

2025 学年度第二学期期中考试

八年级数学 学科试卷

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 26 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

[下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. 在平面直角坐标系中, 点 $(7, -8)$ 所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【详解】解: $\because$ 点 $(7, -8)$ 的横坐标为正, 纵坐标为负,

$\therefore$ 点 $(7, -8)$ 在第四象限.

2. 当多边形的边数由 3 逐渐增加到 n 时 ($n \geq 3$, 且为正整数), 这个多边形的外角和 ()

- A. 逐渐增加 B. 逐渐减小 C. 没有变化 D. 增、减情况不确定

【答案】C

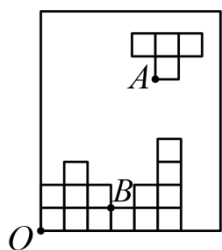
【解析】

【分析】任意多边形外角和都为 360 度, 据此可得答案.

【详解】解: $\because$ 任意多边形的外角和恒为 360° , 与边数多少无关,

$\therefore$ 当多边形边数由 3 增加到 n 时, 这个多边形的外角和没有变化.

3. 俄罗斯方块是一款经典休闲益智游戏, 如图是小宇玩俄罗斯方块时某一时刻的截图, 若在以 O 为原点建立的平面直角坐标系中, 小宇将上方的方块先向左移动 2 个格子, 再向下移动 6 个格子后, 点 A 恰好落在点 $B(3, 1)$ 处, 则上方的方块移动前点 A 所在位置的坐标为 ()



- A. (4, 7) B. (5, 6) C. (5, 7) D. (7, 5)

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了坐标平移的性质：上下平移只改变点的纵坐标，上加下减；左右平移只改变点的横坐标，左减右加，据此求解即可.

【详解】∵点 A 先向左移动 2 个格子，再向下移动 6 个格子后的位置为点 B ,

∴将点 $B(3, 1)$ 先向上移动 6 个格子，再向右移动 2 个格子后得到点 A

∴上方的方块移动前点 A 所在位置的坐标为 $(5, 7)$,

故选：C.

4. 如果平行四边形的一条边长是 10，那么下列各组数中，可作为这个平行四边形的两条对角线长是 ()

- A. 12 和 8 B. 13 和 6 C. 28 和 6 D. 20 和 6

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的两条对角线互相平分和三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，解答即可.

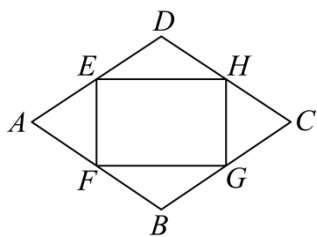
【详解】解：平行四边形的两条对角线互相平分，即两条对角线的一半与平行四边形的一边可组成一个三角形，

设两条对角线长分别为 x 、 y ，则对角线的一半分别为 $\frac{x}{2}$ 、 $\frac{y}{2}$ ，平行四边形的一边长为 10，

根据三角形三边关系：任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，可得： $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} > 10$ 、 $\left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| < 10$ ，

将 A、B、C、D 4 个选项代入，只有 D 成立， $\frac{20}{2} + \frac{6}{2} = 13 > 10$ ， $\left| \frac{20}{2} - \frac{6}{2} \right| = 7 < 10$ ，故选 D.

5. 如图，菱形 $ABCD$ 各边的中点分别为 E ， F ， G ， H ，若四边形 $EFGH$ 的面积为 $\sqrt{2}$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积为 ()



A. $2\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{2}$

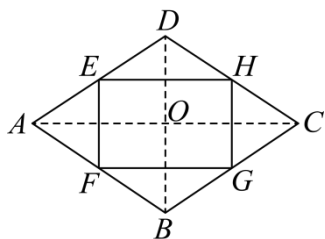
D. 4

【答案】 A

【解析】

【分析】 连接 AC, BD 交于 O , 根据三角形中位线定理得 $EH \parallel AC, FG \parallel AC, EF \parallel BD, HG \parallel BD, BD = 2EF, AC = 2EH$, 进而可得四边形 $EFGH$ 是矩形, 得到 $EF \cdot EH = \sqrt{2}$, 进而根据菱形的面积公式计算即可求解.

