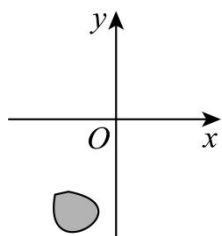


2025 学年第二学期八年级数学学科期中练习

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题 (每小题 3 分, 本大题满分 18 分)

1. 在一次科学探测活动中, 探测人员发现一目标在如图所示的阴影区域内, 则该目标的坐标可能是 ()



- A. $(-8, -20)$ B. $(6, -30)$ C. $(5, 40)$ D. $(-2, 10)$

【答案】A

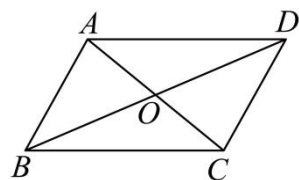
【解析】

【详解】解: 因为目标在第三象限,

所以其坐标的符号是 $(-, -)$,

各选项只有 A 符合题意.

2. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , $AB = CD$, 要使四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 则需添加一个条件, 这个条件可以是 ()



- A. $OA = OC$ B. $OB = OD$ C. $AD \parallel BC$ D. $\angle ABD = \angle BDC$

【答案】D

【解析】

【分析】对于 D, 由一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明即可.

【详解】解: A、B、C 均不能证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形, D 可以,

$$\because \angle ABD = \angle BDC,$$

$$\therefore AB \parallel CD$$

$$\because AB = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

3. 下列命题正确的是 ()

- A. 对角线相等的四边形是矩形
- B. 对角线互相垂直的四边形是菱形
- C. 对角线相等的菱形是正方形
- D. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形

【答案】C

【解析】

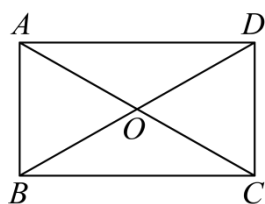
【详解】解：∵A 选项中，对角线相等的平行四边形才是矩形，任意对角线相等的四边形不一定是矩形，例如等腰梯形，∴A 错误；

∵B 选项中，对角线互相垂直平分的四边形才是菱形，仅对角线互相垂直的四边形不一定是菱形，∴B 错误；

∵菱形是邻边相等的平行四边形，对角线相等的菱形满足正方形的判定条件，∴对角线相等的菱形是正方形，C 正确；

∵D 选项中，一组对边平行另一组对边相等的四边形也有可能是等腰梯形，∴D 错误.

4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $\triangle BOC$ 比 $\triangle AOB$ 的周长大 2，矩形 $ABCD$ 的周长为 28，则 AB 的长为 ()



- A. 6
- B. 8
- C. 13
- D. 15

【答案】A

【解析】

【分析】根据矩形的性质得出 $OA = OC = OB = OD$ ，结合 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 的周长差得出 $BC - AB = 2$ ，再根据矩形周长得出 $AB + BC = 14$ ，联立求解即可.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore OA = OC = OB = OD, \quad AB = CD, \quad AD = BC,$$

∵ $\triangle BOC$ 的周长比 $\triangle AOB$ 的周长大 2，

$$\therefore (OB + OC + BC) - (OA + OB + AB) = 2,$$

$$\text{即 } BC - AB = 2,$$

∵矩形 $ABCD$ 的周长为 28，

$$\therefore 2(AB + BC) = 28,$$

即 $AB + BC = 14$,

$$\text{联立} \begin{cases} BC - AB = 2 \\ AB + BC = 14 \end{cases},$$

解得 $AB = 6$, $BC = 8$.

5. 在平面直角坐标系内, 已知在 y 轴与直线 $x = 3$ 之间有一点 $M(a, 3)$, 如果该点关于直线 $x = 3$ 的对称点 N 的坐标为 $(5, 3)$, 那么 a 的值为 ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】根据坐标的对称性即可求解.

【详解】解: $\because$ 点 $M(a, 3)$ 关于直线 $x = 3$ 的对称点 N 的坐标为 $(5, 3)$,

$\therefore$ 对称点 N 到直线 $x = 3$ 的距离为 2.

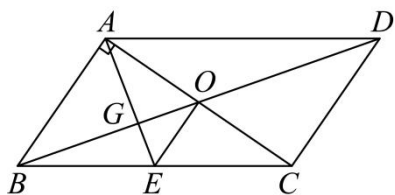
$\therefore$ 点 $M(a, 3)$ 到直线 $x = 3$ 的距离为 2,

$\therefore a = 1$.

故选 D.

【点睛】此题主要考查对称性的应用, 解题的关键是熟知坐标对称的特点.

6. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 且 $AB \perp AC$, E 为 BC 中点, 连接 AE 交 BD 于点 G , 则下列结论中不一定成立的是 ()



A. $AD = 2AE$

B. $S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} S_{\triangle BOC}$

C. $AE \perp BD$

D. $AG = \frac{2}{3} BE$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质、直角三角形斜边中线的性质以及三角形重心的性质逐一判断即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC$, $OA = OC$.

