

2025 学年第二学期 期末练习

八年级 数学学科

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 在平面直角坐标系中, 点 $A(-2, -3)$ 所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】本题根据平面直角坐标系中各象限内点的坐标符号特征, 即可判断点 A 所在象限.

【详解】解: $\because$ 平面直角坐标系中各象限点的坐标符号特点为: 第一象限 $(+, +)$, 第二象限 $(-, +)$, 第三象限 $(-, -)$, 第四象限 $(+, -)$,

又 $\because$ 点 $A(-2, -3)$ 的横纵坐标都为负数, 符合第三象限点的坐标特征,

$\therefore$ 点 A 在第三象限.

2. 在平面直角坐标系中, 经过点 $(-1, 3)$ 且平行于 y 轴的直线可记为 ()

- A. 直线 $x = -1$ B. 直线 $y = -1$ C. 直线 $x = 3$ D. 直线 $y = 3$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行于 y 轴的直线的横坐标相同, 即可得出结果.

【详解】解: $\because$ 在平面直角坐标系中, 平行于 y 轴的直线上所有点的横坐标相等,

又 $\because$ 直线经过点 $(-1, 3)$, 该点横坐标为 -1 ,

$\therefore$ 该直线可记为 $x = -1$.

3. 已知点 $A(x_1, -100)$ 、 $B(x_2, -1)$ 、 $C(x_3, 10)$ 是一次函数 $y = -3x + b$ 图象上的三点, 则在 x_1 、 x_2 、 x_3 中最大的数是 ()

- A. x_1 B. x_2 C. x_3 D. 以上均有可能

【答案】A

【解析】

【分析】先根据一次函数的比例系数判断函数增减性，再根据三点纵坐标的大小比较横坐标的大小即可.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = -3x + b$ 中，比例系数 $k = -3 < 0$,

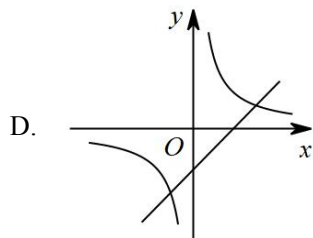
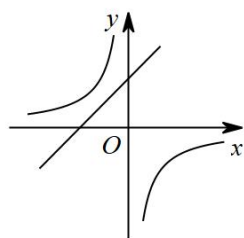
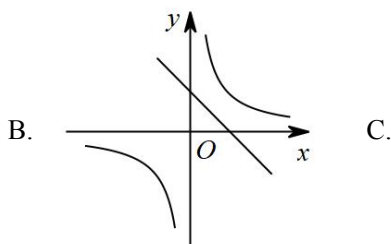
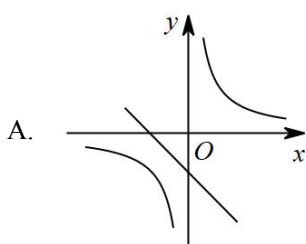
$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，即纵坐标 y 越小，对应的横坐标 x 越大，

比较三点的纵坐标可得： $-100 < -1 < 10$,

$\therefore$ 对应横坐标的大小关系为： $x_1 > x_2 > x_3$,

$\therefore x_1$ 是三个数中最大的数.

4. 在同一平面直角坐标系中，函数 $y = ax + b$ 与 $y = \frac{b}{ax}$ (其中 a, b 是常数， $ab \neq 0$) 的大致图象是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】根据 a, b 的取值分类讨论即可.

【详解】解：若 $a < 0, b < 0$,

则 $y = ax + b$ 经过二、三、四象限，反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于一、三象限，故 A 选项符合题意；

若 $a < 0, b > 0$,

则 $y = ax + b$ 经过一、二、四象限，反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于二、四象限，故 B 选项不符合题意；

若 $a > 0, b > 0$,

则 $y = ax + b$ 经过一、二、三象限，反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于一、三象限，故 C 选项不符合题意；

若 $a > 0, b < 0$,

则 $y = ax + b$ 经过一、三、四象限，反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于二、四象限，故 D 选项不符合题意.

故选: A.

【点睛】此题考查的是反比例函数和一次函数的图像及性质，掌握系数 a , b 与反比例函数和一次函数的图像的关系是解决此题的关键.

5. 在清明祭英烈活动中，某中学组织学生代表，前往上海一大会址参与研学活动. 队伍从学校出发，乘坐大巴匀速行驶 35 分钟后抵达纪念馆，随即在馆内聆听“南陈北李相约建党”的历史渊源，历时 50 分钟. 讲解结束后，师生换乘车辆按原路匀速返程，因返程高峰，行驶时间比去程多了 20 分钟. 设师生队伍离校的时间为 x 分钟，离学校的距离为 y 米，那么下列图象能大致反映 y 与 x 关系的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】分三个部分：第一部分从学校出发前往纪念馆，第二部分在纪念馆内聆听“南陈北李相约建党”的历史渊源，第三部分从纪念馆返回学校，得出每个部分 y 随 x 的变化情况，结合函数图象可得答案.

