

市北初级中学北校 2025-2026 学年八年级下期末模拟数学试卷 03

一、单选题

1. 下列两个变量之间的关系属于反比例函数的关系是 ().

- A. 圆的面积与半径的关系
- B. 正方形的周长与边长的关系
- C. 匀速行驶的汽车所行驶的路程与行驶的时间的关系
- D. 面积不变时, 矩形的长与宽的关系

【答案】D

【解析】

【分析】形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$, $x \neq 0$) 的函数叫做反比例函数, 两个变量的乘积为定值. 依次写出每个选项的函数关系式, 对照定义判断.

【详解】解: A、根据题意, 得 $S = \pi r^2$, 所以圆的面积 S 与半径 r 的关系是二次函数关系, 故本选项错误;
B、根据题意, 得 $l = 4a$, 所以正方形的周长 l 与边长 a 的关系是正比例函数关系, 故本选项错误;
C、根据题意, 得 $S = vt$, 所以匀速行驶的汽车所行驶的路程 S 与行驶的时间 t 的关系是正比例函数关系, 故本选项错误;
D、根据题意, 得 $a = \frac{s}{b}$, 所以矩形的长 a 与宽 b 的关系是反比例函数关系, 故本选项正确.

2. 下列各点中, 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 图象上的点是 ()

- A. $(2, -1)$
- B. $(1, 2)$
- C. $(1, -2)$
- D. $(-2, 1)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特征进行逐项判断即可.

【详解】解: A、 $2 \times (-1) = -2 \neq 2$, 故点 $(2, -1)$ 不在反比例函数图象上;
B、 $1 \times 2 = 2$, 故点 $(1, 2)$ 在反比例函数图象上;
C、 $1 \times (-2) = -2 \neq 2$, 故点 $(1, -2)$ 不在反比例函数图象上;
D、 $(-2) \times 1 = -2 \neq 2$, 故点 $(-2, 1)$ 不在反比例函数图象上.

3. 对于一次函数 $y = -x + 2$, 下列结论错误的是 ()

- A. y 随 x 的增大而减小

- B. 当 $x > 2$ 时, $y < 0$
- C. 函数的图象与 y 轴交于点 $(2,0)$
- D. 直线 $y = -x + 2$ 与第二、四象限角平分线所在直线平行

【答案】C

【解析】

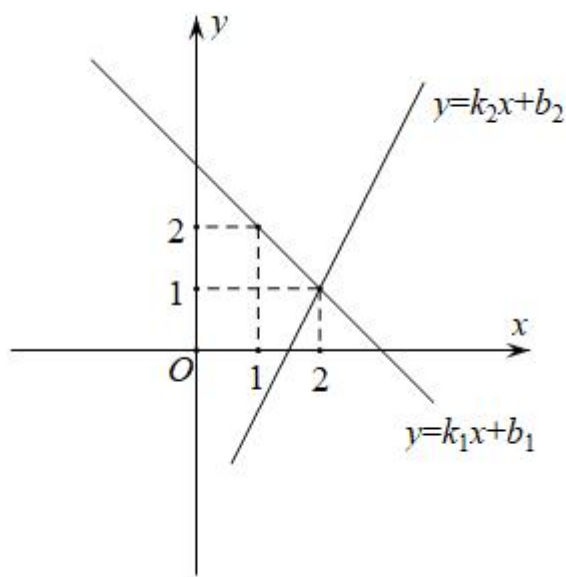
【分析】根据一次函数的性质逐一判断各选项即可.

【详解】解: 已知一次函数为 $y = -x + 2$, 可得 $k = -1 < 0$, $b = 2 > 0$.

- A、 $k = -1 < 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而减小, 结论正确, 不符合题意;
- B、令 $y = 0$, 即 $-x + 2 = 0$, 解得 $x = 2$, $\therefore y$ 随 x 的增大而减小, $\therefore$ 当 $x > 2$ 时, $y < 0$, 结论正确, 不符合题意;
- C、求函数与 y 轴交点, 令 $x = 0$, 得 $y = 2$, $\therefore$ 函数图象与 y 轴交于点 $(0, 2)$, 原结论错误, 符合题意;
- D、第二、四象限角平分线所在直线为 $y = -x$, 与 $y = -x + 2$ 的 k 相同 b 不同, $\therefore$ 两直线平行, 结论正确, 不符合题意.

4. 在平面直角坐标系内, 一次函数 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ 的图象如图所示, 则关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} y - k_1x = b_1 \\ y - k_2x = b_2 \end{cases} \text{ 的解是 () }$$



- A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用方程组的解就是两个相应的一次函数图象的交点坐标求解.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ 的图象的交点坐标为 $(2, 1)$,

$$\therefore \text{关于 } x, y \text{ 的方程组 } \begin{cases} y - k_1x = b_1 \\ y - k_2x = b_2 \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

故选: C.