$\because AB \perp AC$, E 为 BC 中点,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AE = \frac{1}{2}BC = BE = CE$,

$\therefore AD = BC = 2AE$, 故 A 成立;

$\therefore OA = OC$,

$\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COE}$,

$\therefore E$ 为 BC 中点,

$\therefore S_{\triangle COE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BOC}$,

$\therefore S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BOC}$, 故 B 成立;

$\therefore OA = OC$, E 为 BC 中点,

$\therefore AE$ 、 BD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore AG = \frac{2}{3}AE$,

$\therefore AE = BE$,

$\therefore AG = \frac{2}{3}BE$, 故 D 成立;

只有当 $AB = AC$ 时, $AE \perp BD$ 才成立, 题目未给出此条件, 故 C 不一定成立.

二、填空题 (每小题 2 分, 本大题满分 24 分)

7. 已知点 $A(2m-1, m+2)$ 在 x 轴上, 则 $m =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查坐标轴上的点的坐标的特点, 解决本题的关键是掌握点在 x 轴上时, 纵坐标为 0; 在 y 轴上时, 横坐标等于 0. 根据点在坐标轴上的坐标特点进行分析解答即可.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(2m-1, m+2)$ 在 x 轴上,

$\therefore m+2=0$,

解得: $m=-2$;

故答案为: -2.

8. 点 P 在第二象限, 它到 x 轴的距离是 3, 到 y 轴的距离是 4, 则点 P 的坐标是_____.

【答案】 $(-4, 3)$

【解析】

【分析】根据第二象限点的符号 $(-, +)$ ，点到直线的距离进行判定即可求解.

【详解】解：设点 $P(x, y)$,

$\because$ 点 P 到 x 轴的距离是3，到 y 轴的距离是4，

$$\therefore |y| = 3, |x| = 4,$$

$\because$ 点 P 在第二象限，

$$\therefore x = -4, y = 3,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(-4, 3)$.

9. 在平面直角坐标系中，过点 $P(3, -5)$ 且垂直于 y 轴的直线是_____.

【答案】

$$y = -5$$

【解析】

【分析】垂直于 y 轴的直线上所有点的纵坐标相等，根据已知点 P 的坐标即可确定直线方程.

【详解】解：在平面直角坐标系中，垂直于 y 轴的直线上所有点的纵坐标相同.

因为直线过点 $P(3, -5)$ ，该点纵坐标为 -5 ，

所以该直线可表示为 $y = -5$.

10. 在平面直角坐标系中，已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点在原点. 若 $A(-\sqrt{5}, 2)$ ，则点 C 的坐标是_____.

【答案】 $(\sqrt{5}, -2)$

【解析】

【分析】由平行四边形的中心对称性可知， A ， C 关于原点对称，根据对称点的坐标规律即可求出点 C 的坐标.

【详解】解： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点为对称中心且在原点，

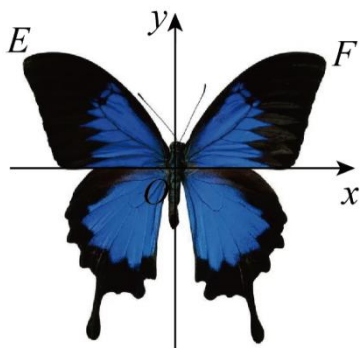
$\therefore A$ ， C 关于原点对称，

$\because$ 关于原点对称的点的横，纵坐标均互为相反数，

$$\text{又} \because A(-\sqrt{5}, 2),$$

$$\therefore C(\sqrt{5}, -2).$$

11. 剪纸艺术是最古老的中国民间艺术之一，很多剪纸作品体现了数学中的对称美. 如图 6，蝴蝶剪纸是一幅轴对称图形，将其放在平面直角坐标系中，点 E 的坐标为 $(-2, -n)$ ，其关于 y 轴对称的点 F 的坐标为 $(2, -m+1)$ ，则 $(n-m)^{2025} =$ _____.



【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查点的坐标规律、代数式求值，利用关于 y 轴对称的点纵坐标相同，可得 $-n = -m+1$ ，即可求出答案.

【详解】 $\because$ 点 E 的坐标为 $(-2, -n)$ ，其关于 y 轴对称的点 F 的坐标为 $(2, -m+1)$ ，

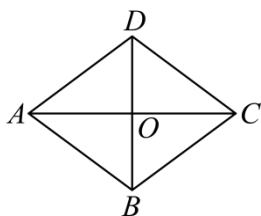
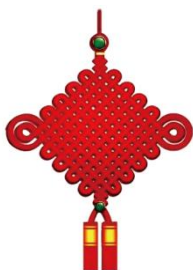
$$\therefore -n = -m+1$$

$$\therefore n-m = -1$$

$$\therefore (n-m)^{2025} = (-1)^{2025} = -1.$$

故答案为: -1 .