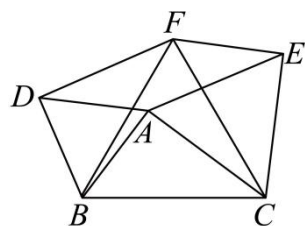
【详解】解：整个函数图象可以分为三部分：第一部分从学校出发前往纪念馆，此时 y 随 x 的增大而增大；第二部分在纪念馆内聆听“南陈北李相约建党”的历史渊源，此时 y 不发生变化；

第三部分从纪念馆返回学校，此时 y 随 x 的增大而减小，且变化的速度比第一部分的慢；

$\therefore$ 四个函数图象中，只有 A 选项中的函数图象符合题意；

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $BC = 5$ ， $\triangle ABD$ ， $\triangle ACE$ ， $\triangle BCF$ 都是等边三角形，下列结论中：① $AB \perp AC$ ；② $\triangle DBF \cong \triangle ABC$ ；③ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形；④ $\angle DFE = 110^\circ$ ；

⑤ $S_{\text{四边形}AEFD} = 5$. 正确的个数是 ()



A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 由 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ，得出 $\angle BAC = 90^\circ$ ，故①正确；再由 SAS 证得 $\triangle ABC \cong \triangle DBF$ ，得 $AC = DF = AE = 4$ ，同理 $\triangle ABC \cong \triangle EFC$ (SAS)，得 $AB = EF = AD = 3$ ，则四边形 $AEFD$ 是平行四边形，故②③正确；然后由平行四边形的性质得 $\angle DFE = \angle DAE = 150^\circ$ ，则④错误；最后求出 $S_{\square AEFD} = 6$ ，故⑤错误；即可得出答案.

【详解】 解： $\because AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $BC = 5$ ，

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$

$\therefore AB \perp AC$ ，故①正确；

$\because \triangle ABD$ ， $\triangle ACE$ 都是等边三角形

$$\therefore \angle DAB = \angle EAC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DAE = 150^\circ$$

$\because \triangle ABD$ 和 $\triangle FBC$ 都是等边三角形

$$\therefore BD = BA, BF = BC, \angle DBF + \angle FBA = \angle ABC + \angle ABF = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DBF = \angle ABC$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBF$ 中

$$\begin{cases} AB = DB \\ \angle ABC = \angle DBF \\ BC = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBF$ (SAS)，故②正确；

$$\therefore AC = DF = AE = 4$$

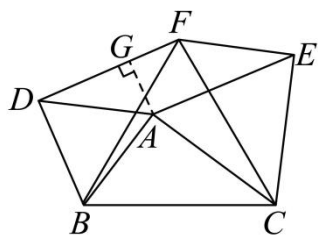
同理可证： $\triangle ABC \cong \triangle EFC$ (SAS)

$$\therefore AB = EF = AD = 3$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，故③正确；

$$\therefore \angle DFE = \angle DAE = 150^\circ, \text{ 故④错误；}$$

过 A 作 $AG \perp DF$ 于 G ，如图所示：



则 $\angle AGD = 90^\circ$

$\because$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形

$$\therefore \angle FDA = 180^\circ - \angle DFE = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore S_{\square AEFD} = DF \cdot AG = 4 \times \frac{3}{2} = 6, \text{ 故⑤错误.}$$

综上所述, 正确的是①②③, 共 3 个.

故选: B

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、勾股定理的逆定理、全等三角形的判定与性质、等边三角形的性质、含 30° 角的直角三角形的性质等知识, 熟练掌握平行四边形的判定与性质, 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DBF$ 是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 若正多边形的一个内角比它的一个外角大 36° , 则这个多边形的边数为_____.

【答案】

5

【解析】

【分析】根据多边形内角与相邻外角互补列方程求出外角度数, 再利用任意多边形外角和为 360° 即可求出边数.

【详解】解: 设这个正多边形的一个内角为 x° , 则相邻外角为 $(x-36)^\circ$.

由多边形内角与相邻外角和为 180° , 得:

$$x + (x - 36) = 180$$

解得: $x = 108$

则外角为 $108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

$\because$ 任意多边形的外角和为 360° , 正多边形各外角相等,

$\therefore$ 该多边形边数为 $360^\circ \div 72^\circ = 5$.

8. 直角三角形斜边长为 30, 则这个三角形重心到直角顶点的距离为_____.

【答案】

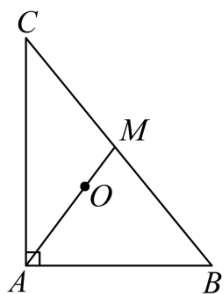
10

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形重心的性质，直角三角形斜边中线的性质，熟练掌握是解题关键.

根据直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半得出 $AM = \frac{30}{2} = 15$ ，再依据三角形重心的性质，重心到顶点的距离是中线长的 $\frac{2}{3}$ 即可求解.

【详解】 解：在直角三角形中，斜边上的中线长为 $AM = \frac{30}{2} = 15$ ，



$\therefore$ 重心到直角顶点的距离为该中线长的 $\frac{2}{3}$ ，即 $\frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \times 15 = 10$ ，

故答案为：10.

9. 直线 $y = 5 - 2x$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 令 $x = 0$ 时求出 y 值，即可得出答案.

【详解】 解：当 $x = 0$ 时， $y = 5$ ，

所以直线 $y = 5 - 2x$ 在 y 轴上的截距是 5.

10. 将直线 $y = 5x - 3\sqrt{3}$ 向上平移 3 个单位，得到的直线的解析式是_____.

【答案】 $y = 5x - 3\sqrt{3} + 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象的平移问题，根据“上加下减，左减右加”的平移规律求解即可.

【详解】 解：将直线 $y = 5x - 3\sqrt{3}$ 向上平移 3 个单位，得到的直线的解析式是 $y = 5x - 3\sqrt{3} + 3$ ，

故答案为： $y = 5x - 3\sqrt{3} + 3$.

11. 已知 $y = (m+3)x^{m^2-8}$ 是正比例函数, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据正比例函数的定义可得.

【详解】 由正比例函数的定义可得: $m+3 \neq 0$, $m^2-8=1$,

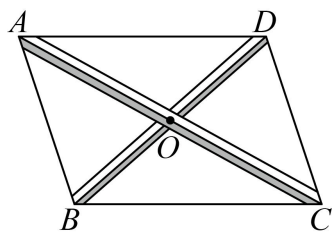
则 $m=3$.