【点睛】本题考查了一次函数与二元一次方程(组): 方程组的解就是两个相应的一次函数图象的交点坐标.

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$. 添加一个条件, 使得四边形 $ABCD$ 为正方形, 添加的条件可以为 ()

- A. $AC = BD$ B. $AC \perp BD$ C. AC 平分 BD D. AC 平分 $\angle BAD$

【答案】A

【解析】

【分析】根据已知条件先得出四边形 $ABCD$ 是菱形, 再结合正方形的判定定理, 分析各选项即可.

【详解】解: 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

A、当 $AC = BD$ 时, 则菱形 $ABCD$ 是正方形, 正确;

B、菱形 $ABCD$ 本身对角线 $AC \perp BD$, 故添加 $AC \perp BD$, 不能使得四边形 $ABCD$ 为正方形;

C、菱形 $ABCD$ 本身对角线 AC 平分 BD , 故添加 AC 平分 BD , 不能使得四边形 $ABCD$ 为正方形;

D、菱形 $ABCD$ 本身对角线 AC 平分 $\angle BAD$, 故添加 AC 平分 $\angle BAD$, 不能使得四边形 $ABCD$ 为正方形.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若一次函数 $y = kx + 2k + 3 (k \neq 0)$ 对于除 0 之外的任意实数 k , 其图象都经过一个定点 A , 点 A' 与点 A 关于 x 轴对称, 则 $\triangle OAA'$ 的面积为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】先整理一次函数解析式求出定点 A 的坐标, 再根据关于 x 轴对称点的坐标特征得到 A' 的坐标, 最后利用三角形面积公式计算结果.

【详解】解: $\because y = kx + 2k + 3 = k(x + 2) + 3$, 对于除 0 之外的任意实数 k , 其图象都经过一个定点 A ,

$\therefore x + 2 = 0$, 解得: $x = -2$,

此时 $y=3$,

$\therefore$ 定点 A 的坐标为 $(-2,3)$,

$\therefore A'$ 与 A 关于 x 轴对称,

$\therefore A'$ 的坐标为 $(-2,-3)$,

$\therefore AA' = 3 - (-3) = 6$,

$\therefore$ 直线 AA' 为 $x = -2$, 原点 O 到直线 AA' 的距离为 $|-2| = 2$

$\therefore \triangle OAA'$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$.

二、填空题

7. 从七边形一个顶点出发, 最多可引_____条对角线.

【答案】 4

【解析】

【分析】 n 边形从一个顶点出发可以引 $(n-3)$ 条对角线, 据此求解即可.

【详解】 解: 由题意得, $7-3=4$,

$\therefore$ 从七边形一个顶点出发, 最多可引 4 条对角线.

8. 已知一个多边形的内角和比它的外角和的 2 倍还多 180° , 则这个多边形的边数为_____.

【答案】 7##七

【解析】

【分析】 根据题意设多边形边数为 n , 结合多边形内角和定理与多边形外角和定理, 列一元一次方程求解即可.

【详解】 解: 设这个多边形的边数为 n ,

根据题意列方程得: $180^\circ(n-2) = 2 \times 360^\circ + 180^\circ$,

解得: $n=7$,

即这个多边形的边数为 7.

9. 若一次函数 $y=2x+k+4$ 的图像在 y 轴上的截距是 5, 则 $k=$ _____.

【答案】

1

【解析】

【分析】根据一次函数 $y = mx + b$ ($m \neq 0$) 的图像在 y 轴上的截距为常数项 b ，结合已知截距为 5，列出关于 k 的一元一次方程求解即可.

【详解】解：∵一次函数 $y = 2x + k + 4$ 的图像在 y 轴上的截距是 5

$$\therefore k + 4 = 5,$$

解得 $k = 1$.

10. 当 m _____ 时，函数 $y = (2 - m)x + m^2 - 4$ (m 是常数) 是正比例函数.

【答案】 -2

【解析】

【分析】正比例函数 $y = kx$ 的定义条件是： k 为常数且 $k \neq 0$ ，自变量次数为 1，常数项为 0.

【详解】解：根据题意得， $m^2 - 4 = 0$ 且 $2 - m \neq 0$,

解得 $m = \pm 2$ 且 $m \neq 2$,

$$\therefore m = -2.$$

11. 若一元二次方程 $x^2 - 5x + a = 0$ 无实数根，则一次函数 $y = (a - 5)x + a$ 的图象不经过_____.

【答案】 第四象限

【解析】

【分析】先利用根的判别式的意义得到 $\Delta < 0$ ，解不等式得到 a 的取值范围，然后根据一次函数的性质解决问题.

