

2025-2026 学年八年级数学下学期期末考试

强化卷 · 考试版

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
- 测试范围: 新教材沪教版八年级全册。

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D$ 的值可以是 ()

- A. 1:2:3:4 B. 3:4:4:3 C. 3:3:4:4 D. 3:4:3:4

【答案】D

【详解】解: 根据平行四边形的两组对角分别相等, 可知只有选项 D 正确。

2. 已知正多边形的一个内角为 150° , 则这个多边形是 ()

- A. 正五边形 B. 正六边形 C. 正八边形 D. 正十二边形

【答案】D

【分析】本题考查了正多边形的内角与外角的关系, 先求出正多边形的一个外角是 $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, 再用外角和除以外角即可得到边数, 掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】解: $\because$ 正多边形的一个内角是 150° ,
 $\therefore$ 正多边形的一个外角是 $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$,
 $\therefore$ 这个正多边形的边数为 $360^\circ \div 30^\circ = 12$,
即正多边形是正十二边形,
故选 D.

3. 若点 $P_1(m, -1)$ 关于原点的对称点是 $P_2(4, n)$, 则 $m+n$ 的值是 ().

- A. 1 B. -1 C. 3 D. -3

【答案】D

【分析】根据关于原点对称的点, 它们的横纵坐标互为相反数, 由此得到 m 和 n 的值, 再计算 $m+n$ 即可。

【详解】解：∵点 $P_1(m, -1)$ 和点 $P_2(4, n)$ 关于原点对称，

$$\therefore m = -4, \quad n = 1,$$

$$\therefore m + n = -3.$$

4. 正比例函数 $y = kx$ 的图象经过第一、三象限，则 k 的值可能是 ()

A. -9

B. -3

C. 3

D. -3 或 3

【答案】C

【分析】本题考查正比例函数的图象性质，需根据函数图象经过的象限确定 k 的取值范围，再从选项中选择符合条件的数值即可。

【详解】解：∵正比例函数 $y = kx$ 的图象经过第一、三象限

$$\therefore k > 0$$

观察选项，只有 3 满足 $k > 0$ 的条件。

故选 C.

5. 把点 $P(2a+1, a-3)$ 先向左平移 5 个单位，再向上平移 4 个单位，所得的点 P' 在直线 $y = -x$ 上，则 a 的值为 ()

A. 1

B. 5

C. $-\frac{1}{3}$

D. -11

【答案】A

【分析】本题考查了点的平移，正比例函数的性质。先根据点的平移规律求出平移后点 P' 的坐标，再利用点在直线上则坐标满足直线方程的性质，列方程求解 a 的值。

【详解】解：∵点 $P(2a+1, a-3)$ 向左平移 5 个单位时横坐标减 5，向上平移 4 个单位时纵坐标加 4

$$\therefore \text{平移后点 } P' \text{ 的坐标为 } (2a+1-5, a-3+4), \text{ 即 } (2a-4, a+1)$$

∵点 P' 在直线 $y = -x$ 上

$$\therefore \text{点 } P' \text{ 的横、纵坐标满足 } y = -x, \text{ 即 } a+1 = -(2a-4)$$

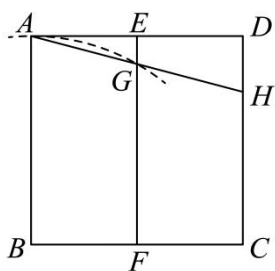
$$\text{去括号得: } a+1 = -2a+4$$

$$\text{移项合并同类项得: } 3a = 3$$

$$\text{解得: } a = 1$$

故选: A.

6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别为边 AD 、 BC 的中点，以点 B 为圆心、 AB 的长为半径画弧交线段 EF 于点 G ，直线 AG 交 CD 于点 H ，如果 $CH = 4$ ，那么正方形的边长为 ()



A. 5

B. $2\sqrt{3}+2$

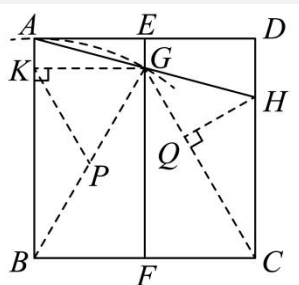
C. $\sqrt{3}+3$

D. $3\sqrt{3}-1$

【答案】B

【分析】过点 G 作 $GK \perp AB$ 于点 K ，设 BG 的中点为 P ，连接 PK ， CG ，过点 H 作 $HQ \perp CG$ 于点 Q ，证明四边形 $ABFE$ ，四边形 $AKGE$ 是矩形，则 $GK = AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BG$ ，根据直角三角形斜边中线性质的 $PK = PG = PB = \frac{1}{2}BG$ ，则 $PK = PG = GK$ ，由此得 $\triangle PGK$ 是等边三角形，进而得 $\angle PGK = 60^\circ$ ， $\angle KBG = 30^\circ$ ， $\angle GBC = 60^\circ$ ，继而得 $\triangle BCG$ 是等边三角形，由此得 $\angle GCH = 30^\circ$ ，则 $HQ = \frac{1}{2}CH = 2$ ， $CQ = 2\sqrt{3}$ ，再求出 $\angle QGH = 45^\circ$ 得 $\triangle GQH$ 是等腰直角三角形，则 $GQ = HQ = 2$ ，进而得 $CG = 2\sqrt{3} + 2$ ，由此即可得出正方形的边长.