故填 3.

【点睛】 解题关键是掌握正比例函数的定义条件, 正比例函数 $y=kx$ 的定义条件是: k 为常数且 $k \neq 0$, 自变量次数为 1.

12. 小玲的爸爸在制作平行四边形框架时, 采用了一种方法: 如图所示, 将两根木条法: 如图所示, 将两根木条 AC , BD 的中点重叠并用钉子固定, 则四边形 $ABCD$ 就是平行四边形. 这种方法的依据是

_____.



【答案】 对角线互相平分的四边形是平行四边形

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行四边形的判定. 根据对角线互相平分的四边形是平行四边形解答即可.

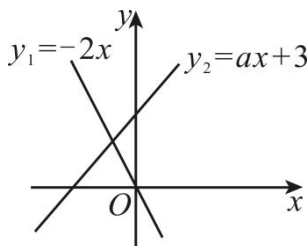
【详解】 解: $\because$ 木条 AC , BD 的中点 O 重叠,

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (对角线互相平分的四边形是平行四边形).

故答案为: 对角线互相平分的四边形是平行四边形

13. 如图, 函数 $y_1 = -2x$ 与 $y_2 = ax + 3$ 的图象相交于点 $A(-1, 2)$, 则当 $y_1 < y_2$ 时, x 的取值范围是_____.



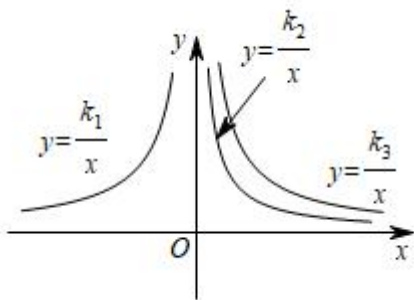
【答案】 $x > -1$

【解析】

【详解】解：观察图象可知，当 $x > -1$ 时，函数 $y_1 = -2x$ 的图象位于函数 $y_2 = ax + 3$ 的图象下方，

$\therefore$ 当 $y_1 < y_2$ 时， x 的取值范围是 $x > -1$.

14. 如图所示是三个反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 、 $y = \frac{k_2}{x}$ 、 $y = \frac{k_3}{x}$ 的图象，由此观察得到 k_1 、 k_2 、 k_3 的大小关系是_____（用“ $<$ ”连接）.



【答案】 $k_1 < k_2 < k_3$

【解析】

【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特点可得 $k=xy$ ，进而可分析 k_1 、 k_2 、 k_3 的大小关系.

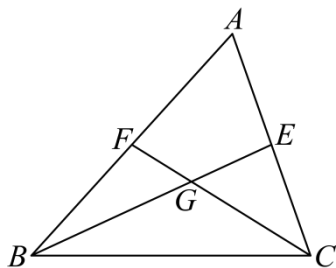
【详解】解：读图可知：反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图象在第二象限，故 $k_1 < 0$ ；

$y = \frac{k_2}{x}$ ， $y = \frac{k_3}{x}$ 在第一象限；且 $y = \frac{k_3}{x}$ 的图象距原点较远，故有： $k_1 < k_2 < k_3$ ；

故答案为 $k_1 < k_2 < k_3$.

【点睛】本题考查反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象是双曲线，当 $k > 0$ 时，它的两个分支分别位于第一、三象限；当 $k < 0$ 时，它的两个分支分别位于第二、四象限. 且图象距原点越远， k 的绝对值越大.

15. 如图， $\triangle ABC$ 的中线 BE 、 CF 相交于点 G ，已知 $S_{\triangle ABC} = 24$ ， $BC = 8$ ，则点 G 到直线 BC 的距离为_____.

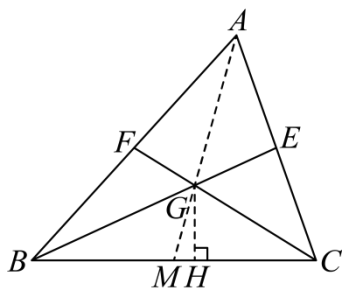


【答案】 2

【解析】

【分析】连接 AG 并延长交 BC 于点 M ，过点 G 作 $GH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，得到 $BG = \frac{2}{3}BE$ ，结合三角形的面积计算即可。

【详解】解：连接 AG 并延长交 BC 于点 M ，过点 G 作 $GH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，



由题意知， $AF = BF$ ， $AE = EC$ ，

$$\therefore S_{\triangle AFG} = S_{\triangle BFG}, S_{\triangle AEG} = S_{\triangle CEG},$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACF},$$

$$\therefore S_{\triangle BFG} = S_{\triangle CEG},$$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = S_{\triangle BFG}, S_{\triangle AEG} = S_{\triangle CEG},$$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = S_{\triangle BFG} = S_{\triangle AEG},$$

$$\therefore S_{\triangle ABG} = 2S_{\triangle AEG},$$

$$\therefore BG = 2EG,$$

$$\therefore BG = \frac{2}{3}BE,$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{2}{3}S_{\triangle BCE},$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

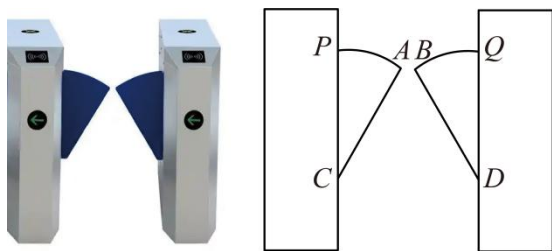
$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{2}{3}S_{\triangle BCE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 24 = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2}BC \cdot GH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 8 \times GH = 8,$$

解得 $GH = 2$ ，即点 G 到直线 BC 的距离为 2。

16. 如图是地铁入口双翼闸机示意图. 已知双翼边缘 $AC = BD = 60\text{cm}$, 与闸机侧立面夹角 $\angle PCA = \angle QDB = 30^\circ$, 双翼展开时端点 A 、 B 的间距为 8cm . 当双翼收起时, 可通过闸机的物体最大宽度为 _____ cm .