【详解】解：∵一元二次方程 $x^2 - 5x + a = 0$ 无实数根，

$$\therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times a < 0, \text{ 即 } 25 - 4a < 0,$$

$$\text{解得 } a > \frac{25}{4},$$

对于一次函数 $y = (a - 5)x + a$,

$$\therefore a > \frac{25}{4},$$

$$\therefore a - 5 > \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4} > 0, \text{ 且 } a > 0,$$

根据一次函数性质，

当一次项系数大于 0，常数项大于 0 时，图象经过第一、二、三象限，

∴该一次函数的图象不经过第四象限.

12. 直线 $y = -\frac{2}{3}x - 2$ 是由直线 $l: y = kx + b$ (k, b 是常数) 向下平移 2 个单位得到的, 那么直线 l 的表达式是_____.

【答案】 $y = -\frac{2}{3}x$

【解析】

【分析】 根据“上加下减”的平移法则即可解决问题.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = -\frac{2}{3}x - 2$ 是由直线 $l: y = kx + b$ (k, b 是常数) 向下平移 2 个单位得到的,

$\therefore$ 直线 $y = -\frac{2}{3}x - 2$ 向上平移 2 个单位得到直线 $l: y = kx + b$.

$$\therefore \text{直线 } l: y = -\frac{2}{3}x - 2 + 2 = -\frac{2}{3}x.$$

13. 若 $\sqrt{a+5} + |2025-2b| = 0$, 则点 $P(a, b)$ 到 y 轴的距离是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 先根据算术平方根和绝对值的非负性求出 a 的值, 再根据点到 y 轴距离的定义求解即可.

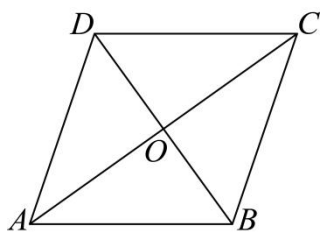
【详解】 解: $\because$ 算术平方根和绝对值都是非负数, 且 $\sqrt{a+5} + |2025-2b| = 0$,

$$\therefore a+5=0, \quad 2025-2b=0,$$

$$\therefore a=-5, \quad b=\frac{2025}{2}.$$

平面直角坐标系中, 点 $P(a, b)$ 到 y 轴的距离为横坐标的绝对值, 即 $|a| = |-5| = 5$.

14. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 5cm, 其中对角线 AC 的长为 8cm, 则 AB 边上的高为_____ cm.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质, 勾股定理等知识点, 熟练掌握菱形的对角线垂直且互相平分是解题的关键.

由菱形的性质可知 $AC \perp BD$, 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中可求得 OB 的长, 则可求得 BD 的长, 进而可求得菱形的面积, 如此一来即可求得 AB 边上的高.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore AC \perp BD, \text{ 且 } OA = OC = \frac{1}{2}AC = 4\text{cm}, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

∵ 菱形的边长为 5cm ，

$$\therefore AB = 5\text{cm},$$

∴ 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中，根据勾股定理得：

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm},$$

$$\therefore BD = 2OB = 6\text{cm},$$

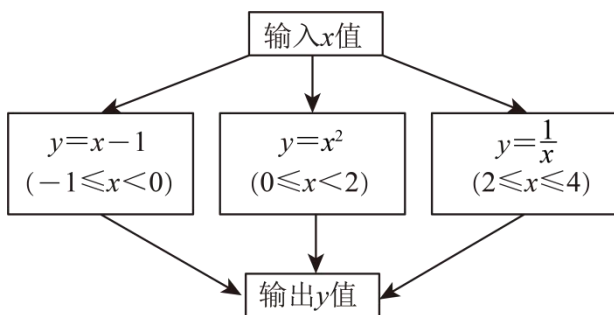
$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24\text{cm}^2,$$

又∵ $S_{\text{菱形}ABCD} = AB \times AB$ 边上的高，

$$\therefore AB \text{ 边上的高} = \frac{S_{\text{菱形}ABCD}}{AB} = \frac{24}{5}\text{cm},$$

故答案为： $\frac{24}{5}$.

15. 根据如图所示程序计算函数值，若输入的 x 值为 $\frac{5}{2}$ ，则输出的函数值 y 为_____.



【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

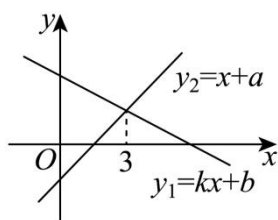
【分析】先判断输入 $x = \frac{5}{2}$ 所属的取值区间，再代入对应区间的函数解析式计算 y 的值.

