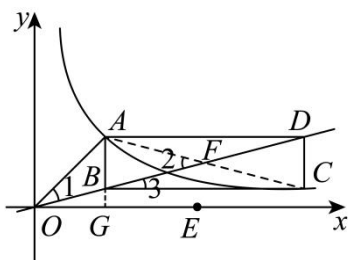
$$\text{解得 } k_1 = \frac{k}{ab},$$

$\therefore$ 直线 OD 的函数表达式为 $y = \frac{k}{ab}x$,

$$\text{当 } x = a \text{ 时, } y = \frac{k}{ab} \times a = \frac{k}{b},$$

$\therefore$ 点 B 在直线 OD 上

(3) 连接 AC 交 BD 于点 F ,



∵ 矩形 $ABCD$

$$\therefore AC = BD,$$

$$\therefore AF = CF = \frac{1}{2}AC = BF = DF = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = AF, \quad BF = CF,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \quad \angle 3 = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 + \angle BCF = 2\angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = 2\angle 3,$$

由题意得 $BC \parallel OE$,

$$\therefore \angle 3 = \angle DOE,$$

$$\therefore \angle AOE = 3\angle DOE,$$

$$\therefore \angle DOE = \frac{1}{3}\angle AOE.$$

【解析】

【分析】(1) 延长 AB 交 x 轴于点 G , 根据题意得出 $AB \parallel y$ 轴, $BC \parallel x$ 轴, 确定 $AG \perp x$ 轴, 再由等腰直角三角形的判定和性质得出 $AG = OG$, 设点 A 坐标为 (m, m) , 它在反比例函数图像上, 代入函数解析式求解即可;

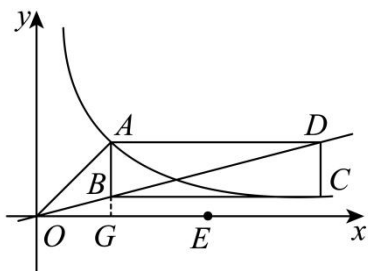
(2) 根据题意设点 A 坐标为 $(a, \frac{k}{a})$, 点 C 坐标为 $(b, \frac{k}{b})$, 得出 B 坐标为 $(a, \frac{k}{b})$, 点 D 坐标为 $(b, \frac{k}{a})$,

设直线 OD 的函数表达式为 $y = k_1x$ ($k_1 \neq 0$), 确定直线 OD 的函数表达式为 $y = \frac{k}{ab}x$, 将点 B 代入即可判断;

(3) 连接 AC 交 BD 于点 F , 根据矩形的性质得出 $AF = CF = \frac{1}{2}AC = BF = DF = \frac{1}{2}BD$, 确定 $OA = AF$, $BF = CF$, 再由等边对等角得出 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle BCF$, 利用三角形外角的性质及等量代换得出 $\angle 1 = 2\angle 3$, 再由平行线的性质结合图形即可证明.

【小问 1 详解】

解：延长 AB 交 x 轴于点 G ，如图所示：



$\therefore$ 将点 A 先向下平移至点 B ，再向右平移至图像上另外一点 C ，以 AB 、 BC 为一组邻边作矩形 $ABCD$ ，

$\therefore AB \parallel y$ 轴， $BC \parallel x$ 轴，

$\therefore AG \perp x$ 轴，

$\therefore \angle AOE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOE = \angle OAG = 45^\circ$ ，

$\therefore AG = OG$ ，

设点 A 坐标为 (m, m) ，它在反比例函数图像上，

$$\therefore m = \frac{2}{m},$$

解得 $m = \sqrt{2}$ （负数舍去），

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ；

【小问 2 详解】

略.

【小问 3 详解】

略.

23. 装修师傅在铺设瓷砖时，需要将一块矩形瓷砖 $ABCD$ （如图 1）切割成相同的两部分，然后拼接成一块组合瓷板（如图 2），其中 $AM = CN$ ， $BN = DM$ ， $\angle AMN = \angle CNM = 30^\circ$ ．已知 $AB = 80\text{cm}$ ， $AD = 240\text{cm}$ ．试在图 1 中作出符合要求的切割线 MN （其中点 M 在边 AD 上，点 N 在边 BC 上）．

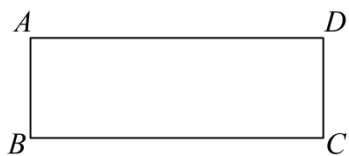


图1

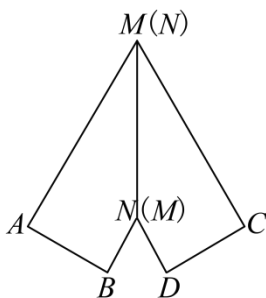


图2

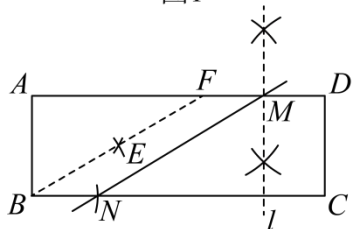


图3

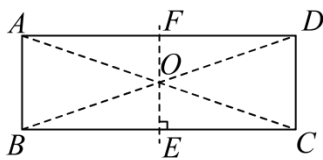


图4

下面是两种不同的解决方法.