【详解】解：如图，过点 G 作 $GK \perp AB$ 于点 K ，设 BG 的中点为 P ，连接 PK ， CG ，过点 H 作 $HQ \perp CG$ 于点 Q ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\because$ 点 E 、 F 分别为边 AD 、 BC 的中点，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$ ， $BF = \frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore AE = BF$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形，

又 $\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

∴ 四边形 $ABFE$ 是矩形,

$$\therefore \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\because GK \perp AB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle AEF = 90^\circ = \angle GKA = \angle GKB,$$

∴ 四边形 $AKGE$ 是矩形,

$$\therefore GK = AE = \frac{1}{2}AB,$$

由作图可知: $BG = AB$,

$$\therefore GK = \frac{1}{2}BG,$$

在 $\text{Rt}\triangle BKG$ 中, 点 P 是 BG 的中点,

$$\therefore PK = \frac{1}{2}BG = PG = PB,$$

$$\therefore PK = PG = GK,$$

∴ $\triangle PGK$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle PGK = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BKG$ 中, $\angle KBG = 90^\circ - \angle PGK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$$\therefore \angle GBC = \angle ABC - \angle KBG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

又 $\because BG = AB = BC$,

∴ $\triangle BCG$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BCG = \angle BGC = 60^\circ, \quad BC = CG,$$

$$\therefore \angle GCH = \angle BCD - \angle BCG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\because HQ \perp CG,$$

$$\therefore \angle CQH = \angle GQH = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CHQ$ 中, $\angle GCH = 30^\circ$, $CH = 4$,

$$\therefore HQ = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore CQ = \sqrt{CH^2 - HQ^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

在 $\triangle ABG$ 中, $AB = BG$, $\angle KBG = 30^\circ$,

$$\therefore \angle BGA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KBG) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle AGC = \angle BGA + \angle BGC = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle QGH = 180^\circ - \angle AGC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle GQH$ 是等腰直角三角形,

$\therefore GQ = HQ = 2$,

$\therefore CG = CQ + GQ = 2\sqrt{3} + 2$,

$\therefore BC = CG = 2\sqrt{3} + 2$,

$\therefore$ 正方形的边长为 $2\sqrt{3} + 2$.

故选: B.

【点睛】 本题考查正方形的性质, 矩形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 等边三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 含 30° 角的直角三角形的性质及勾股定理等知识点, 通过作辅助线构造等边三角形是解题的关键.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分)

7. 将直线 $y = 2x - 5$ 沿 y 轴向上平移 4 个单位后, 所得直线的截距为_____.

【答案】 -1

【分析】 本题考查的是一次函数的平移, 直线在 y 轴上的截距的含义, 先求解平移后的解析式为 $y = 2x - 1$, 再进一步求解即可.

【详解】 解: 将直线 $y = 2x - 5$ 沿 y 轴向上平移 4 个单位后得到的直线解析式为: $y = 2x - 5 + 4 = 2x - 1$,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = -1$,

$\therefore$ 所得直线的截距为 -1;

故答案为: -1.

8. 一个多边形的每一个外角都等于 60° 度, 则这个多边形的内角和为_____度.

【答案】 720

【分析】 本题考查了正多边形的内角和和外角综合, 熟练掌握相关知识是解题的关键; 根据题意, 得这个多边形的每一个内角 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 且这个多边形的边数为 $360^\circ \div 60^\circ = 6$, 再求出这个多边形的内角和, 即可作答.

【详解】 解: $\because$ 一个多边形的每一个外角都等于 60° 度,

$\therefore$ 这个多边形的每一个内角 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 且这个多边形的边数为 $360^\circ \div 60^\circ = 6$

则 $120^\circ \times 6 = 720^\circ$,

故答案为: 720.

9. 菱形 $ABCD$ 的边 AB 为 5, 对角线 AC 为 8, 则菱形 $ABCD$ 的面积为_____.

【答案】24

【分析】根据菱形的对角线互相垂直，再利用勾股定理求出另一条对角线的长度，根据菱形的面积计算方法求解即可.

【详解】解：∵四边形 ABCD 为菱形，，

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\text{又} \because AC = 8,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

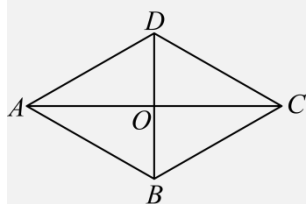
$$\text{在 Rt } OAB \text{ 中, } AB = 5,$$

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore BD = 2OB = 2 \times 3 = 6,$$

$$\text{菱形 ABCD 的面积} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24.$$

故答案为：24.



【点睛】本题主要考查了菱形的性质、菱形面积的计算方法等知识，解题关键是利用勾股定理求菱形的对角线.

10. 在平面直角坐标系中，点 $P(4,3)$ 到原点 O 的距离是_____.

【答案】5

【分析】本题主要考查了勾股定理和平面直角坐标系内两点间的距离公式，熟练掌握勾股定理是解题的关键.

本题可利用勾股定理，将点到原点的距离转化为横、纵坐标平方和的算术平方根进行求解.

【详解】解：点 $P(4,3)$ 到原点 O 的距离是 $\sqrt{4^2 + 3^2}$

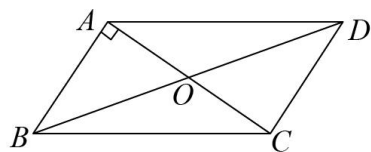
$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5,$$

故答案为：5.

11. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\angle BAC = 90^\circ$, $AD = 15$, $OC = 6$, 则 $\triangle BOC$ 的面积为_____.



【答案】 27

【分析】 由平行四边形的性质得到 $BC = AD = 15$, $OA = OC = 6$, 勾股定理求出 AB , 利用面积公式计算即可.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC = AD = 15, \quad OA = OC = 6,$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = OA + OC = 12$,

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

$$\therefore \triangle BOC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27,$$

故答案为: 27.

【点睛】 此题考查了平行四边形的性质, 勾股定理求线段长, 熟记平行四边形的性质是解题的关键.