【详解】解： $\frac{5}{2} = 2.5$ ，满足 $2 \leq 2.5 \leq 4$ ，因此选用解析式 $y = \frac{1}{x}$ ，

$$\text{将 } x = \frac{5}{2} \text{ 代入 } y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

16. 已知一次函数 $y_1 = kx + b$ 与 $y_2 = x + a$ 的图象如图所示，有下列结论：① $a < 0$ ；② $b > 0$ ；③关于 x 的

方程 $kx + b = x + a$ 的解为 $x = 3$ ；④当 $x \leq 3$ 时， $y_2 \geq y_1$ ，其中正确的结论有_____个.



【答案】 3

【解析】

【分析】 利用一次函数的图像与性质对①②进行判断；利用两直线的交点的横坐标为 3 可对③进行判断；利用两直线的位置关系对④进行判断.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y_1 = kx + b$ 经过第一、二、四象限，

$$\therefore k < 0, \quad b > 0.$$

故②正确.

$\because$ 一次函数 $y_2 = x + a$ 与 y 轴的交点在 x 轴的下方，

$$\therefore a < 0.$$

故①正确.

$\because$ 当 $x = 3$ 时， $y_1 = y_2$ ，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $kx + b = x + a$ 的解为 $x = 3$.

故③正确.

$\because$ 当 $x \leq 3$ 时，

一次函数 $y_1 = kx + b$ 在一次函数 $y_2 = x + a$ 的上方，

$$\therefore \text{当 } x \leq 3 \text{ 时， } y_2 \leq y_1.$$

故④错误.

综上所述，其中正确的结论有 3 个.

17. 在平面直角坐标系中，若点 $A(3,0)$ ，点 $B(0,1)$ ，点 P 在 y 轴上，且三角形 PAB 的面积为 6，则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $(0,5)$ 或 $(0,-3)$

【解析】

【分析】设点 P 的坐标为 $(0, p)$ ，由 P, B 都在 y 轴上，可得线段 PB 的长度为 $|p-1|$ ，点 A 到 y 轴的距离是 $\triangle PAB$ 中 PB 边上的高，长度为 3，根据三角形面积公式列方程求解 p 即可得到点 P 的坐标。

【详解】解：设点 P 坐标为 $(0, p)$ ，

$\because$ 点 P 在 y 轴上，点 B 的坐标为 $(0, 1)$ ，

$$\therefore PB = |p-1|,$$

$\because$ 点 A 的坐标为 $(3, 0)$ ，

$\therefore$ 点 A 到 y 轴的距离为 3，即 $\triangle PAB$ 中 PB 边上的高为 3，

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot 3 = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} |p-1| \times 3 = 6,$$

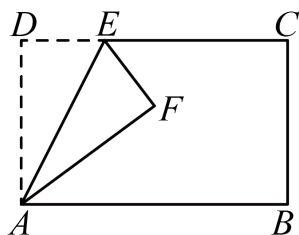
$$\text{整理得 } |p-1| = 4,$$

$$\therefore p-1 = 4 \text{ 或 } p-1 = -4,$$

$$\text{解得 } p = 5 \text{ 或 } p = -3,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (0, 5) \text{ 或 } (0, -3).$$

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AD = 5$ ， $AB = 8$ ，点 E 为射线 DC 上一个动点，将 $\triangle ADE$ 沿直线 AE 折叠，当点 D 的对应点 F 刚好落在线段 AB 的垂直平分线上时， DE 的长为_____.



【答案】 2.5 或 10

【解析】

【分析】设 AB 的垂直平分线交 AB 于点 N ，交直线 CD 于点 M ，根据题意分两种情况点 F 在矩形 $ABCD$ 内部时，点 F 在矩形 $ABCD$ 外部（ AB 下方）时，构造直角三角形，结合矩形的性质和判定，折叠的性质，垂直平分线性，勾股定理求解，即可解题。

【详解】解：设 AB 的垂直平分线交 AB 于点 N ，交直线 CD 于点 M ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AD = 5$ ， $AB = 8$ ，

$$\therefore CD = AB = 8, \angle D = \angle DAB = 90^\circ, CD \parallel AB,$$

$\because MN$ 垂直平分 AB ,

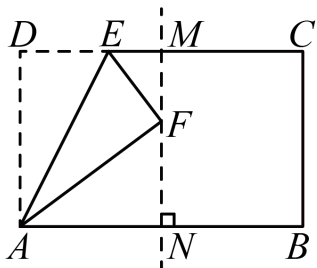
$$\therefore AN = \frac{1}{2}AB = 4, \quad MN \perp AB, \quad MN \perp CD,$$

$$\therefore DM = AN = 4, \quad MN = AD = 5,$$

由折叠的性质可知: $AF = AD = 5$, $EF = DE$,

设 $DE = x$, 则 $EF = x$,

分两种情况讨论: 情况一: 当点 F 在矩形 $ABCD$ 内部时,



$$\text{在 Rt}\triangle ANF \text{ 中, } NF = \sqrt{AF^2 - AN^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore MF = MN - NF = 5 - 3 = 2,$$