【详解】 解: 连接 AC, BD 交于 O ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$,

$\because$ 点 E, F, G, H 分别是边 DA, AB, BC, CD 的中点,

$\therefore EH \parallel AC, FG \parallel AC, EF \parallel BD, HG \parallel BD, BD = 2EF, AC = 2EH$,

$\therefore EH \parallel FG, EF \parallel HG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

$\because AC \perp BD, EH \parallel FG \parallel AC, EF \parallel HG \parallel BD$,

$\therefore EH \perp EF$,

$\therefore \angle HEF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,

$\because$ 四边形 $EFGH$ 的面积为 $\sqrt{2}$,

$\therefore EF \cdot EH = \sqrt{2}$,

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2EF \times 2EH = 2EF \cdot EH = 2\sqrt{2}.$$

【点睛】注意中点四边形的性质和三角形中位线的性质.

6. 下列说法正确的是 ()

- A. 矩形具有而平行四边形不具有的性质是对角线互相平分;
- B. 有一个内角是直角的四边形是矩形, 有一组邻边相等的四边形是菱形;
- C. 正方形具有矩形和菱形的所有性质;
- D. 对角线相等的矩形是正方形, 对角线垂直的菱形是正方形;

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质、矩形的判定与性质、菱形的判定与性质、正方形的判定与性质进行判断即可得.

- 【详解】解: A、矩形和平行四边形都具有对角线互相平分这一条性质, 则此项错误, 不符合题意;
- B、有三个内角是直角的四边形是矩形, 有一组邻边相等的平行四边形是菱形, 则此项错误, 不符合题意;
- C、因为正方形是矩形 (四条边都相等的矩形是正方形) 和菱形 (有一个内角是直角的菱形是正方形) 的特殊情形, 所以正方形具有矩形和菱形的所有性质, 则此项正确, 符合题意;
- D、对角线垂直的矩形是正方形, 对角线相等的菱形是正方形, 则此项错误, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、矩形的判定与性质、菱形的判定与性质、正方形的判定与性质, 熟练掌握特殊平行四边形的判定与性质是解题关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 正六边形的内角和为____度.

【答案】720

【解析】

【详解】解: 因为多边形的内角和公式: $180^\circ (n-2)$,
所以正六边形的内角和: $180^\circ \times (6-2) = 180^\circ \times 4 = 720^\circ$.
故答案为: 720

8. 在平面直角坐标系中, 点 $M(-3, 4)$ 到 y 轴的距离为_____.

【答案】3

【解析】

【分析】根据点坐标轴的距离的计算方法，即点 (x, y) 到 y 轴的距离表示为 $|x|$ ，点到 x 轴的距离表示为 $|y|$ ，由此即可求解，

【详解】解：点 $M(-3, 4)$ 到 y 轴的距离为 $|x| = |-3| = 3$ ，

故答案为：3.

【点睛】本题主要考查点到坐标轴的距离的计算方法，关键是理解点到轴的距离的表示方法.

9. 在平面直角坐标系中，已知两点 $M(2, 5)$ 、 $N(-1, 3)$ ，那么 $MN =$ _____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】平面直角坐标系中点 (x_1, y_1) 和点 (x_2, y_2) 的距离为 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，据此求解即可.

【详解】解： $\because M(2, 5)$ 、 $N(-1, 3)$ ，

$$\therefore MN = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{13}.$$

10. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A$ 的补角与 $\angle B$ 互余，那么 $\angle C$ 的度数为_____.

【答案】 135°

【解析】

【分析】设 $\angle A = x$ ，则 $\angle A$ 的补角为 $180^\circ - x$ ，根据平行四边形的性质得到 $AD \parallel BC$ ， $\angle C = \angle A$ ，则 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，据此根据 $\angle A$ 的补角与 $\angle B$ 互余建立方程求解即可.

【详解】解：设 $\angle A = x$ ，则 $\angle A$ 的补角为 $180^\circ - x$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, \angle C = \angle A,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - x,$$

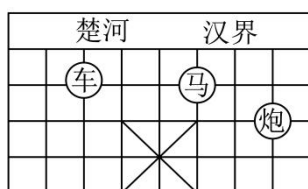
$$\therefore (180^\circ - x) + (180^\circ - x) = 90^\circ,$$

解得 $x = 135^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 135^\circ.$$

11. 如图，如果“车”的坐标为 $(-2, 3)$ ，“马”的坐标为 $(1, 3)$ ，那么“炮”的坐标为_____.



【答案】

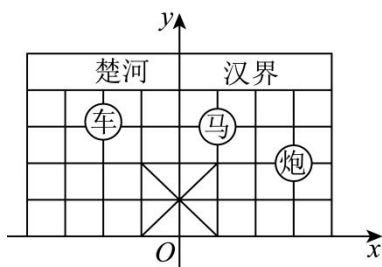
$(3,2)$

【解析】

【分析】由“车”和“马”的坐标确定坐标原点，即可得答案.