12. 中国结寓意团圆美满，以独特的东方神韵体现中国人民的智慧和深厚的文化底蕴，其示意图如图所示，菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC = 16\text{cm}$ ， $BD = 12\text{cm}$ ，则菱形边长为_____ cm .



【答案】 10

【解析】

【分析】 根据菱形对角线互相垂直平分的性质，求出两条对角线的一半长度，再在直角三角形中利用勾股

定理计算斜边长即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

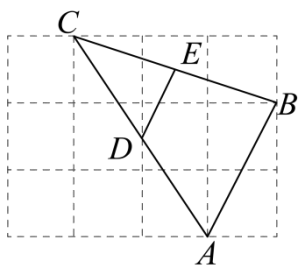
$$\therefore AC \perp BD, \quad OA = \frac{1}{2}AC, \quad OB = \frac{1}{2}BD$$

$$\because AC = 16\text{cm}, \quad BD = 12\text{cm}$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2} \times 16 = 8(\text{cm}), \quad OB = \frac{1}{2} \times 12 = 6(\text{cm})$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 中, 由勾股定理得 } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10(\text{cm}).$$

13. 如图, 在正方形网格中, 每个小正方形的边长都是 1, 点 A, B, C 都在格点上, 点 D, E 分别是线段 AC, BC 的中点, 则 DE 的长为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题可先利用勾股定理求出线段 AB 的长度, 再根据三角形中位线定理得出 DE 与 AB 的数量关系, 进而求出 DE 的长.

【详解】解: 由题意得, A, B 两点在网格中的水平距离为 1, 垂直距离为 2.

$\because$ 每个小正方形的边长都是 1,

$$\therefore AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$\because D, E$ 分别是线段 AC, BC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

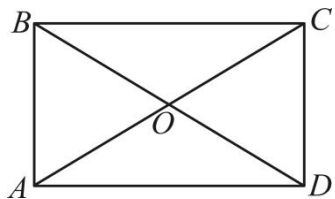
14. 已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O , $\triangle ABO$ 是等边三角形. 如果 $AB = 4$, 则 BC 的长是_____.

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先根据矩形的性质得到对角线相等且互相平分，结合等边三角形的性质求出矩形对角线 AC 的长度，再利用勾股定理计算 BC 的长即可.

【详解】解：如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad AC = BD, \quad OA = \frac{1}{2}AC, \quad OB = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$\because \triangle ABO$ 是等边三角形，

$$\therefore OA = AB = 4,$$

$$\therefore AC = 2OA = 8,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

15. 已知 ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(3,4)$ 、 $B(-3,2)$ 、 $C(1,-2)$ ，则 ABC 的形状是_____.

【答案】等腰三角形

【解析】

【分析】利用两点间距离公式求出 ABC 三边的长度，根据边的数量关系判断三角形的形状.

【详解】解： $AB^2 = (3+3)^2 + (4-2)^2 = 36 + 4 = 40$ ， $AC^2 = (3-1)^2 + (4+2)^2 = 4 + 36 = 40$ ，

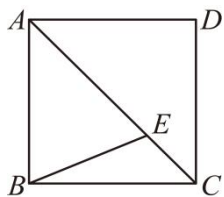
$$BC^2 = (-3-1)^2 + (2+2)^2 = 16 + 16 = 32,$$

$$\text{可得 } AB^2 = AC^2,$$

$$\text{即 } AB = AC,$$

因此 ABC 是等腰三角形.

16. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 在对角线 AC 上且 $AE = AB$ ，则 CE 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】先由正方形的性质结合勾股定理求解 AC ，再由 $CE = AC - AE$ 求解即可。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

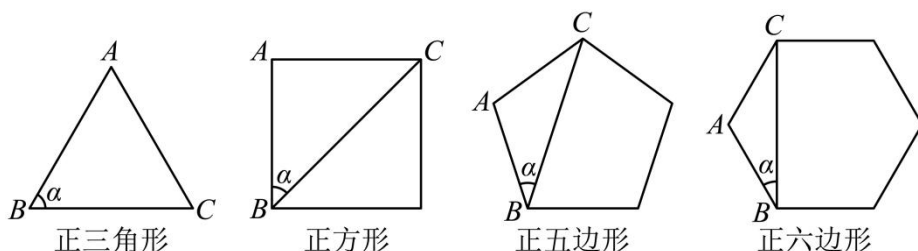
$$\therefore AB = BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore AE = AB = 1$$

$$\therefore CE = AC - AE = \sqrt{2} - 1.$$

17. 如图所示为一组正多边形，观察每个正多边形中 $\angle ABC$ 的变化情况，设 $\angle ABC = \alpha$ ，根据 α 的变化规律，请探究 α 与正多边形边数 n 的关系，并用含 n (n 为正整数， $n \geq 3$) 的式子表示 α ，则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{180^\circ}{n}$