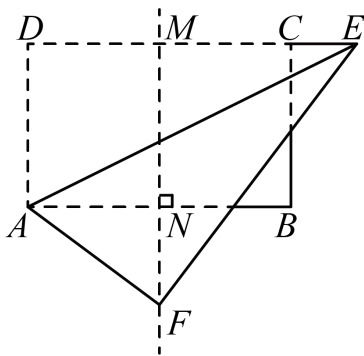
$$\text{在 Rt}\triangle EMF \text{ 中, } EM = |DM - DE| = |4 - x|$$

$$\text{由勾股定理得: } EM^2 + MF^2 = EF^2 \text{ 即 } (4 - x)^2 + 2^2 = x^2,$$

解得 $x = 2.5$,

$$\therefore DE = 2.5;$$

情况二: 当点 F 在矩形 $ABCD$ 外部 (AB 下方) 时,



$$\text{在 Rt}\triangle ANF \text{ 中, } NF = \sqrt{AF^2 - AN^2} = 3,$$

$$\therefore MF = MN + NF = 5 + 3 = 8,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EMF \text{ 中, } EM = |DE - DM| = |x - 4|,$$

$$\text{由勾股定理得: } EM^2 + MF^2 = EF^2,$$

$$\text{即 } (x-4)^2 + 8^2 = x^2,$$

解得 $x=10$,

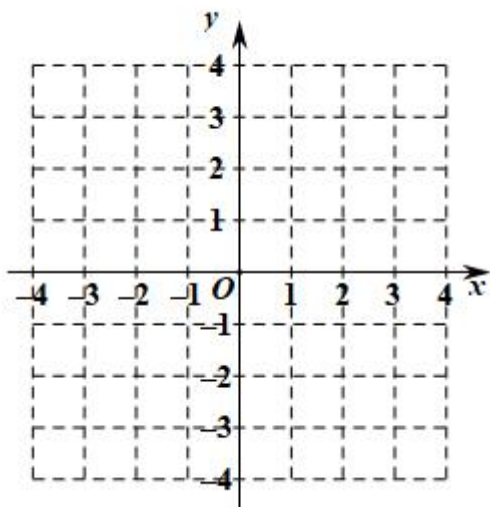
$$\therefore DE=10,$$

综上所述, DE 的长为 2.5 或 10,

故答案为: 2.5 或 10.

三、解答题

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图像经过点 $(3,0)$ 和 $(-3,-2)$.



(1) 求该一次函数的解析式;

(2) 在所给的坐标系中画出该一次函数图像, 并求它的图像与坐标轴围成的三角形的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{3}x - 1$

(2) 画图见解析; $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 待定系数法求解析式即可求解;

(2) 根据一次函数与坐标轴的交点画出函数图像, 由交点坐标, 根据三角形面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解: 因为一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图像经过点 $(3,0)$ 和 $(-3,-2)$, 所以 $\begin{cases} 3k+b=0, \\ -3k+b=-2. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=\frac{1}{3}, \\ b=-1. \end{cases}$ 所以一次函数的解析式是 $y = \frac{1}{3}x - 1$.

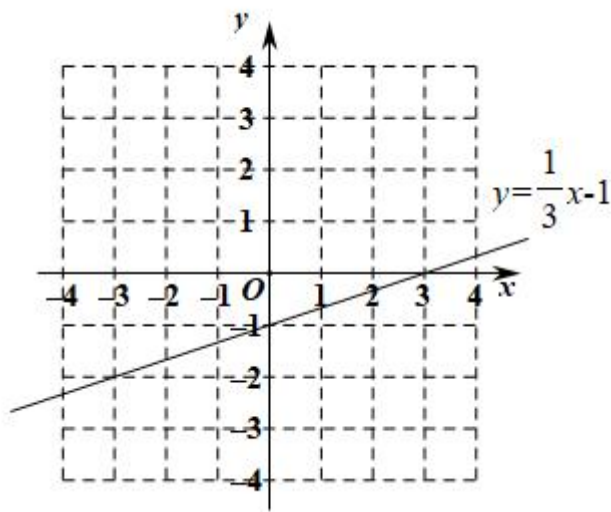
【小问2 详解】

该一次函数的图像如图所示. 令 $x=0$, 则 $y=-1$.

该一次函数的图像与 x 轴和 y 轴的交点坐标分别是 $(3,0)$ 和 $(0,-1)$.