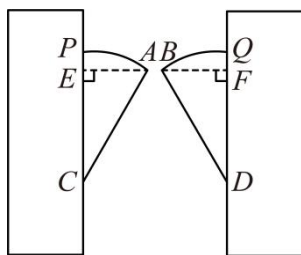


【答案】 68

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AE \perp PC$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp QD$ 于点 F , 求出 AE, BF 的长即可.

【详解】 解: 如图, 过点 A 作 $AE \perp PC$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp QD$ 于点 F ,



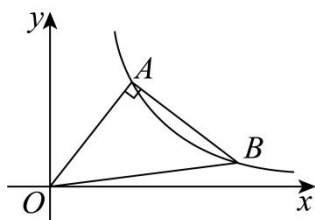
$\because \angle PCA = \angle QDB = 30^\circ, AC = BD = 60\text{cm},$

$\therefore AE = \frac{1}{2}AC = 30\text{cm}, BF = \frac{1}{2}BD = 30\text{cm},$

$\because$ 双翼展开时端点 A 、 B 的间距为 8cm ,

$\therefore$ 当双翼收起时, 可通过闸机的物体最大宽度为 $30 + 8 + 30 = 68(\text{cm})$.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上. 点 A 的坐标为 $(m, 4)$, 连接 OA 、 OB 、 AB . 若 $OA = AB, \angle OAB = 90^\circ$, 则 k 的值为 _____.



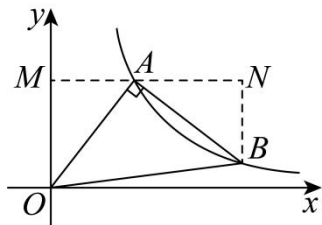
【答案】 $8\sqrt{5} - 8$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 涉及全等三角形的判定与性质等知识, 构造全等三

角形推出点 B 的含有 m 的坐标，利用同一反比例函数上点的坐标之积相等列出关于 m 的方程，解出 m 即可求出 A 的坐标，构造一线三垂直出现全等三角形是本题的突破口。

【详解】解：过点 A 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 M ，过点 B 作 y 轴的平行线交 MA 的延长线于点 N ，如图所示：



$\because$ 点 A 的坐标为 $(m, 4)$,

$\therefore AM = m, OM = 4$,

$\because \angle MOA + \angle MAO = 90^\circ, \angle NAB + \angle MAO = 90^\circ$,

$\therefore \angle MOA = \angle NAB$,

$\because \angle AMO = \angle ANB = 90^\circ, AO = AB$,

$\therefore \triangle AMO \cong \triangle BNA (\text{AAS})$,

$\therefore NB = AM = m, AN = MO = 4$, 则 $MN = MA + AN = m + 4$,

$\therefore B(m + 4, 4 - m)$,

$\because$ 点 $A(m, 4)$ 、 $B(m + 4, 4 - m)$ 都在反比例函数上,

$\therefore 4m = (m + 4)(4 - m)$, 即 $m^2 + 4m - 16 = 0$,

解得 $m_1 = -2 + 2\sqrt{5}$, $m_2 = -2 - 2\sqrt{5}$ (舍去),

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2 + 2\sqrt{5}, 4)$,

$\therefore k = xy = 4(2\sqrt{5} - 2) = 8\sqrt{5} - 8$.

故答案为: $8\sqrt{5} - 8$.

18. 如图 1, 在四边形纸片 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $AB = AD$, $CB = CD$, 若 $\angle BCD = 60^\circ$, $BC = 4\text{cm}$, 现将该纸片沿对角线 AC 折叠, 使点 B 落在点 D 处, 得到双层 $\triangle ACD$ (如图 3), 再沿着过 $\triangle ACD$ 某一顶点的直线将双层三角形剪开, 使得展开后的平面图形中有一个是平行四边形, 则所得的平行四边形的周长为_____.

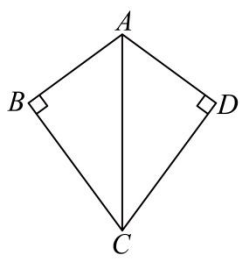


图1

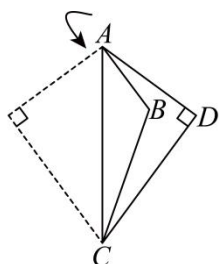


图2

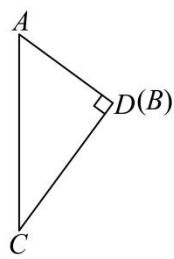


图3

【答案】 $\frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ 或 $\frac{32}{3}\text{cm}$

【解析】

【分析】分两种情形讨论，当直线过点 B (D) 时，四边形 $ABTD$ 是菱形，利用菱形的性质和直角三角形的性质求解；当直线经过点 A 时，四边形 $AECF$ 是菱形，同理求解即可.