【解析】

【分析】分别计算正三角形、正方形、正五边形、正六边形中 $\angle ABC$ 的度数，观察数值与边数 n 的关系，结合正多边形内角公式和等腰三角形性质推导通项公式。

【详解】解：当 $n = 3$ 时， $\triangle ABC$ 为正三角形， $\alpha = 60^\circ = \frac{180^\circ}{3}$ ；

当 $n = 4$ 时，四边形为正方形， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\alpha = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ = \frac{180^\circ}{4}$ ；

当 $n = 5$ 时，正五边形中 $AB = AC$ ， $\angle BAC = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$ ， $\alpha = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ = \frac{180^\circ}{5}$ ；

当 $n = 6$ 时，正六边形中 $AB = AC$ ， $\angle BAC = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$ ， $\alpha = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ = \frac{180^\circ}{6}$ ；

由此可知，对于正 n 边形， $AB = AC$ ， $\angle BAC$ 为正 n 边形的一个内角。

根据多边形内角和公式， $\angle BAC = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ 。

$$\therefore \alpha = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \frac{180^\circ - \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}}{2} = \frac{180^\circ \left(1 - \frac{n-2}{n}\right)}{2} = \frac{180^\circ \cdot \frac{2}{n}}{2} = \frac{180^\circ}{n}.$$

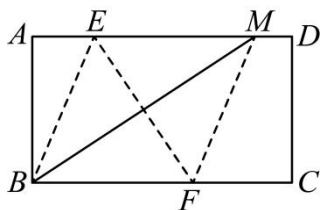
18. 矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 7$, 点 M 在边 AD 所在的直线上, 且 $DM = 1$, 将矩形纸片 $ABCD$ 折叠, 使点 B 与点 M 重合, 折痕与射线 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F , 则线段 EF 的长度为_____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ 或 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 先利用勾股定理求出 BM 的长度, 再根据折叠的性质证明四边形 $BEMF$ 是菱形, 在 $Rt\triangle ABE$ 中用勾股定理求出菱形的边长 BE , 最后利用菱形的面积公式 (对角线乘积的一半) 求出折痕 EF 的长度, 同时分点 M 在线段 AD 上和点 M 在 AD 延长线上两种情况讨论.

【详解】 解: 如图, 点 M 在线段 AD 上时, 连接 BE 、 MF ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$AB = 4$, $AD = BC = 7$, $DM = 1$, $\angle A = 90^\circ$. $AD \parallel BC$,

$\therefore AM = AD - DM = 7 - 1 = 6$,

在 $Rt\triangle ABM$ 中,

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

由折叠的性质得: EF 垂直平分 BM , $BE = ME$, $BF = MF$, $\angle MEF = \angle BEF$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle MEF = \angle BFE = \angle BEF$,

$\therefore BE = BF = MF = EM$,

$\therefore$ 四边形 $BEMF$ 是菱形.

设 $BE = x$, 则 $AE = 6 - x$,

在 $Rt\triangle ABE$ 中, 由勾股定理得 $AB^2 + AE^2 = BE^2$,

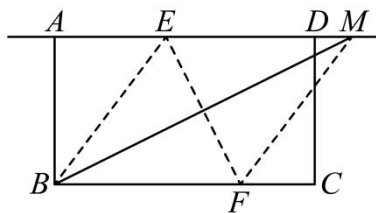
$$\therefore 4^2 + (6 - x)^2 = x^2,$$

解得 $x = \frac{13}{3}$, 即菱形边长 $BE = \frac{13}{3}$.

$$\text{菱形面积 } S = BF \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot EF, \text{ 即 } \frac{13}{3} \times 4 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times EF,$$

解得 $EF = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.

情况 2: 如图, 点 M 在 AD 的延长线上, 连接 BE 、 MF ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$AB = 4, \quad AD = 7, \quad DM = 1, \quad \angle BAD = 90^\circ. \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore AM = AD + DM = 7 + 1 = 8,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABM \text{ 中, } BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

由折叠的性质得: EF 垂直平分 BM , $BE = ME$, $BF = MF$, $\angle MEF = \angle BEF$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle MEF = \angle BFE = \angle BEF,$$

$$\therefore BE = BF = MF = EM,$$

$\therefore$ 四边形 $BEMF$ 是菱形.