方法一: 如图 3,

- ①分别以点 A 、 B 为圆心, 以 AB 的长为半径作弧, 两弧交于点 E , 连接 BE 并延长交 AD 于点 F ;
- ②作线段 DF 的垂直平分线 l , 交 AD 于点 M ;
- ③在边 BC 上截取 $BN = FM$, 作直线 MN .

方法二: 如图 4,

- ①连接 AC 、 BD 交于点 O ;
- ②过点 O 作 $EF \perp BC$, 分别交 BC 、 AD 于点 E 、 F ;

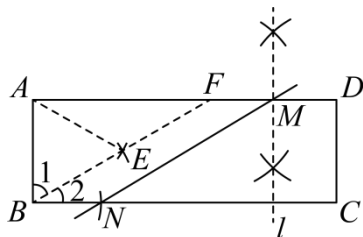
...

根据以上描述, 解决下列问题.

- (1) 图 3 中, $BN = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$;
- (2) 根据方法一的作图过程, 请说明图 3 中的直线 MN 符合要求;
- (3) 在图 4 的基础上, 进一步完善方法二, 用尺规作图作出过点 O 的直线 MN (作出一条即可, 保留作图痕迹, 并写出作法的前继步骤).

【答案】 (1) $120 - 40\sqrt{3}$

(2) 连接 AE ,



由作法①可得等边 $\triangle ABE$,

$$\therefore \angle 1 = 60^\circ,$$

由作法②可得 $MD = FM$,

由作法③可得 $BN = FM$,

$$\therefore BN = DM,$$

由矩形 $ABCD$ 可得 $\angle ABC = 90^\circ$, $BN \parallel MF$, $AD = BC$,

$$\therefore AD - DM = BC - BN, \quad \angle 2 = \angle ABC - \angle 1 = 30^\circ,$$

$$\therefore AM = CN,$$

$$\therefore BN \parallel FM, \quad BN = FM,$$

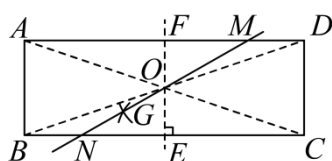
$\therefore$ 四边形 $BFMN$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle AMN = \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AMN = \angle CNM = 30^\circ,$$

$\therefore$ 直线 MN 符合要求.

(3) 如图:



作法:

①连接 AC 、 BD 交于点 O ;

②过点 O 作 $EF \perp BC$, 分别交 BC 、 AD 于点 E 、 F ;

③分别以点 E 、 O 为圆心, 以 OE 的长为半径作弧, 两弧交于点 G ;

④连接 OG 并延长, 分别交 AD 、 BC 于点 M 、 N ;

所以直线 MN 就是所求的直线.

【解析】

【分析】(1) 连接 AE , 由作图可得 $\triangle ABE$ 为等边三角形, 则 $\angle ABE = 60^\circ$, $AB = AE = BE = 80\text{cm}$, 求出 $AF = 80\sqrt{3}\text{cm}$, 从而可得 $DF = (240 - 80\sqrt{3})\text{cm}$, 再求出 $FM = (120 - 40\sqrt{3})\text{cm}$, 即可得出结果;

(2) 连接 AE , 由作法①可得等边 $\triangle ABE$, 则 $\angle 1 = 60^\circ$, 由作法②可得 $MD = FM$, 由作法③ $BN = FM$, 则 $BN = DM$, 证明四边形 $BFMN$ 平行四边形, 得出 $\angle AMN = \angle CNM = 30^\circ$, 即可得出结果;

(3) 根据题意补全作法即可.

【小问1详解】

解：如图：连接 AE ，

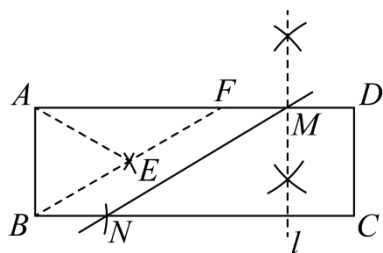


图3

由作图可得 $\triangle ABE$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle ABE = 60^\circ, \quad AB = AE = BE = 80\text{cm},$$

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ - \angle ABE = 30^\circ,$$

$$\therefore BF = 2AB = 160\text{cm},$$

$$\therefore AF = \sqrt{BF^2 - AB^2} = 80\sqrt{3}\text{cm},$$

$$\therefore DF = AD - AF = 240 - 80\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$\therefore$ 作线段 DF 的垂直平分线 l ，交 AD 于点 M ；

$$\therefore FM = \frac{1}{2}DF = 120 - 40\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore BN = FM = \frac{1}{2}DF = 120 - 40\sqrt{3}(\text{cm});$$

【小问 2 详解】

略；

【小问 3 详解】

略