【详解】解：有两种情形：

当直线过点 B (D) 时，如图，四边形 $ABTD$ 是菱形，

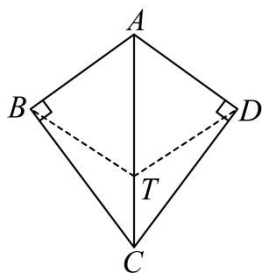


图1-1

$$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, \quad AB = AD, \quad CB = CD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACB \cong \text{Rt}\triangle ACD (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BCD = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $BC = 4\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{所得的平行四边形的周长为 } 4 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3} (\text{cm});$$

当直线经过点 A 时，四边形 $AECF$ 是菱形，连接 EF 交 AC 于 O ，

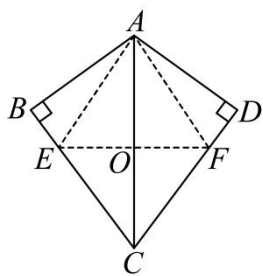


图1-2

$\therefore AC = 2AB = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 四边形 $AECF$ 是菱形,

$\therefore OC = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore EC = \frac{8}{3}$,

$\therefore$ 所得的平行四边形的周长 $= 4 \times \frac{8}{3} = \frac{32}{3}(\text{cm})$.

三、解答题 (本大题共 6 题, 共 58 分)

19. 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$, (k 为常数, $k \neq 1$).

- (1) 若点 $A(1, 2)$ 在这个函数的图象上, 求 k 的值;
- (2) 若在这个函数图象的每一分支上, y 随 x 的增大而增大, 求 k 的取值范围;
- (3) 若 $k=13$, 试判断点 $B(3, 4)$, $C(2, 5)$ 是否在这个函数的图象上, 并说明理由.

【答案】 (1) $k=3$; (2) $k < 1$; (3) 不在; 理由见解析.

【解析】

【分析】 (1) 把点 A 的坐标代入函数解析式, 利用待定系数法求解即可;

(2) 根据反比例函数图象的性质得到: $k-1 < 0$, 由此求得 k 的取值范围;

(3) 把点 B 、 C 的坐标代入函数解析式进行一一验证.

【详解】 解: (1) $\because$ 点 $A(1, 2)$ 在这个函数的图象上,

$$\therefore k-1=1 \times 2,$$

解得 $k=3$;

(2) $\because$ 在函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 图象的每一支上, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore k-1 < 0,$$

解得 $k < 1$;

(3) $\because k=13$, 有 $k-1=12$,

∴反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$.

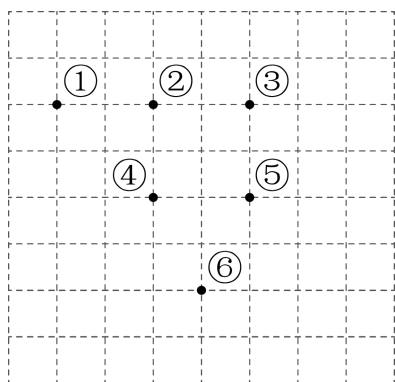
将点 B 的坐标代入 $y = \frac{12}{x}$, 可知点 B 的坐标满足函数关系式,

∴点 B 在函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上,

将点 C 的坐标代入 $y = \frac{12}{x}$, 由 $5 \neq \frac{12}{2}$, 可知点 C 的坐标不满足函数关系式,

∴点 C 不在函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上.

20. 近年来, 依托红色革命、古代传统文化、绿色生态和蓝色水域等资源, 某地发展成为红色旅游风景区. 其中 6 个展馆最有特色, 分别是: ①抗日战争纪念馆; ②支前纪念馆; ③治水陈列馆; ④村史档案馆; ⑤民俗馆; ⑥进士府, 各展馆的大致位置如图所示, 请建立合适的平面直角坐标系, 使①号展馆位于点 $(-3, 1)$, ⑤号展馆位于点 $(1, -1)$.



(1) 在图中画出建立的平面直角坐标系;

(2) 在建立的平面直角坐标系中,

②号展馆的坐标是_____; ③号展馆的坐标是_____;

④号展馆的坐标是_____; ⑥号展馆的坐标是_____.

【答案】 (1) 见解析 (2) $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(0, -3)$

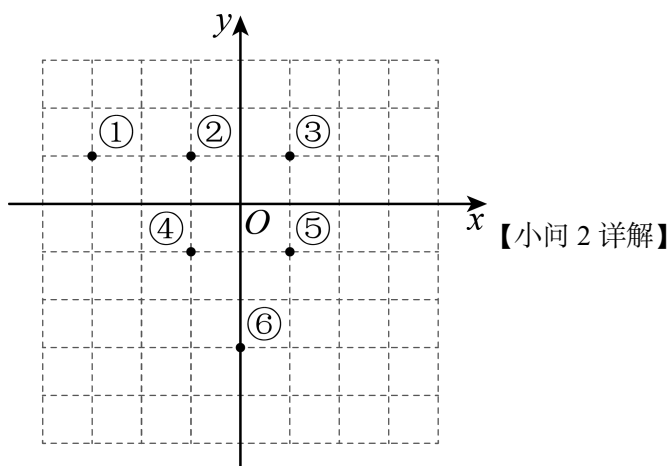
【解析】

【分析】 (1) 根据题意建立平面直角坐标系即可;

(2) 根据所建的平面直角坐标系写出各点的坐标即可.