12. 在平面直角坐标系中, 将点 $A(x, y)$ 向左平移个 4 单位长度, 再向下平移 3 个单位长度后与点 $B(1, -2)$ 重合, 则点 A 的坐标是 _____.

【答案】 (5,1)

【分析】 本题主要考查了坐标与图形变化—平移, 根据所给平移方式, 将点 B 进行反向平移即可解决问题.

【详解】 解: 由题知, 将点 $B(1, -2)$ 向上平移 3 个单位长度后, 所得点的坐标为 (1,1),

再将点 (1,1) 向右平移 4 个单位长度后, 所得点的坐标为 (5,1),

即点 A 的坐标是 (5,1).

故答案为: (5,1).

13. 在平面直角坐标系中, 第二象限内有一点 M , 点 M 到 x 轴的距离为 5, 到 y 轴的距离为 4, 则点 M 的坐标是_____.

【答案】 (-4,5)

【分析】 根据点到 x 轴的距离为点的纵坐标的绝对值, 到 y 轴的距离为点的横坐标的绝对值, 得到点 M 的横纵坐标可能的值, 进而根据所在象限可得点 M 的具体坐标.

【详解】解：设点 M 的坐标是 (x, y) ,

$\because$ 点 M 到 x 轴的距离为 5, 到 y 轴的距离为 4,

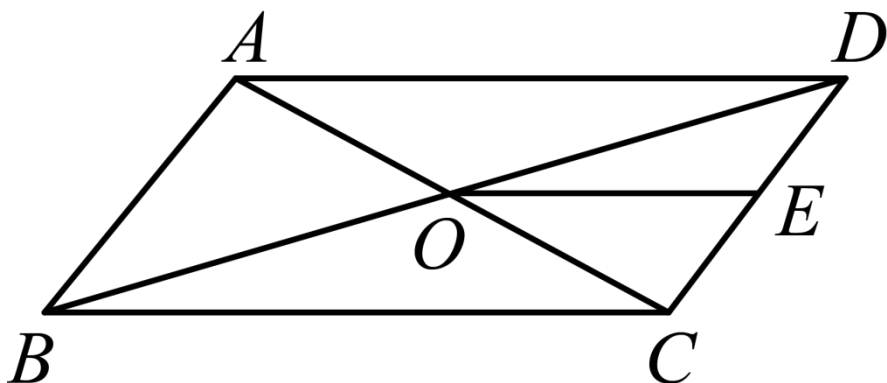
$$\therefore |y| = 5, |x| = 4.$$

又 $\because$ 点 M 在第二象限内,

$$\therefore x = -4, y = 5,$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-4, 5)$.

14. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , 点 E 是 CD 的中点, 若 $AD = 6$, 则 OE 的长是_____.



【答案】3

【分析】证明 OE 是 $\triangle ACD$ 的中位线, 根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半求解即可.

【详解】解: $\because \square ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O ,

$$\therefore AO = OC,$$

$\because$ 点 E 是 CD 的中点,

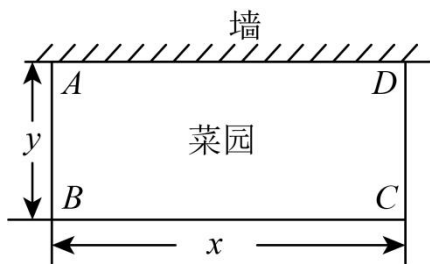
$$\therefore CE = DE,$$

$\therefore OE$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线,

$$\because AD = 6,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AD = 3.$$

15. 李奶奶要围成一个矩形菜园, 菜园的一边利用足够长的墙, 用篱笆围成的另外三边总长度恰好为 36 米. 要围成的菜园是如图所示的长方形 $ABCD$. 设 BC 边的长为 x 米, AB 边的长为 y 米, 则 y 与 x 之间的关系式为_____.

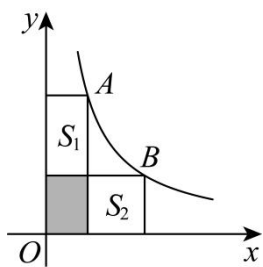


【答案】 $y = 18 - \frac{1}{2}x$

【分析】 本题考查了用关系式表示变量间的关系，根据用篱笆围成的另外三边总长度恰好为 36 米，设 BC 边的长为 x 米，则 $x + 2y = 36$ ，即可作答.

【详解】 解： $\because$ 用篱笆围成的另外三边总长度恰好为 36 米，设 BC 边的长为 x 米， AB 边的长为 y 米，
 $\therefore x + 2y = 36$ ，
 $\therefore y = 18 - \frac{1}{2}x$.

16. 如图，点 A, B 是双曲线 $y = \frac{7}{x}$ 上的点，分别经过 A, B 两点向 x 轴， y 轴作垂线段，若 $S_1 + S_2 = 10$ ，
 则 $S_{\text{阴影}} = \underline{\hspace{2cm}}$.



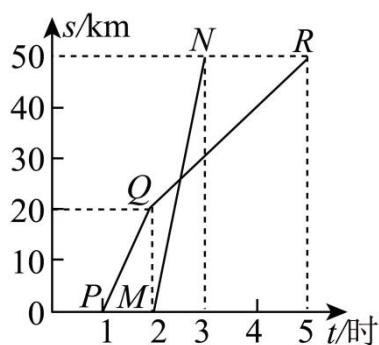
【答案】 2

【分析】 先根据反比例函数系数 k 的几何意义求出 $S_1 + S_{\text{阴影}}$ 及 $S_2 + S_{\text{阴影}}$ 的值，进而可得出 $S_{\text{阴影}}$ 的值.