【详解】解：∵棋子“车”的坐标为 $(-2,3)$ ，棋子“马”的坐标为 $(1,3)$ ，

∴坐标系的原点 O ，如下图所示，



∴棋子“炮”的坐标为 $(3,2)$.

12. 已知点 Q 关于 y 轴的对称点为 $(2,y)$ ，关于 x 轴的对称点为 $(x,-7)$ ，那么点 Q 的坐标为_____.

【答案】 $(-2,7)$

【解析】

【分析】关于 y 轴对称，横坐标变为原数的相反数，纵坐标不变；关于 x 轴对称，横坐标不变，纵坐标变为原数的相反数，据此求解即可.

【详解】解：∵点 Q 关于 y 轴的对称点为 $(2,y)$ ，

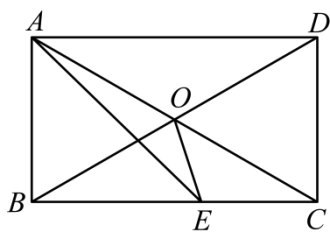
∴点 Q 的坐标为 $(-2,y)$ ，

∵点 Q 关于 x 轴的对称点为 $(x,-7)$ ，

∴点 Q 的坐标为 $(x,7)$ ，

∴点 Q 的坐标为 $(-2,7)$.

13. 如图，矩形 $ABCD$ 中， AC 、 BD 交于点 O ， AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E ， $\angle AOD = 120^\circ$ ，那么 $\angle OEC =$ _____.



【答案】 105°

【解析】

【分析】由矩形的性质得到 $OA = OB$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, 可证明 AOB 是等边三角形, 得到 $OB = AB$, $\angle OBA = 60^\circ$, 证明 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, 推出 $OB = BE$, 据此求出 $\angle BEO$ 的度数即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OA = OB, \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ;$$

$$\therefore \angle AOD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle AOD = 60^\circ,$$

$\therefore AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore OB = AB, \angle OBA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle ABC - \angle OBA = 30^\circ;$$

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形,

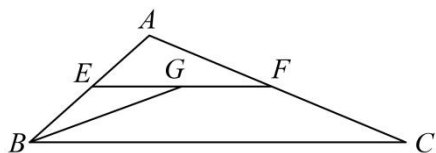
$$\therefore AB = BE,$$

$$\therefore OB = BE,$$

$$\therefore \angle BEO = \angle BOE = \frac{180^\circ - \angle OBE}{2} = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle OEC = 180^\circ - \angle BEO = 105^\circ.$$

14. 如图, EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线, BG 平分 $\angle ABC$, 交 EF 于点 G . 已知 $AB = 8$, $BC = 14$, 则 GF 的长为_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】先根据三角形中位线定理求出 EF 和 EB 的长度，同时得到 EF 与 BC 平行的关系，再结合角平分线的定义和平行线的性质推导出 $\angle EBG = \angle EGB$ ，利用等角对等边得出 $EG = EB$ ，最后通过线段的差运算 $GF = EF - EG$ 计算出 GF 的长度.

【详解】解： $\because EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $AB = 8$ ， $BC = 14$ ，

$$\therefore EF \parallel BC, \quad EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 14 = 7, \quad EB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4.$$

$\because BG$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle EBG = \angle CBG.$$

又 $\because EF \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle EGB = \angle CBG.$$

$$\therefore \angle EBG = \angle EGB,$$

$$\therefore EB = EG = 4.$$

$$\therefore GF = EF - EG = 7 - 4 = 3.$$

15. 已知点 $A(-2, 3)$ 、 $B(2, -1)$ 、 $C(5, 0)$ ，平行四边形 $ABCD$ 的顶点 D 的坐标为_____.

【答案】 $(1, 4)$

【解析】

【分析】设顶点 D 的坐标为 (x, y) ，根据平行四边形的两条对角线的中点坐标相同列式求解即可.

【详解】解：设点 D 的坐标为 (x, y) ，

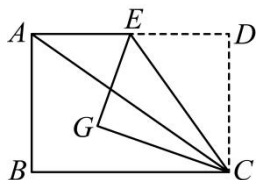
$\because$ 平行四边形的两条对角线的中点坐标相同，

$$\therefore \begin{cases} \frac{-2+5}{2} = \frac{2+x}{2} \\ \frac{3+0}{2} = \frac{-1+y}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1,4)$.