设 $BE = y$, 则 $AE = 8 - y$,

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由勾股定理得 $AB^2 + AE^2 = BE^2$,

$$4^2 + (8 - y)^2 = y^2,$$

$$y = 5, \quad \text{即菱形边长 } BF = 5.$$

$$\text{菱形面积 } S = BF \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot EF,$$

$$\text{即 } 5 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times EF,$$

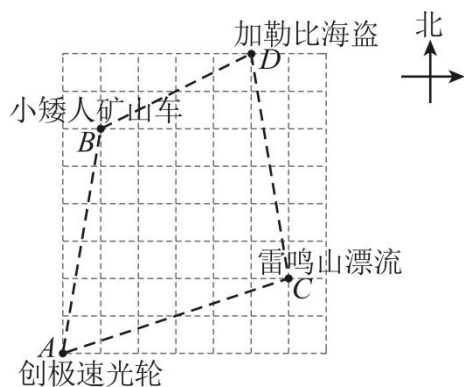
$$\text{解得 } EF = 2\sqrt{5}.$$

综上, 线段 EF 的长度为 $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ 或 $2\sqrt{5}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 共 58 分)

19. 上海迪士尼乐园拥有多个园区. 如图是上海迪士尼度假区部分景点游览图, 若分别以正东、正北方向为

x 轴、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，此时“雷鸣山漂流”景点 C 和“小矮人过山车”景点 B 的坐标分别是 $(2,1)$ 和 $(-3,5)$ 。



- (1) 请利用上述两个坐标，在图中画出正确的平面直角坐标系，并标注原点与坐标轴方向；
- (2) 根据你所建立的坐标系，写出“创极速光轮”景点 A 的坐标为_____；“加勒比海盗”景点 D 的坐标为_____；
- (3) 小明和同学假期到迪士尼游玩，从“创极速光轮”景点 A 处计划前往“加勒比海盗”景点 D ，他们看到游览图中有两条路线，分别是路线①： $A \rightarrow B \rightarrow D$ （图中虚线），路线②： $A \rightarrow C \rightarrow D$ （图中虚线），此时同学们出现了不同的选择。如果他们保持行走的速度不变，请利用平面直角坐标系的相关知识通过计算说明选择哪条路线能先到达目的地？

【答案】 (1) 见解析 (2) $(-4,-1)$ ， $(1,7)$

(3) 路线①先到达目的地

【解析】

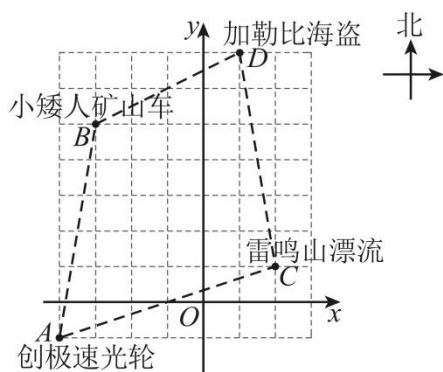
【分析】 (1) 根据“雷鸣山漂流”景点 C 和“小矮人过山车”景点 B 的坐标分别是 $(2,1)$ 和 $(-3,5)$ 即可确定作出平面直角坐标系；

(2) 根据坐标系即可求解；

(3) 根据两点之间距离公式分别求解 $AB + BD$ ， $AC + CD$ ，再比较即可。

【小问 1 详解】

解：如图，平面直角坐标系即为所求；



【小问 2 详解】

解：由坐标系可得，“创极速光轮”景点 A 的坐标为 $(-4, -1)$ ；“加勒比海盗”景点 D 的坐标为 $(1, 7)$ ；

【小问 3 详解】

解：路线①的路程为 $AB + BD = \sqrt{[-4 - (-3)]^2 + (-1 - 5)^2} + \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{37} + 2\sqrt{5}$ ；

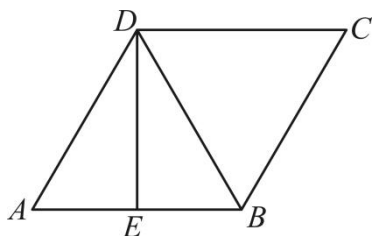
路线②的路程为 $AC + CD = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} + \sqrt{(1 - 2)^2 + (7 - 1)^2} = 2\sqrt{10} + \sqrt{37}$ ，

$$\because 2\sqrt{10} > 2\sqrt{5}$$

$$\therefore 2\sqrt{10} + \sqrt{37} > 2\sqrt{5} + \sqrt{37},$$

$\therefore$ 路线①的路程短，故路线①先到达目的地.

20. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， E 是 AB 的中点，且 $DE \perp AB$ ， $AE = 3$.



(1) 求 $\angle ABC$ 的度数；

(2) 求菱形 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) 120°

(2) $18\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 由菱形的性质得到 $AB = AD$ ， $AD \parallel BC$ ，可证明 DE 垂直平分 AB ，得到 $AD = BD$ ，则可证明 $\triangle ADB$ 是等边三角形，得到 $\angle A = 60^\circ$ ，再由平行线的性质可得答案；

(2) 求出 AB 的长，则可求出 AD 的长，再利用勾股定理求出 DE 的长，最后根据菱形的面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = AD, AD \parallel BC,$$

$\because E$ 是 AB 的中点, 且 $DE \perp AB$,

$\therefore DE$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore AB = AD = BD,$$

$\therefore \triangle ADB$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: $\because E$ 是 AB 的中点, $AE = 3$,

$$\therefore AB = 2AE = 6,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AD = AB = 6,$$

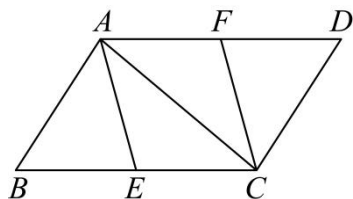
$\because DE \perp AB$,

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = AB \cdot DE = 6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}.$$

21. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别是边 BC 、 AD 的中点, 连接 AC 、 AE 、 CF .