【详解】 解： $\because$ 点 A, B 是双曲线 $y = \frac{7}{x}$ 上的点， $S_1 + S_2 = 10$ ，
 $\therefore S_1 + S_{\text{阴影}} = S_2 + S_{\text{阴影}} = 7$ ，
 $\therefore S_1 + S_2 = 14 - 2S_{\text{阴影}} = 10$ ，

解得 $S_{\text{阴影}} = 2$.

17. 如图 A, B 两地相距 50km，甲于某日下午 1 点骑自行车从 A 地出发去 B 地，乙也于同日下午骑摩托车按相同路线从 A 地出发去 B 地，图中的折线 PQR 和线段 MN 分别表示甲乙所行驶的路程 S 与时间 t 的关系，根据图中的数据，乙出发 $\underline{\hspace{2cm}}$ h 就追上甲.



【答案】 $0.5/\frac{1}{2}$

【分析】 设乙出发后经过 x 小时追上甲，根据乙追上甲时两人的路程相等列方程，求解即可。

【详解】 解：设乙出发后经过 x 小时追上甲，

甲在 QR 段的速度是 $(50-20) \div (5-2) = 10$ (km/h)，

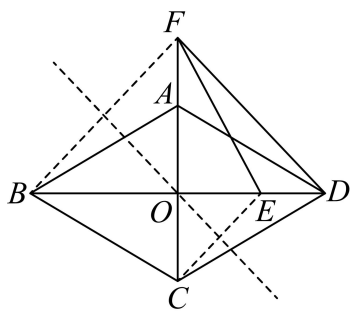
乙的速度为 $50 \div (3-2) = 50$ (km/h)，

$\therefore 20 + 10x = 50x$ ，

解得 $x = 0.5$ ，

$\therefore$ 乙出发后经过 0.5h 追上甲。

18. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AC = 6, BD = 10$ 。将边 BC 沿着过点 O 的一条直线翻折，点 C 的对应点为 E ，点 B 的对应点为 F ，连接 EF, DF ，如果点 E 落在线段 OD 上，那么 $\triangle DEF$ 的面积为_____。



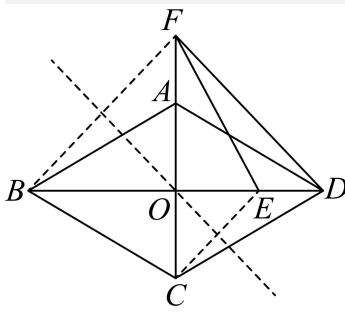
【答案】 5

【分析】 本题考查了菱形的性质，折叠的性质，解题的关键是确定折叠后点 B 落在射线 OA 上。

由菱形得到 $AC \perp BD$ ， $OB = OD = 5$ ， $OC = \frac{1}{2}AC = 3$ ，然后根据折叠的性质确定点 B 落在射线 OA 上，

$OE = OC = 3, OF = OB = 5$ ，在由三角形公式即可求解。

【详解】 解：如图



∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5, \quad OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

∵ 折叠, 点 C 的对应点为 E , 且点 E 落在线段 OD 上,

$$\therefore OE = OC = 3, OF = OB = 5, \text{ 折痕平分 } \angle EOC, \text{ 即平分 } \angle AOB,$$

∴ F 在射线 OA 上,

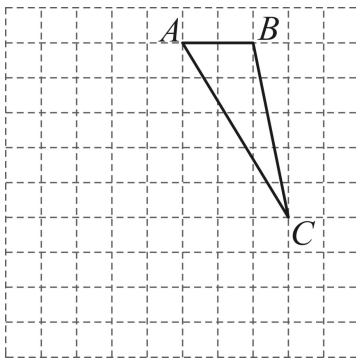
$$\therefore DE = 5 - 3 = 2,$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}DE \times OF = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5,$$

故答案为: 5.

三、解答题 (本题共 7 小题, 共 64 分)

19. (本题共 8 分) 在如图所示的正方形网格中, 每个小正方形的边长为 1, 格点三角形 ABC (顶点是网格线的交点的三角形) 的顶点 A 、 C 的坐标分别为 $A(0,4)$, $C(3,-1)$, 请按要求解答下列问题:



(1) 在图中建立恰当的平面直角坐标系, 并直接写出点 B 的坐标为 _____;

(2) 请画出与 ABC 关于 x 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$, 并写出点 A_1 , B_1 , C_1 的坐标.

【答案】 (1) 图见解析, $(2,4)$

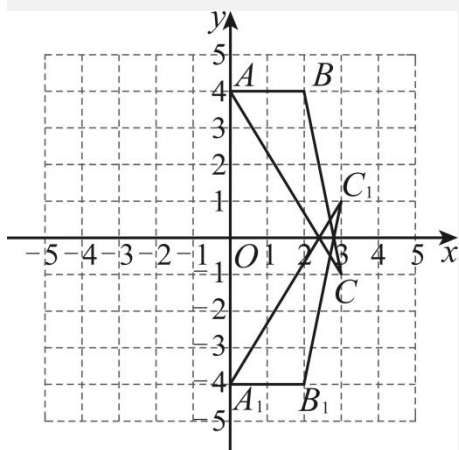
(2) 图见解析, $A_1(0,-4)$, $B_1(2,-4)$, $C_1(3,1)$

【分析】 本题主要考查了作图—轴对称变换，画轴对称图形关键是确定组成图形的关键点的对称点位置；

(1) 根据 A, C 点坐标确定原点位置，再建立坐标系即可；

(2) 首先确定 $A、B、C$ 三点关于 x 轴的对称点，再连接即可。

【详解】 (1) 解： 如图： $B(2,4)$ ；

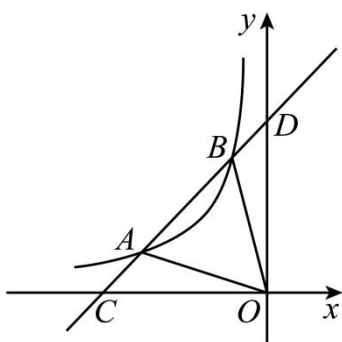


故答案为： $(2,4)$ ；

(2) 解： 如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，

$A_1(0,-4)$ ， $B_1(2,-4)$ ， $C_1(3,-1)$ 。

20. (本题共 8 分) 如图，直线 $y=kx+b$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}$ ($x<0$) 相交于 $A(-4,1)$ ， B 两点，与 x 轴相交于点 $C(-5,0)$ 。