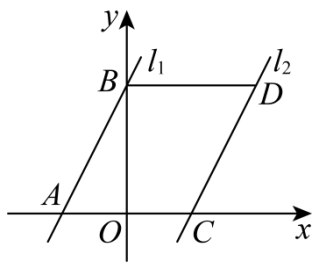
设所求的三角形的面积为 S ,

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}.$$



【点睛】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 求一次函数与坐标轴交点, 画一次函数, 掌握一次函数的性质是解题的关键.

20. 如图, 已知直线 $l_1: y=2x+4$, 分别与 x 轴, y 轴交于点 A , B .



(1) 求点 A , B 的坐标.

(2) 将直线 l_1 向右平移 4 个单位得到直线 l_2 , l_2 与 x 轴交于点 C , 以 AB , AC 为边作 $\square ACDB$.

①求 $\square ACDB$ 面积.

②根据图象, 直接写出 D 点坐标.

【答案】 (1) $A(-2,0)$ 、 $B(0,4)$

(2) ①16; ② $D(4,4)$

【解析】

【分析】(1) 分别将 $x=0$, $y=0$ 代入 $l_1: y=2x+4$ 中, 分别求出 $y=4$, $x=-2$ 即可求得点 A , B 的坐标.

(2) ①根据平移的性质可得 $AC=BD=4$, 结合 $B(0,4)$, 可得 $\square ACDB$ 面积为 $\frac{1}{2}AC \cdot BO = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.

②由题意可得 $BD=4$, $BD \parallel x$ 轴, $y_B=4$, 结合 $y_D=y_B=4$, 即可求得 D 点坐标.

【小问1详解】

解: 将 $x=0$ 代入 $l_1: y=2x+4$ 中, 可得 $y=4$,

将 $y=0$ 代入 $l_1: y=2x+4$ 中, 可得 $0=2x+4$,

解得: $x=-2$,

$\therefore$ 点 A , B 的坐标为 $A(-2,0)$ 、 $B(0,4)$,

【小问2详解】

解: ① $\because$ 直线 l_1 向右平移 4 个单位得到直线 l_2 ,

$\therefore AC=BD=4$

$\because B(0,4)$

$\therefore BO=4$

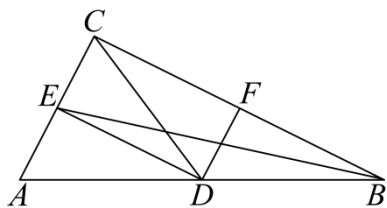
$\therefore \square ACDB$ 面积为 $AC \cdot BO = 4 \times 4 = 16$.

②由题意可得 $BD=4$, $BD \parallel x$ 轴, $y_B=4$,

$\therefore y_D=y_B=4$,

$\therefore D$ 点坐标为 $(4,4)$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AB 上一点, 且 $AD=DC$, DE 平分 $\angle ADC$ 交边 AC 于点 E , DF 平分 $\angle BDC$ 交边 BC 于点 F , $\angle DFC=90^\circ$.



(1) 求证: 四边形 $CEDF$ 是矩形;

(2) 连接 BE ，若 $AE=1$ ， $AD=\sqrt{5}$ ，求 BE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{17}$

【解析】

【分析】(1) 证 $\angle EDF=90^\circ$ ， $\therefore \angle CED=90^\circ$ ，再由 $\angle DFC=90^\circ$ ，即可得出结论；

(2) 先求出 $\angle DAE=\angle DCE$ ，由勾股定理求出 DE ，证出 DE 是 BC 的中位线得出 $BC=2DE=4$ ，由勾股定理即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because DE$ 平分 $\angle ADC$ ， DF 平分 $\angle BDC$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle CDE = \frac{1}{2} \angle ADC, \quad \angle CDF = \frac{1}{2} \angle BDC,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle CDF = \frac{1}{2} (\angle ADC + \angle BDC) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

即 $\angle EDF=90^\circ$ ，

$\because AD=DC$ ， DE 平分 $\angle ADC$ ，

$$\therefore \angle CED = \angle AED = 90^\circ,$$

又 $\because \angle DFC=90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是矩形.

【小问 2 详解】

解：由 (1) 可知，四边形 $CEDF$ 是矩形，

$$\therefore \angle CED = \angle ECF = 90^\circ,$$

$\because AD=DC$ ， $DE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle DAE = \angle DCE, \quad DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 2, \quad E \text{ 是 } AC \text{ 的中点.}$$

$$\because \angle DAE + \angle DBC = \angle DCE + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB,$$

$$\therefore DC = DB,$$

$\therefore AD = DB$ ，即 D 是 AB 的中点.