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形;

(2) 若四边形 $AECF$ 是菱形, 求证: $AB \perp AC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, 由线段中点的定义得到

$AF = \frac{1}{2}AD$, $CE = \frac{1}{2}BC$, 则可证明 $AF = CE$, 再由 $AF \parallel CE$ 即可证明结论;

(2) 由菱形的性质和线段中点的定义可得 $BE = AE = CE$ ，由等边对等角和三角形内角和定理证明 $\angle EAB + \angle EAC = 90^\circ$ ，得到 $\angle BAC = 90^\circ$ ，据此可证明结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$\because$ 点 E 、 F 分别是边 BC 、 AD 的中点，

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AD, CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AF = CE,$$

又 $\because AF \parallel CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

证明： $\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形，

$$\therefore AE = CE,$$

$\because$ 点 E 是 BC 的中点，

$$\therefore BE = CE,$$

$$\therefore BE = AE = CE,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle B, \angle EAC = \angle ECA,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle B + \angle EAC + \angle ECA = 180^\circ,$$

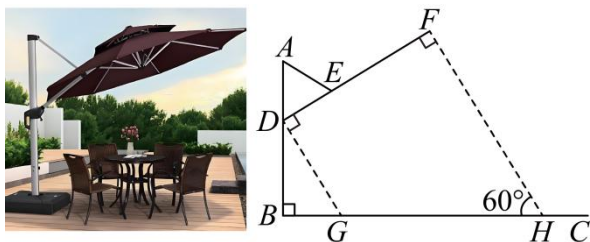
$$\therefore 2\angle EAB + 2\angle EAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \perp AC.$$

22. 小华家院子里有如图一把遮阳伞，他发现在一天当中，遮阳伞保持不动的情况下，伞下的投影长度会随着时间推移而变化，于是他测量了相关数据，并画出了侧面示意图。已知遮阳伞支架 AB 垂直于地面 BC ，点 D 在 AB 上， $AD = 0.8\text{m}$ ， D 、 E 、 F 三点共线， $DF = 3DE = 3AE$ 。如图，当太阳光线与 DF 垂直时，此时太阳光线与地面的夹角正好为 60° 。



- (1) 求 DE 的长;
 (2) 求 DF 落在地面上的投影 GH 的长.

【答案】(1) 0.8m

(2) $GH = \frac{8}{5}\sqrt{3}\text{m}$

【解析】

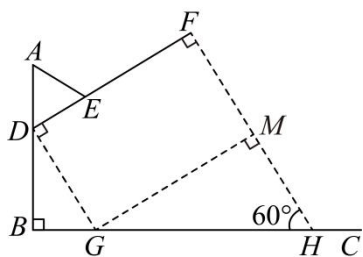
【分析】(1) 证明 $\triangle ADE$ 为等边三角形即可求解;

(2) 取 GH 中点 T , 连接 MT , 则 $DF = 2.4\text{m}$, 然后证明四边形 $DGMF$ 为矩形, 则 $GM = DF = 2.4\text{m}$, 再证明 $\triangle TMH$ 为等边三角形, 则 $MH = x (x > 0)$, 则 $GH = 2x$, 然后 $\text{Rt}\triangle GHM$ 运用勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过点 G 作 GM 垂直于 FH ,

由题意得, $\angle DGB = \angle FHB = 60^\circ$,



$$\therefore DF \perp DG, AB \perp BC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DGB = 90^\circ - \angle BDG = 60^\circ$$

$$\therefore AE = DE,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle A - \angle ADE = 60^\circ$$

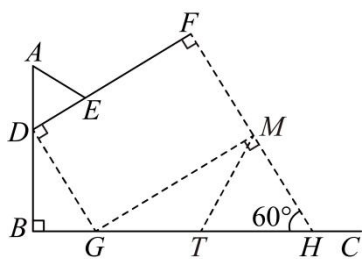
$$\therefore \angle A = \angle ADE = \angle AED = 60^\circ$$