(1) 分别求一次函数与反比例函数的解析式；

(2) 连接 OA ， OB ， 求 AOB 的面积。

【答案】 (1) $y=x+5$ ， $y=-\frac{4}{x}(x<0)$

(2) 7.5

【分析】 本题是反比例函数与一次函数的交点问题，主要考查了待定系数法求一次函数和反比例函数解析式、三角形面积等。

(1) 将已知点坐标代入函数表达式, 即可求解;

(2) 两函数解析式联立成方程组, 求出点 B 的坐标, 然后根据 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BOD}$ 即可以解决问题.

【详解】(1) 解: 将 $A(-4,1)$, $C(-5,0)$ 代入 $y=kx+b$,

$$\text{得} \begin{cases} -4k+b=1 \\ -5k+b=0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=1 \\ b=5 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y=x+5$,

将 $A(-4,1)$ 代入 $y=\frac{m}{x}(x<0)$, 得 $m=-4$,

$\therefore$ 反比例的解析式为 $y=-\frac{4}{x}(x<0)$;

(2) 解: $\because$ 直线 AC 的解析式为 $y=x+5$ 与 y 轴交点 D ,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0,5)$,

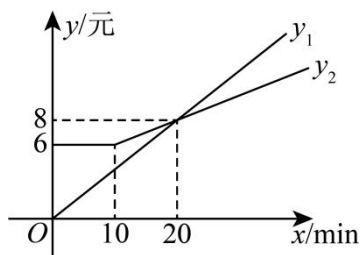
$$\text{由} \begin{cases} y=x+5 \\ y=-\frac{4}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-1,4)$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 - \frac{1}{2} \times 1 \times 5 = 7.5.$$

21. (本题共 8 分) 小明家附近有 A 、 B 两种品牌的共享电动车, 其收费方式分别满足函数 y_1 和 y_2 , 收费 y (元) 与骑行时间 x (分钟) 的关系如图所示. 已知小明家到工厂的距离为 9km, 两种品牌共享电动车的平均行驶速度均为 300m/min.



(1) 当 $x \geq 10$ 时, 求 B 品牌收费方式 y_2 与骑行时间 x 的函数解析式.

(2) 小明从家骑行去工厂, 选择哪种品牌的共享电动车更省钱?

(3)当骑行时间 x 为多少时，两种品牌的收费相差 2 元？

【答案】(1) $y_2 = 0.2x + 4$

(2)B 品牌

(3)10 或 30

【分析】本题考查了一次函数的应用，解题的关键是：

(1) 根据待定系数法求解即可；

(2) 根据待定系数法求出 y_1 的函数解析式，然后把 $x = \frac{9 \times 1000}{300} = 30$ 代入 y_1 、 y_2 ，求出 y_1 、 y_2 ，最后比较即可求解；

(3) 分 $0 < x \leq 10$ ， $10 < x \leq 20$ ， $x > 20$ 三种情况讨论即可。

【详解】(1) 解：设解析式为 $y_2 = kx + b$ ，

把 $(10, 6)$ ， $(20, 8)$ 代入，得 $\begin{cases} 10k + b = 6 \\ 20k + b = 8 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} k = 0.2 \\ b = 4 \end{cases}$ ，

$\therefore y_2 = 0.2x + 4$ ，

(2) 解：设 $y_1 = mx$ ，

把 $(20, 8)$ 代入，得 $20m = 8$ ，

解得 $m = 0.4$ ，

$\therefore y_1 = 0.4x$ ，

把 $x = \frac{9 \times 1000}{300} = 30$ 代入 y_1 、 y_2 ，得 $y_1 = 0.4 \times 30 = 12$ ， $y_2 = 0.2 \times 30 + 4 = 10$ ，

$\therefore 10 < 12$ ，

$\therefore$ 小明选择 B 品牌的共享单车更省钱；

(3) 解：当 $0 < x \leq 10$ 时，

根据题意，得 $6 - 0.4x = 2$ ，

解得 $x = 10$ ，

当 $10 < x \leq 20$ 时，

根据题意，得 $0.2x + 4 - 0.4x = 2$ ，

解得 $x = 10$ (舍去),

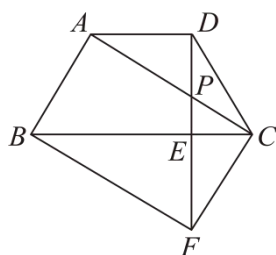
当 $x > 20$ 时,

根据题意, 得 $0.4x - (0.2x + 4) = 2$,

解得 $x = 30$,

综上, 当骑行时间 x 为 10 或 30 时, 两种品牌的收费相差 2 元

22. (本题共 8 分) 如图, 已知: 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E , 延长 DE 至 F , 使 $EF = DE$, 连接 BF 、 AC , AC 与 DE 相交于点 P .