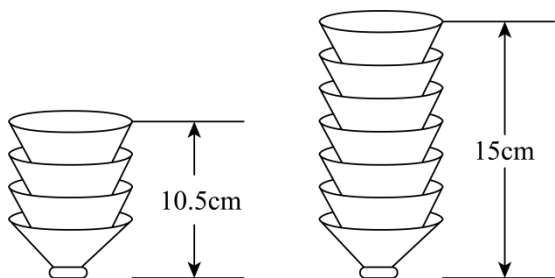
【小问 1 详解】

解: 所作平面直角坐标系如图所示:



解：由图可知，②号展馆的坐标是 $(-1,1)$ ，③号展馆的坐标是 $(1,1)$ ，④号展馆的坐标是 $(-1,-1)$ ，⑥号展馆的坐标是 $(0,-3)$ 。

21. 如图，两摞相同规格的饭碗整齐地叠放在桌面上，小凡测量后得到图中给的数据信息，请你帮他解答下列问题：



(1) 像这样规格的饭碗整齐地叠放在桌面上时，求一摞饭碗的高度 y (cm) 与饭碗数 x (个) 之间的函数解析式；

(2) 如果把图中这两摞饭碗整齐地摆放成一摞，这摞饭碗的高度是多少 cm？

(3) 如果一摞饭碗的高度超过 20cm 时容易发生侧翻，请问一摞最多能放多少个碗？

【答案】 (1) $y = 1.5x + 4.5$

(2) 21cm

(3) 10 个

【解析】

【分析】 (1) 先通过两组数据算出每增加 1 个碗，高度增加 1.5cm，据此列出 y 与 x 的关系式；

(2) 计算 $x = 11$ 时的函数值即可；

(3) 根据题意建立不等式，求 x 的最大整数解即可；

【小问 1 详解】

解：7 只碗比 4 只碗多 3 只，高度增加 $15 - 10.5 = 4.5\text{cm}$ ，

每多叠 1 只碗，加高 $4.5 \div 3 = 1.5\text{cm}$ ，

$$\therefore y = 10.5 + 1.5(x - 4) = 1.5x + 4.5.$$

【小问 2 详解】

解：当 $x = 4 + 7 = 11$ 时， $y = 1.5 \times 11 + 4.5 = 21$ 。

答：这摞饭碗的高度是 21cm 。

【小问 3 详解】

解：根据题意，得 $1.5x + 4.5 \leq 20$ ，

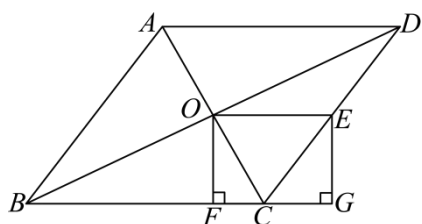
$$\text{解得 } x \leq 10\frac{1}{3}.$$

$\because x$ 为整数，

$\therefore$ 最大整数解为 10，

答：一摞最多能放 10 个碗。

22. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， E 是 CD 边的中点，连接 OE 。过点 O ， E 作直线 BC 的垂线，垂足分别为 F ， G 。



(1) 求证：四边形 $OEGF$ 是矩形；

(2) 若四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC = 6$ ， $BD = 8$ ，则矩形 $OEGF$ 的面积为_____。

【答案】(1) 详见解析

(2) 6

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定及性质、矩形的判定及性质、菱形的性质、勾股定理、三角形的面积计算，熟练掌握以上知识点是解题的关键。

(1) 根据平行四边形的性质得到 $BO = DO$ ，由 E 是 CD 边的中点可得 $DE = CE$ ，根据三角形中位线定理得到 $OE \parallel BC$ ，即 $OE \parallel FG$ ，进而推出四边形 $OEGF$ 是平行四边形，根据矩形的判定定理得到结论；

(2) 根据菱形的性质得到 $AC \perp BD$ ，求得 $\angle BOC = \angle COD = 90^\circ$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4$ ， $OC = \frac{1}{2}AC = 3$ ，由勾股定理求出 $BC = CD = 5$ ，根据三角形面积公式得到 $OF = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$ ，

根据矩形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because OF \perp BC, EG \perp BC,$

$\therefore OF \parallel EG, \angle OFG = 90^\circ,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BO = DO,$

$\because E$ 是 CD 边的中点,

$\therefore DE = CE,$

$\therefore OE$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

$\therefore OE \parallel BC$, 即 $OE \parallel FG$,

$\therefore$ 四边形 $OEGF$ 是平行四边形,

$\because \angle OFG = 90^\circ,$

$\therefore$ 平行四边形 $OEGF$ 是矩形;

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 6, BD = 8,$

$\therefore AC \perp BD,$

$\therefore \angle BOC = \angle COD = 90^\circ, OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4, OC = \frac{1}{2}AC = 3,$

$\therefore BC = CD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$

$\because E$ 是 CD 边的中点,

$\therefore OE = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2},$

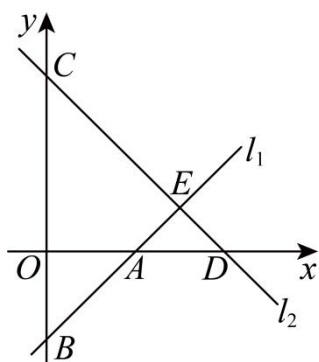
$\because OF \perp BC,$

$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot OF = \frac{1}{2}OB \cdot OC,$

$\therefore OF = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5},$

$\therefore$ 矩形 $OEGF$ 的面积 $= OE \cdot OF = \frac{5}{2} \times \frac{12}{5} = 6.$

23. 如图, 已知直线 $l_1: y = kx - 2$ 与直线 $y = x$ 平行, 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B . 直线 l_2 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$, 与 x 轴交于点 D , 与直线 l_1 交于点 $E(3, m)$.