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$$\therefore BC = 2DE = 4,$$

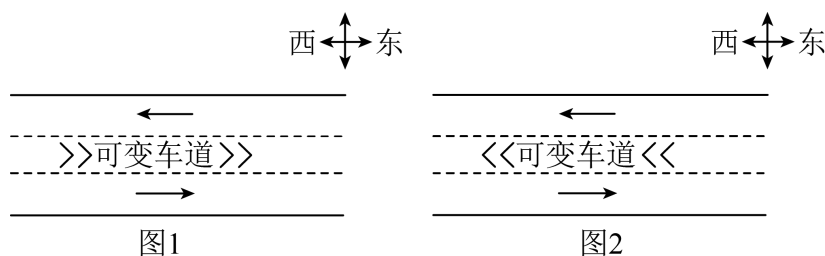
$$\therefore BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{17}$$

22. 某条东西方向道路双向共有三条车道，在早晚高峰经常会拥堵，数学研究小组希望改善道路拥堵情况，

他们对该路段的交通量（辆/分钟）和时间进行了统计和分析，得到下列表格，并发现时间和交通量的变化规律符合一次函数的特征.

时间 x	8时	11时	14时	17时	20时
y_1 自西向东交通量（辆/分钟）	10	16	22	28	34
y_2 自东向西交通量（辆/分钟）	25	22	19	16	13

- (1) 请用一次函数分别表示 y_1 与 x 、 y_2 与 x 之间的函数关系. (不写定义域)
- (2) 如图，同学们希望设置可变车道来改善拥堵状况，根据车流量情况改变可变车道的行车方向. 单位时间内双向交通总量为 $v_{\text{总}} = y_1 + y_2$ ，车流量大的方向交通量为 v_m ，经查阅资料得：当 $v_m \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ ，需要使可变车道行车方向与拥堵方向相同，以改善交通情况. 该路段从 8 时至 20 时，如何设置可变车道行车方向以缓解交通拥堵，并说明理由.



【答案】(1) $y_1 = 2x - 6$, $y_2 = -x + 33$

(2) 8 时到 9 时，可变车道的方向设置为自东向西；18 时到 20 时，可变车道的方向设置为自西向东，理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的应用，待定系数法求一次函数解析式，一元一次不等式的应用. 待定系数法求一次函数解析式是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 根据 $v_{\text{总}} = y_1 + y_2$ ，求出 $v_{\text{总}}$ 关于 x 的函数关系式，分 $y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ ， $y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ 两种情况讨论，求出对应

x 的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解: 设 $y_1 = k_1x + b_1$ (k_1 、 b_1 为常数, 且 $k_1 \neq 0$).

将 $x=8$, $y_1=10$ 和 $x=11$, $y_1=16$ 代入 $y_1 = k_1x + b_1$,

$$\text{得} \begin{cases} 8k_1 + b_1 = 10 \\ 11k_1 + b_1 = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = 2 \\ b_1 = -6 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = 2x - 6.$$

设 $y_2 = k_2x + b_2$ (k_2 、 b_2 为常数, 且 $k_2 \neq 0$).

将 $x=8$, $y_2=25$ 和 $x=11$, $y_2=22$ 代入 $y_2 = k_2x + b_2$,

$$\text{得} \begin{cases} 8k_2 + b_2 = 25 \\ 11k_2 + b_2 = 22 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = -1 \\ b_2 = 33 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = -x + 33.$$

【小问 2 详解】

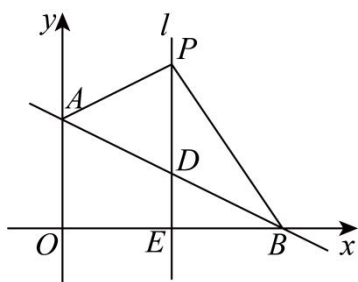
$$v_{\text{总}} = y_1 + y_2 = 2x - 6 - x + 33 = x + 27.$$

当 $y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ 时, 即 $2x - 6 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$, 解得 $x \geq 18$;

当 $y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ 时, 即 $-x + 33 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$, 解得 $x \leq 9$.

8 时到 9 时, 可变车道的方向设置为自东向西; 18 时到 20 时, 可变车道的方向设置为自西向东.

23. 如图, 平面直角坐标系中, 直线 $AB: y = -\frac{1}{2}x + b$ 交 y 轴于点 A , 交 x 轴于点 $B(8, 0)$.