(1) 求证: 四边形 $ABFC$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AD = DE$, $AP = DC$, 求证: 四边形 $ABFC$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析

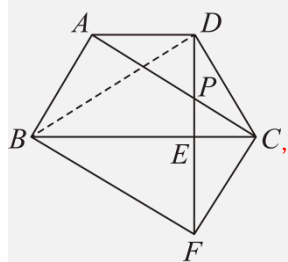
(2) 见解析

【分析】 本题考查了证明四边形是平行四边形、证明四边形是矩形、等腰梯形的性质、全等三角形的判定与性质, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 连接 BD , 由等腰梯形的性质可得 $AC = BD$, 再结合线段垂直平分线的性质可得 $AC = BF$, $CF = AB$, 即可得证;

(2) 证明 $\triangle ADP \cong \triangle DEC$ (HL), 得出 $\angle DAP = \angle CDE$, 从而可得 $\angle CDE = \angle ACB$, 求出 $\angle BAC = 90^\circ$, 即可得证.

【详解】(1) 证明: 如图, 连接 BD ,



$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$,

$\therefore AC = BD$,

$$\because DE \perp BC, \quad EF = DE,$$

$$\therefore BD = BF, \quad CD = CF,$$

$$\therefore AC = BF, \quad CF = AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形;

(2) 证明: $\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle DCB, \quad \angle DAP = \angle ACB,$$

$$\because DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\because AD = DE, \quad AP = DC,$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle DEC (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle DAP = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ACB,$$

$$\because \angle CDE + \angle DCE = 90^\circ,$$

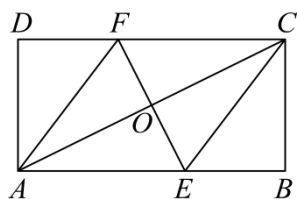
$$\therefore \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ABC) = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是矩形.

23. (本题共 8 分) 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 O 为对角线 AC 的中点, 过点 O 作 $EF \perp AC$ 交边 AB 、 CD 于点 E 、 F , 联结 AF 、 CE .



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 为菱形;

(2) 如果四边形 $ABCD$ 为矩形, $AD = 8$, $CD = 16$, 求 EF 的长.

【答案】 (1) 见解析

(2) $4\sqrt{5}$

【分析】 本题考查矩形的性质, 菱形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 熟练掌握以上知识是解题关键.

(1) 由矩形的性质可 $CF \parallel AE$ ，进而得出 $\angle FCO = \angle EAO$ ，结合 O 为对角线 AC 的中点得出 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，即 $CF = AE$ ，即可得出四边形 $AECF$ 是平行四边形，结合 $EF \perp AC$ 即可得出四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 根据勾股定理求出 AC ，然后根据菱形的性质和勾股定理求出 OF ，进而可以解决问题.

【详解】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore CF \parallel AE,$$

$$\therefore \angle FCO = \angle EAO,$$

$\because O$ 为对角线 AC 的中点，

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COF,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CF = AE,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$$\because EF \perp AC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AD = 8$ ， $CD = 16$ ，

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 8\sqrt{5},$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{5},$$

$\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形，

$$\therefore AF = CF,$$

$$\therefore DF = CD - CF = 16 - AF,$$

$$\because AD^2 + DF^2 = AF^2,$$

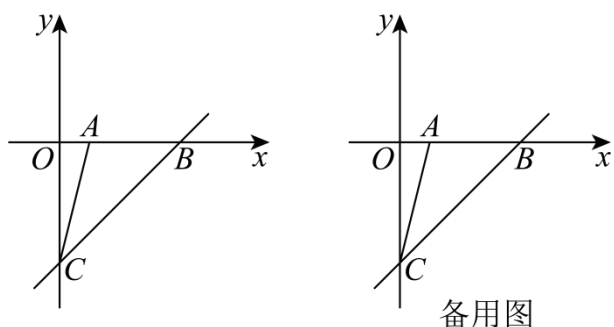
$$\therefore 8^2 + (16 - AF)^2 = AF^2,$$

$$\therefore AF = 10,$$

$$\therefore OF = \sqrt{AF^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore EF = 2OF = 4\sqrt{5}.$$

24. (本题共 12 分) 如图, 已知点 $A(1,0)$, 点 $B(4,0)$, 点 C 在 y 轴负半轴上, $S_{\triangle ABC} = 6$, 点 P 为直线 BC 上一点.



- (1) 直线 BC 的表达式为 _____; 直线 BC 与 x 轴的夹角等于 _____ 度;
- (2) 点 Q 为平面内任一点, 如果以点 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是正方形, 直接写出点 Q 的坐标是 _____;
- (3) 直线 AP 与 y 轴交于点 M , 当 $\triangle PMC$ 的面积是 $\triangle ACP$ 面积的 2 倍时, 求出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = x - 4$, 45

(2) $(4, -3)$ 或 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$;

(3) $(2, -2)$ 或 $(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$

【分析】 本题考查二次函数的图象及性质、腰直角的判定与性质等知识点, 灵活运用二次函数的图象与性质以及数形结合是解题的关键.

(1) 根据 $S_{\triangle ABC} = 6$, 求出点 C 的坐标, 再利用待定系数法求出直线 CB 的解析式即可, 再求得 $OB = OC$, 然后根据等腰直角三角形的性质即可解答;

(2) 分 AB 是正方形的边、 AB 是正方形的对角线两种情况, 分别利用正方形性质即可求解;

(3) 当点 M 在 y 轴的正半轴和负半轴时, 分别根据三角形等分点的性质列方程组求解即可.

【详解】 (1) 解: $\because$ 点 $A(1,0)$, 点 $B(4,0)$,

$$\therefore AB = 3, OB = 4,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 3 \times OC = 6,$$

$$\therefore OC = 4,$$

$\because$ 点 C 在 y 轴负半轴上,

$$\therefore C(0, -4),$$

设直线 BC 的解析式是 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = -4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = x - 4$;

$\because OB = OC = 4, \angle BOC = 90^\circ$,

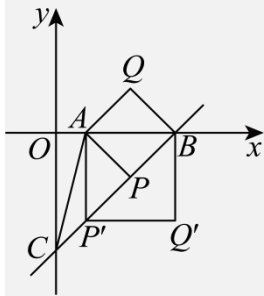
$\therefore$ 直线 BC 与 x 轴的夹角等于 45° .