- (1) 求直线 l_2 对应的函数表达式;
- (2) 求四边形 $AOCE$ 的面积;
- (3) 点 F 是线段 CE 的一个动点, 连接 OF , 若线段 OF 将四边形 $AOCE$ 的面积分成 $1:2$ 的两部分, 请求出点 F 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x + 4$

(2) 7

(3) $F\left(\frac{7}{6}, \frac{17}{6}\right)$ 或 $F\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 三角形的面积, 求得交点坐标是解题的关键.

(1) 由直线 $l_1: y = kx - 2$ 与直线 $y = x$ 平行, 得到直线 l_1 为 $y = x - 2$, 进而求得 E 的坐标, 然后根据待定系数法即可求得直线 l_2 对应的函数表达式;

(2) 根据两直线的解析式求得 A 、 D 的坐标, 然后根据 $S_{\text{四边形}AOCE} = S_{\triangle COD} - S_{\triangle AED}$ 求解即可.

(3) 由题意得 $S_{\triangle CFO} = \frac{1}{3} S_{\text{四边形}AOCE} = \frac{7}{3}$ 或 $S_{\triangle CFO} = \frac{2}{3} S_{\text{四边形}AOCE} = \frac{14}{3}$, 设 $F(m, -m + 4)$, 再由三角形面积公式求解 m , 即可求出坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $l_1: y = kx - 2$ 与直线 $y = x$ 平行,

$\therefore k = 1$,

$\therefore$ 直线 l_1 为 $y = x - 2$,

$\because$ 点 $E(3, m)$ 在直线 l_1 上,

$\therefore m = 3 - 2 = 1$,

$$\therefore E(3,1),$$

设直线 l_2 的解析式为 $y = ax + b$,

把 $C(0,4)$, $E(3,1)$ 代入得:

$$\begin{cases} b = 4 \\ 3a + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 l_2 的解析式为 $y = -x + 4$;

【小问 2 详解】

解: 在直线 $l_1: y = x - 2$ 中, 令 $y = 0$, 则 $x - 2 = 0$,

解得: $x = 2$,

$$\therefore A(2,0),$$

在直线 $l_2: y = -x + 4$ 中, 令 $y = 0$, 则 $-x + 4 = 0$,

解得: $x = 4$,

$$\therefore D(4,0),$$

$$\therefore AD = 4 - 2 = 2, \quad OD = 4,$$

$$\therefore C(0,4),$$

$$\therefore OC = 4,$$

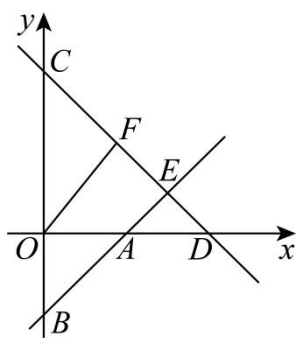
$$\therefore S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8, \quad S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AD \cdot y_E = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AOCE} = S_{\triangle COD} - S_{\triangle AED} = 8 - 1 = 7.$$

故四边形 $AOCE$ 的面积是 7.

【小问 3 详解】

解: 如图,



∵ 线段 OF 将四边形 $AOCE$ 的面积分成 $1:2$ 的两部分,

$$\therefore S_{\triangle CFO} = \frac{1}{3} S_{\text{四边形}AOCE} = \frac{7}{3} \text{ 或 } S_{\triangle CFO} = \frac{2}{3} S_{\text{四边形}AOCE} = \frac{14}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} OC \times x_F = \frac{7}{3} \text{ 或 } \frac{1}{2} OC \times x_F = \frac{14}{3};$$

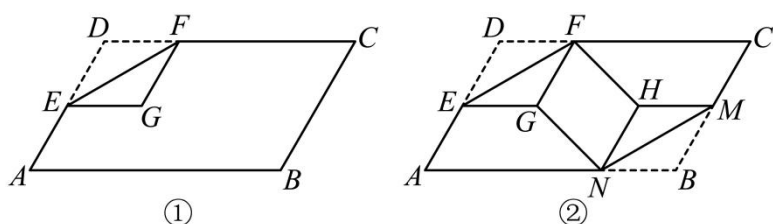
设 $F(m, -m+4)$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times m = \frac{7}{3} \text{ 或 } \frac{1}{2} \times 4 \times m = \frac{14}{3},$$

$$\therefore m = \frac{7}{6} \text{ 或 } m = \frac{7}{3},$$

$$\therefore F\left(\frac{7}{6}, \frac{17}{6}\right) \text{ 或 } F\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

24. 【问题背景】在学习了平行四边形后, 某兴趣小组研究了一个内角为 60° 的平行四边形的折叠问题. 其探究过程如下:



(1) 如图①, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB > AD$, E 为 AD 边的中点, 点 F 在边 DC 上, $DF = DE$, 连接 EF , 将 $\triangle DEF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle GEF$, 点 D 的对称点为点 G , 小组成员发现四边形 $DEGF$ 是一个特殊的四边形, 请判断四边形 $DEGF$ 的形状为 _____;

【探究证明】

(2) 在 (1) 的条件下, 取 BC 的中点 M , 点 N 在边 AB 上, 且 $BN = BM$, 连接 MN , 将 $\triangle BMN$ 沿 MN 翻折得到 $\triangle HMN$, 点 B 的对称点为点 H , 连接 FH 、 GN , 如图②, 求证: 四边形 $GFHN$ 是平行四边形;

【探究提升】

(3) 在 (1) (2) 的条件下, 若四边形 $GFHN$ 为轴对称图形, 请直接写出 $\frac{AD}{AB}$ 的值为_____.