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形,

$$\therefore DE = AD = 0.8\text{m};$$

【小问 2 详解】

解: 如图, 取 GH 中点 T , 连接 MT ,



$$\because DF = 3DE, \quad DE = 0.8\text{m}$$

$$\therefore DF = 2.4\text{m},$$

$$\because \angle FDG = \angle F = \angle FMG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGM = 360^\circ - \angle FDG - \angle F - \angle FMG = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FDG = \angle F = \angle FMG = \angle DGM = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $DGMF$ 为矩形,

$$\therefore GM = DF = 2.4\text{m},$$

$\because \angle GMH = 90^\circ$, 点 T 为 GH 的中点,

$$\therefore GT = TM = TH,$$

同理可证明 $\triangle TMH$ 为等边三角形,

$$\therefore MH = TH,$$

$$\therefore GT = TH = MH$$

设 $MH = x (x > 0)$, 则 $GH = 2x$

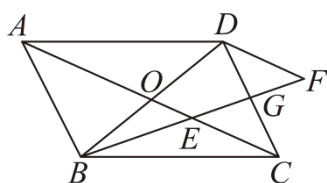
在 $\text{Rt}\triangle GHM$ 中, 由勾股定理得, $MH^2 + GM^2 = GH^2$

$$\therefore x^2 + 2.4^2 = (2x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{4}{5}\sqrt{3}$$

$$\therefore GH = \frac{8}{5}\sqrt{3}\text{m}.$$

23. 如图, 点 E 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的一点, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 点 F 在 BE 的延长线上, 且 $EF = BE$, EF 与 CD 相交于点 G .



(1) 求证: $DF \parallel AC$;

(2) 连接 DE 、 FC , 若 $BF = 2AB$, $EC = 2EO$, 求证: 四边形 $CFDE$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

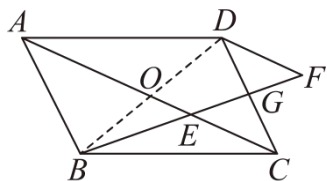
【解析】

【分析】(1) 连接 BD ，交 AC 于点 O ，证出 OE 是 $\triangle BDF$ 的中位线，得 $OE \parallel DF$ ，即 $DF \parallel AC$ ；

(2) 先证明 $DF = CE$ ，即可由一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，再证明对角线 $CD = EF$ ，由对角线相等的平行四边形是矩形即可证明。

【小问 1 详解】

证明：连接 BD ，交 AC 于点 O ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BO = DO,$$

$$\because BE = EF,$$

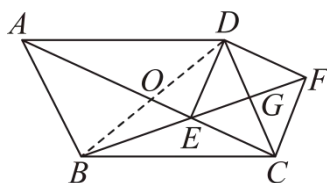
$\therefore OE$ 是 $\triangle BDF$ 的中位线，

$$\therefore OE \parallel DF,$$

即 $DF \parallel AC$ ；

【小问 2 详解】

证明：如图，



由 (1) 知 OE 是 $\triangle BDF$ 的中位线，

$$\therefore DF = 2OE$$

$$\because EC = 2EO$$

$$\therefore DF = EC,$$

由 (1) 知 $DF \parallel AC$ ，即 $DF \parallel EC$ ，

$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是平行四边形，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\therefore AB = CD$$

$$\because BF = 2AB,$$

$$\therefore BF = 2CD$$

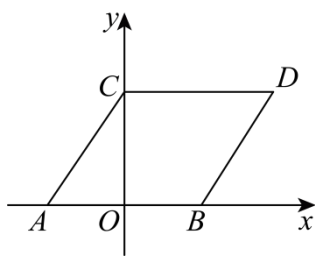
$$\therefore EF = BE$$

$$\therefore BF = 2EF$$

$$\therefore CD = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是矩形.

24. 如图, 平面直角坐标系中有三点 $A(-2,0)$ 、 $B(2,0)$ 、 $C(0,3)$, 平移线段 AB 得到线段 CD , 点 A 的对应点为点 C , 连接 AC 、 BD .



(1) 点 D 的坐标为_____.

(2) 若在 x 轴上存在点 M , 使得 $\triangle MBD$ 是以 BD 为腰的等腰三角形, 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $(4,3)$

(2) $(\sqrt{13}+2,0)$ 或 $(-\sqrt{13}+2,0)$ 或 $(6,0)$

【解析】

【分析】 (1) 先确定平移方式, 再由平移方式求解点 D 的坐标;

(2) 先求出 $BD = \sqrt{(4-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$, 然后设 $M(m,0)$, 再分两种情况讨论, 根据两点之间距离公式建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $A(-2,0)$ 、 $B(2,0)$ 、 $C(0,3)$, 平移线段 AB 得到线段 CD

$\therefore$ 点 A 向右平移了 2 个单位, 向上平移了 3 个单位,

$\therefore$ 点 $B(2,0)$ 向右平移 2 个单位, 向上平移了 3 个单位后得到点 $D(2+2,0+3)$, 即 $D(4,3)$;

【小问 2 详解】

解: $\because B(2,0)$, $D(4,3)$

$$\therefore BD = \sqrt{(4-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

设 $M(m,0)$,

则当 $BD = BM$ 时, 即 $BD^2 = BM^2$, 则 $(m-2)^2 = 13$,

解得 $m = \pm\sqrt{13} + 2$,

$\therefore M(\sqrt{13}+2, 0)$ 或 $M(-\sqrt{13}+2, 0)$;