(2) 解: ①当 AB 是正方形的边时, 对应的正方形为 $AP'Q'B$,

$\because$ 点 $A(1,0)$, 点 $B(4,0)$,

$\therefore AB = 3$,

$\therefore P'(1, -3), Q'(4, -3)$;



②当 AB 是正方形的对角线时, 对应的矩形为 $APBQ$,

$\because AB, PQ$ 是正方形对角线,

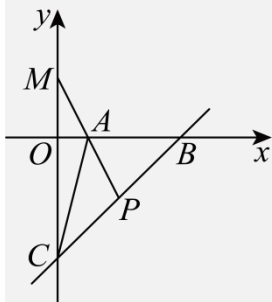
$\therefore$ 线段 AB 和线段 PQ 互相垂直平分,

$\therefore$ 点 P, Q 的横坐标为 $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$, $\therefore P\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), Q\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

综上所述, Q 点的坐标为 $(4, -3)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

(3) 解: 如图: 当点 M 在 y 轴的正半轴时, 此时点 P 在第三象限.

设 $P(t, t-4), M(0, m)$,



$\therefore \triangle PMC$ 的面积是 $\triangle ACP$ 面积的 2 倍,

$$\therefore S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ACM},$$

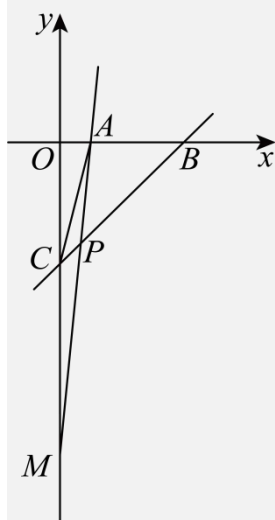
$\therefore AM = AP$, 即 A 为 MP 的中点,

$$\begin{cases} t+0=2 \times 1 \\ t-4+m=2 \times 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} t=2 \\ m=2 \end{cases},$$

$$\therefore t-4=2-4=-2,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2, -2)$;

如图: 当点 M 在 y 轴的负半轴时, 此时点 P 在第三象限.



$\therefore \triangle PMC$ 的面积是 $\triangle ACP$ 面积的 2 倍,

$$\therefore S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ACM},$$

$$\therefore AP = \frac{1}{3} AM,$$

$$\begin{cases} t=2 \times \frac{0+1}{3} = \frac{2}{3} \\ t-4=2 \times \frac{0+m}{3} \end{cases}, \text{解得:} \begin{cases} t=\frac{2}{3} \\ m=-5 \end{cases},$$

$$\therefore t-4=\frac{2}{3}-4=-\frac{10}{3},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right)$;

综上, 点 P 的坐标为 $(2, -2)$ 或 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

25. (本题共 12 分) (24-25 八年级下·上海普陀·期末) 小普在综合与实践课上, 参加了以“神奇的正方形”为主题的数学活动, 通过“折、转、探”等方式研究有关正方形折纸的有趣结论.

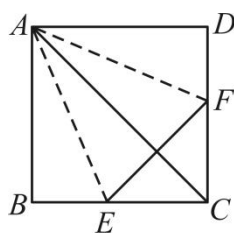


图-1

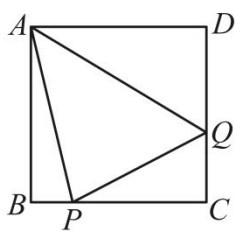
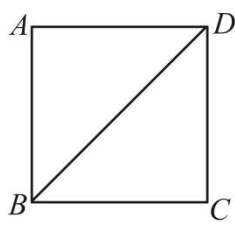
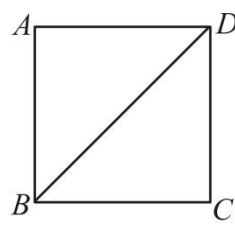


图-2



备用图



备用图

(1)折一折: 如图-1, 小普将正方形纸片 $ABCD$ 折叠, 使边 AB 、 AD 都落在对角线 AC 上, 展开得折痕 AE 、 AF , 联结 EF . 那么 $\angle EAF =$ _____ 度; 如果 $AB = 1$, 那么 EF 的长度等于 _____;

(2)转一转: 小普将图-1 中的 $\angle EAF$ 绕点 A 旋转, 使它的两边分别交直线 BC 、 CD 于点 P 、 Q .

①如图-2, 当点 P 、 Q 在边 BC 、 CD 上, 联结 PQ . 如果 $BP = 1$, $DQ = 3$, 求 $\triangle APQ$ 的面积;

②探一探: 联结 BD , 射线 AP 、 AQ 分别交对角线 BD 所在直线于点 M 、 N , 且点 N 在正方形内部. 正方形的边长 $AB = a$, 联结 CM . 如果 $\triangle PCM$ 是等腰三角形, 请直接写出线段 CP 的长度 _____. (用含有字母 a 的代数式表示)

【答案】 (1) 45° , $2\sqrt{2} - 2$;

(2) ① $4 + 2\sqrt{7}$; ② $PC = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}a$ 或 $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}a$

【分析】 (1) 如图 1, 延长 CB 至点 F' , 使 $BF' = DF$, 连接 AF' , 设 $DF = x$, 证明 $\triangle ADF \cong \triangle ABF'$, $\triangle ABE \cong \triangle ABF'$ 和 $\triangle AEF' \cong \triangle AEF$, 根据勾股定理得: $CE^2 + CF^2 = EF^2$, 列方程即可解答;

(2) ①如图 2, 延长 CB 至点 Q , 使 $BQ = DQ$, 连接 AQ , 过点 A 作 $AE \perp PQ$ 于点 E , 同理得: $\triangle ADQ \cong \triangle ABQ$, $\triangle APQ \cong \triangle APQ$, 根据勾股定理列方程得 $PC^2 + CQ^2 = PQ^2$, $a^2 + (a - 2)^2 = 4^2$, 解方程可得 a 的值, 证明 $\triangle APB \cong \triangle APE$, 根据三角形的面积公式即可解答;

②分两种情况: *i*) 如图 3, $PC = PM$, 过点 M 作 $MG \perp BC$ 于点 G , 则 $\angle BGM = \angle CGM = 90^\circ$, 设 $\angle BCM = \alpha$, $PG = x$; *ii*) 如图 4, $PC = PM$, 正确画图根据含 30° 角的直角三角形的性质即可解答.