【答案】(1) 菱形 (2) 证明见解析

(3) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由折叠的性质结合 $DF = DE$ 可得, $DE = GE = GF = DF$, 由此判定为菱形;

(2) 容易判断四边形 $DEGF$ 也是菱形, 由菱形的性质可得, $BM \parallel NH$, $BM = NH$, $GF \parallel DE$, $GF = DE$, 结合平行四边形的性质和中点的性质可得, $GF \parallel NH$, $GF = NH$, 命题得证;

(3) 分两类讨论, 当四边形 $GFHN$ 为矩形时, 作 $ET \perp AB$ 于点 T , 作 $GK \perp AB$ 于点 K , 设 $AD = BC = 4a$, 由含 30° 角的直角三角形的性质和勾股定理可得可得, $AT = a$, $ET = \sqrt{3}a$, 容易证明四边形 $ETKG$ 是矩形, 则 $GK = ET = \sqrt{3}a$, $EG = TK = 2a$. 由矩形的性质可得, $\angle GNH = 90^\circ$, 则 $\angle GKN = 30^\circ$, 从而得到 $KN = 3a$, 进一步计算出 $AB = 8a$, 因此 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$; 当四边形 $GFHN$ 为菱形时, 延长 FG 交 AB 于点 W , 设 $AD = 4a$, 容易判断 $\angle GWN = \angle A = 60^\circ$, $GN = GW = 2a$, 从而判断 $\triangle GWN$ 是等边三角形, 则 $WN = 2a$, 进而计算出 $AB = 6a$, 因此 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$.

【小问 1 详解】

解: 由折叠的性质可得, $DE = GE$, $DF = GF$,

$\therefore DF = DE$,

$\therefore DE = GE = GF = DF$,

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 是菱形;

【小问 2 详解】

证明: 同理 (1) 可得, 四边形 $BMHN$ 是菱形,

$\therefore BM \parallel NH$, $BM = NH$,

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 是菱形,

$\therefore GF \parallel DE$, $GF = DE$,

$\therefore E$ 为 AD 边的中点, M 为 BC 边的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AD$, $BM = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC$, $AD \parallel BC$,

$$\therefore GF \parallel NH, GF = DE = BM = NH,$$

$\therefore$ 四边形 $GFHN$ 是平行四边形;

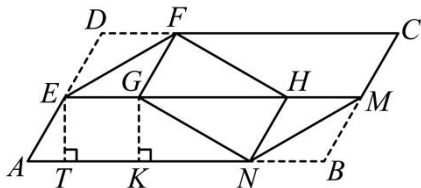
【小问 3 详解】

解: 由 (2) 可知, 四边形 $GFHN$ 是平行四边形,

又 $\because$ 四边形 $GFHN$ 为轴对称图形,

$\therefore$ 四边形 $GFHN$ 为矩形或菱形,

① 当四边形 $GFHN$ 为矩形时, 如图, 作 $ET \perp AB$ 于点 T , 作 $GK \perp AB$ 于点 K , 设 $AD = BC = 4a$,



$\because E$ 为 AD 边的中点, M 为 BC 边的中点,

$$\therefore AE = DE = BM = 2a,$$

$$\because ET \perp AB,$$

$$\therefore \angle ATE = \angle KTE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AET = 180^\circ - \angle ATE - \angle A = 30^\circ,$$

在 $Rt\triangle AET$ 中, $\angle AET = 30^\circ$,

$$\therefore AT = \frac{1}{2} AE = a,$$

由勾股定理可得, $ET = \sqrt{AE^2 - AT^2} = \sqrt{3}a$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 120^\circ, AB \parallel CD,$$

$\because$ 四边形 $DEGF$ 是菱形,

$$\therefore EG \parallel CD \parallel AB, DE = GF = 2a,$$

$$\therefore \angle GET = \angle ATE = 90^\circ,$$

$$\because GK \perp AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ETKG$ 是矩形,

$$\therefore GK = ET = \sqrt{3}a, EG = TK = 2a,$$

$\because$ 四边形 $BMHN$ 是菱形,

$$\therefore BN = BM = 2a, \quad BM \parallel NH,$$

$$\therefore \angle KNH = \angle B = 120^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $GFHN$ 为矩形,

$$\therefore \angle GNH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GKN = \angle KNH - \angle GNH = 30^\circ,$$

在 $Rt\triangle GKN$ 中, $\angle GKN = 30^\circ$,

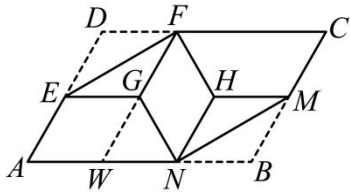
$$\therefore GN = 2GK = 2\sqrt{3}a,$$

由勾股定理可得, $KN = \sqrt{GN^2 - GK^2} = 3a$,

$$\therefore AB = AT + TK + KN + BN = 8a,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{4a}{8a} = \frac{1}{2};$$

②当四边形 $GFHN$ 为菱形时, 如图, 延长 FG 交 AB 于点 W , 设 $AD = 4a$,



由①可知, $AE = DE = BM = BN = 2a$,

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 是菱形,

$$\therefore DE \parallel GF, \quad GE \parallel CD, \quad DE = GE = GF = 2a,$$

$$\therefore \angle GWN = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore AB \parallel GE,$$

$\therefore$ 四边形 $AWGE$ 是平行四边形,

$$\therefore AE = GW = 2a, \quad AW = GE = 2a,$$

$\therefore$ 四边形 $GFHN$ 为菱形,

$$\therefore GF = GN = 2a,$$

$$\therefore GN = GW,$$

$\therefore \triangle GWN$ 是等边三角形,

$$\therefore WN = GW = 2a,$$

$$\therefore AB = AW + WN + BN = 6a,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{4a}{6a} = \frac{2}{3},$$

综上所述, $\frac{AD}{AB}$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$.