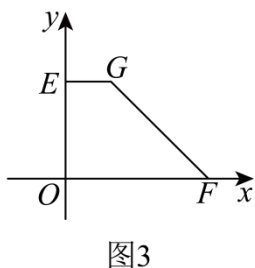
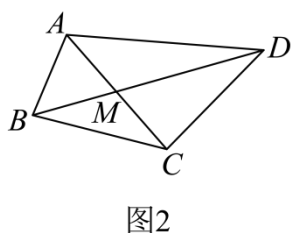
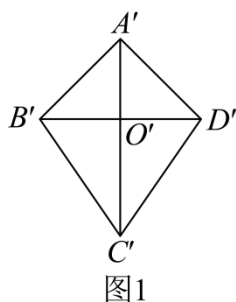
当 $DB = DM$ 时, 即 $DB^2 = DM^2$, 则 $13 = (4-m)^2 + 9$,

解得 $m_1 = 2, m_2 = 6$,

$\therefore M(6, 0)$

综上: 点 M 的坐标为 $(\sqrt{13}+2, 0)$ 或 $(-\sqrt{13}+2, 0)$ 或 $(6, 0)$.

25. 定义: 如果凸四边形的一条对角线把这个四边形分成面积相等的两个三角形, 则称这个四边形为“对等四边形”, 该条对角线称为“对等对角线”. 如图 1, 在凸四边形 $A'B'C'D'$ 中, 如果 $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle A'D'C'}$, 那么四边形 $A'B'C'D'$ 为“对等四边形”, $A'C'$ 为四边形 $A'B'C'D'$ 的“对等对角线”.



(1) 下列图形中, 一定是对等四边形的是_____ (填写你认为正确的序号)

①等腰梯形; ②平行四边形; ③直角梯形;

(2) 如图 2, 在凸四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 M , 且 $MA = MC$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是“对等四边形”;

(3) 如图 3, 在平面直角坐标系内, 已知点 $E(0, 4)$, $F(6, 0)$, $G(2, 4)$, 点 H 在线段 FG 上且 $GH = \sqrt{2}$, 点 P 在线段 OF 上且四边形 $EOPH$ 为“对等四边形”, 请直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) ② (2) 见解析

(3) $(4, 0)$ 或 $(2.4, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 根据定义解答即可;

(2) 根据 $MA = MC$, 可得 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$, $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CDM}$, 从而得到 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$, 即可求证;

(3) 求出直线 FG 解析式, 再求出点 H 的坐标, 然后分两种情况: 若 OH 为对等对角线, 若 EP 为对等对角线, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 根据定义可知, 一定是对等四边形的是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: $\because MA = MC$,

$$\therefore S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}, S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CDM},$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CBM} + S_{\triangle CDM}, \text{ 即 } S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是“对等四边形”;

【小问 3 详解】

解: 设直线 FG 解析式为 $y = kx + b$,

把 $F(6, 0)$, $G(2, 4)$ 代入得:

$$\therefore \begin{cases} 6k + b = 0 \\ 2k + b = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 FG 解析式为 $y = -x + 6$,

设 $H(s, -s + 6)$,

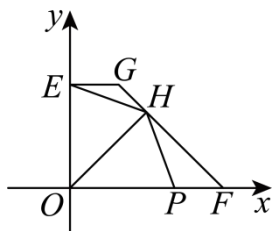
$$\because GH = \sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{(s-2)^2 + (-s+6-4)^2} = \sqrt{2},$$

解得: $s = 1$ (舍去) 或 3 ,

$\therefore$ 点 $H(3, 3)$,

① 若 OH 为对等对角线, 则 $S_{\triangle OEH} = S_{\triangle POH}$,

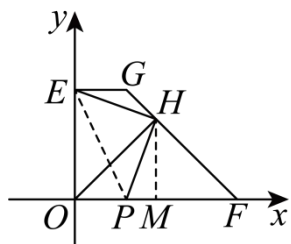


$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 3 \times OP,$$

解得: $OP = 4$,

此时 $P(4,0)$;

② 若 EP 为对等对角线, 则 $S_{PEH} = S_{OEP} = \frac{1}{2} \times 4OP = 2OP$, $HM = 3, OM = 3$,



此时 $S_{\text{四边形}EOPH} = 2S_{PEH} = 4OP$,

$\therefore S_{\text{四边形}EOPH} + S_{PHM} = S_{\text{梯形}EOMH}$,

$$\therefore 4OP + \frac{1}{2} \times 3(3 - OP) = \frac{1}{2} \times 3(3 + 4),$$

解得: $OP = 2.4$,

此时 $P(2.4,0)$;

综上所述: 点 P 的坐标为 $(4,0)$ 或 $(2.4,0)$.