- (1) 求直线 AB 的表达式和点 A 的坐标;
- (2) 直线 l 垂直平分 OB 交 AB 于点 D , 交 x 轴于点 E , 点 P 是直线 l 上一动点, 且在点 D 的上方, 设点 P 的纵坐标为 n .
- ①用含 n 的代数式表示 $\triangle ABP$ 的面积;
- ②当 $S_{\triangle ABP} = 16$ 时, 求点 P 的坐标;
- ③在②的条件下, 在平面直角坐标系中是否存在点 Q , 使得 BPQ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 直线 AB 的函数表达式为: $y = -\frac{1}{2}x + 4$; 点 A 的坐标为 $(0, 4)$

(2) ① $S_{\triangle ABP} = 4n - 8 (n > 2)$; ②点 P 的坐标为 $(4, 6)$; ③存在, 点 Q 的坐标为 $(10, 10)$ 或 $(-2, 2)$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法即可求解解析式, 再求解 B 的坐标即可;

(2) ①由 OB 的长度结合直线 l 的垂直平分 OB , 可求出 OE , BE 的长度, 利用一次函数解析式求出点 D 坐标, 进而用含 n 的式子表示点 P 坐标, 再利用面积公式即可求解;

②由①的结论, 再建立方程求解即可;

③当点 Q 在点 P 左边, 当点 Q 在点 P 右边, 构造全等即可求解.

【小问 1 详解】

解: 将 $B(8, 0)$ 代入直线 $AB: y = -\frac{1}{2}x + b$

得 $0 = -\frac{1}{2} \times 8 + b$,

解得: $b = 4$,

$\therefore$ 直线 AB 的函数表达式为: $y = -\frac{1}{2}x + 4$,

当 $x = 0$ 时, $y = 4$,

则点 A 的坐标为: $(0,4)$,

【小问 2 详解】

解: ① $\because$ 直线 l 垂直平分 OB , $OB = 8$,

则 $OE = BE = 4$,

当 $x = 4$ 时, $y = 2$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为: $(4,2)$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为: $(4,n)$,

$\therefore PD = n - 2$,

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ADP} + S_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} PD \cdot OE + \frac{1}{2} PD \cdot BE = \frac{1}{2} \times (n-2) \times 4 + \frac{1}{2} \times (n-2) \times 4 = n-8 (n > 2);$$

② 当 $S_{\triangle ABP} = 16$,

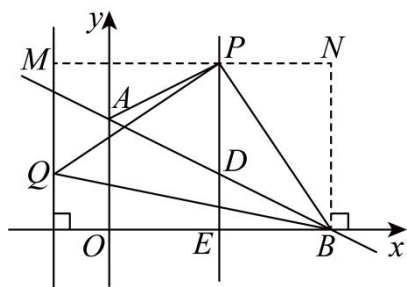
$$\therefore 4n - 8 = 16,$$

解得: $n = 6$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4,6)$;

③ 存在.

当点 Q 在点 P 左边, 如图, 过点 P 作 $PM \parallel x$ 轴, 过点 Q 作 $QM \perp x$ 轴, 交 PM 于点 M , 过点 B 作 $BN \perp x$ 轴, 交 PM 于点 N ,



$$\therefore \angle QMP = \angle BNP = 90^\circ$$

$\therefore \triangle BPQ$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BPQ = 90^\circ, BP = QP,$$

$$\therefore \angle MPQ + \angle BPN = 90^\circ, \angle BPN + \angle PBN = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MPQ = \angle NBP$$

在 $\triangle QMP$ 和 $\triangle PNB$ 中,

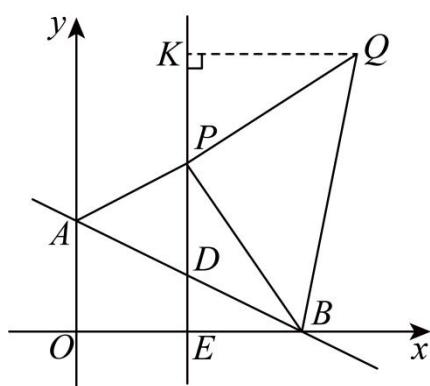
$$\begin{cases} \angle QMP = \angle BNP \\ \angle MPQ = \angle NBP \\ QP = PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle QMP \cong \triangle PNB (\text{AAS}),$$

$$\therefore MP = BN = 6, PN = QM = 4,$$

$$\therefore Q(-2, 2),$$

当点 Q 在点 P 右边, 如图, 过点 Q 作 $QK \perp l$, 交直线 l 于点 K ,



$$\therefore \angle QKP = 90^\circ$$

$\therefore \triangle BPQ$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BPQ = 90^\circ, BP = QP,$$

$$\therefore \angle BPE + \angle QPK = 90^\circ, \angle QPK + \angle POK = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BPE = \angle POK$$

在 $\triangle BPE$ 和 $\triangle POK$ 中,

$$\begin{cases} \angle PEB = \angle QKP \\ \angle BPE = \angle POK \\ BP = QP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPE \cong \triangle POK (\text{AAS}),$$

$$\therefore PE = KQ = 6, BE = PK = 4,$$

$$\therefore Q(10, 10),$$

综上, 点 Q 的坐标为 $(10,10)$ 或 $(-2,2)$.