【详解】 (1) 解: 如图 1, 延长 CB 至点 F' , 使 $BF' = DF$, 连接 AF' ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

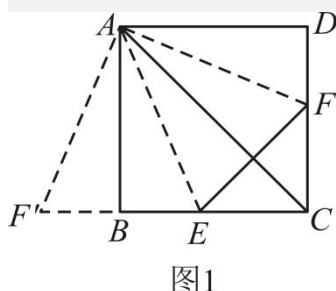


图1

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ$, $AB = BC = CD = AD$, $\angle BCD = \angle D = \angle DAB = 90^\circ$,

由折叠得： $\angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 22.5^\circ$ $\angle DAF = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle CAD = 22.5^\circ$,

$$\therefore \angle EAF = 22.5^\circ + 22.5^\circ = 45^\circ ,$$

设 $DF = x$,

$$\because AD = AB, \angle D = \angle ABF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABF \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore AF = AF, \angle DAF = \angle BAF = 22.5^\circ = \angle BAE ,$$

$$\because AB = AB, \angle ABE = \angle ABF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ABF ,$$

$$\therefore BE = BF = x ,$$

$$\because \angle EAF = \angle EAF = 45^\circ , AE = AE ,$$

$$\therefore \triangle AEF' \cong \triangle AEF ,$$

$$\therefore EF = EF' = 2x ,$$

$\because$ 正方形 $ABCD$ 是正方形, 且边长 $= 1$,

$$\therefore BC = DC = 1 ,$$

$$\therefore CE = CF = 1 - x ,$$

由勾股定理得： $CE^2 + CF^2 = EF^2$,

$$\therefore (1-x)^2 + (1-x)^2 = (2x)^2 ,$$

$$\therefore x_1 = -1 + \sqrt{2}, x_2 = -1 - \sqrt{2} \text{ (舍)} ,$$

$$\therefore EF = 2x = 2\sqrt{2} - 2 ,$$

故答案为： $45^\circ, 2\sqrt{2} - 2$;

(2) ①如图 2, 由旋转得： $\angle PAQ = 45^\circ$,

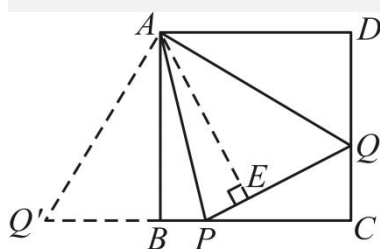


图2

延长 CB 至点 Q' , 使 $BQ' = DQ$, 连接 AQ' , 过点 A 作 $AE \perp PQ$ 于点 E ,

同理得： $\triangle ADQ \cong \triangle ABQ'$; $\triangle APQ \cong \triangle APQ'$,

$$\therefore BQ \perp DQ = 3, PQ = PQ, \angle APB = \angle APE,$$

$$\therefore BP = 1,$$

$$\therefore PQ^2 = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore PQ = 4,$$

$$\text{设 } PC = a, BC = CD = a + 1,$$

$$\therefore CQ = a + 1 - 3 = a - 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCQ \text{ 中, } PC^2 + CQ^2 = PQ^2,$$

$$\therefore a^2 + (a - 2)^2 = 4^2,$$

$$\therefore a^2 - 2a - 6 = 0,$$

$$\text{解得: } a_1 = 1 - \sqrt{7} \text{ (舍), } a_2 = 1 + \sqrt{7},$$

$$\therefore AB = BC = a + 1 = 1 + \sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 2,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle AEP = 90^\circ, \angle APB = \angle APE, AP = AP,$$

$$\therefore \triangle APB \cong \triangle APE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = AB = \sqrt{7} + 2,$$

$$\therefore \triangle APQ \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot AE = \frac{1}{2} \times 4 \times (\sqrt{7} + 2) = 2\sqrt{7} + 4;$$

②分两种情况:

i) 如图 3, $PC = PM$, 过点 M 作 $MG \perp BC$ 于点 G , 则 $\angle BGM = \angle CGM = 90^\circ$,

$$\text{设 } \angle BCM = a, PG = x,$$

$$\therefore \angle CMP = \angle BCM = a,$$

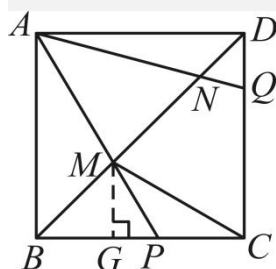


图3

$$\therefore \angle BPM = 2a,$$

$$\therefore AB = BC, \angle ABM = \angle CBM, BM = BM,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CBM,$$

$$\therefore \angle APB + \angle PAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB = 30^\circ,$$

设 $PB = b$ ，则 $AP = 2b$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{3}b,$$

$$\because AB = a,$$

$$\therefore a = \sqrt{3}b,$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore PC = BC + PB = a + \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}a;$$

综上，线段 CP 的长度 $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}a$ 或 $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}a$ 。

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，含 30° 角的直角三角形的性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考压轴题。