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AD = 4\sqrt{2}$, E 为 AD 上一点, 将 $\triangle EDC$ 沿 EC 翻折, 点 D 的对应点 G 恰好为 ABC 的重心, 那么 $DC =$ _____.

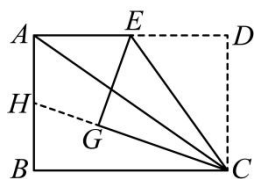


【答案】 4

【解析】

【分析】 延长 CG 交 AB 于点 H , 由重心的定义和性质可得 $BH = \frac{1}{2}AB$, $CG = 2GH$, 由折叠的性质可得 $CG = CD$, 设 $HG = x$, 则 $CG = CD = AB = 2x$, $BH = x$, $CH = 3x$, 再利用勾股定理建立方程求解即可.

【详解】 解: 如图所示, 延长 CG 交 AB 于点 H ,



$\therefore$ 点 G 为 ABC 的重心,

$$\therefore BH = \frac{1}{2}AB, \quad CG = 2GH,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD, \quad BC = AD = 4\sqrt{2}, \quad \angle B = 90^\circ,$$

由折叠的性质可得 $CG = CD$,

设 $HG = x$, 则 $CG = CD = AB = 2x$,

$$\therefore BH = x, \quad CH = 3x,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中, 由勾股定理得 $CH^2 = BH^2 + BC^2$,

$$\therefore (3x)^2 = x^2 + (4\sqrt{2})^2,$$

解得 $x = 2$ 或 $x = -2$ (舍去),

$$\therefore CD = 4.$$

17. 在平面直角坐标系中, 对于平面任一点 (a, b) , 若规定以下三种变换:

$$\textcircled{1} f(a, b) = (-a, b), \text{ 如: } f(1, 3) = (-1, 3);$$

$$\textcircled{2} g(a, b) = (b, a), \text{ 如: } g(1, 3) = (3, 1);$$

$$\textcircled{3} h(a, b) = (-a, -b), \text{ 如: } h(1, 3) = (-1, -3).$$

按照以下变换有: $f(g(2, -3)) = f(-3, 2) = (3, 2)$, 那么 $f(h(5, -3)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(5, 3)$

【解析】

【分析】 根据 $f(a, b) = (-a, b)$, $h(a, b) = (-a, -b)$, 先计算 $h(5, -3)$, 再计算外面的变换可得答案.

【详解】 解: $f(h(5, -3)) = f(-5, -(-3)) = f(-5, 3) = (-(-5), 3) = (5, 3)$.

18. 在一个三角形中, 如果有两条中线互相垂直, 我们把这样的三角形称为“中垂三角形”. 如果 ABC 是“中垂三角形”, AD 、 BE 、 CF 是中线, $\angle DAB = 30^\circ$, $AB = 4$, 那么 BC 的长为_____.

【答案】 $\sqrt{19}$ 或 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 勾股定理的性质以及三角形中位线性质的知识, 分 $AD \perp BE$ 、 $CF \perp AD$ 、 $BE \perp CF$ 三种情况讨论, 运用相似三角形的判定与性质, 勾股定理进行求解即可.

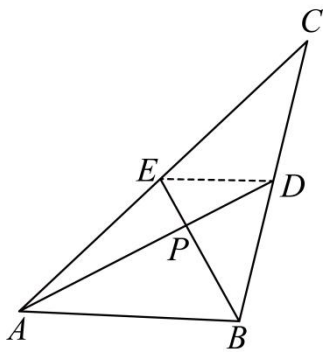
【详解】 解: $\because ABC$ 为“中垂三角形”, 即 $AD \perp BE$ 于点 P ,

又 $\because \angle DAB = 30^\circ$, $AB = 4$,

$$\therefore BP = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\therefore AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

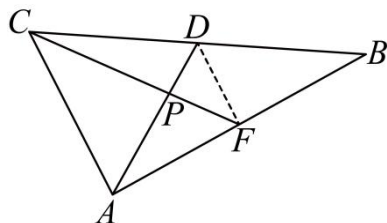
$\because AD$ 、 BE 分别是中线, 连接 DE ,



$\therefore DE$ 是 ABC 的中位线,
 $\therefore EF \parallel AB$,
 $\therefore \angle ABP = \angle DEP, \angle BAP = \angle EDP$,
 $\therefore \triangle ABP \sim \triangle DEP$,
 $\therefore \frac{DP}{AP} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore DP = \frac{1}{2} AP = \sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle DPB$ 中, $DP^2 + BP^2 = DB^2$,
 $\therefore DB = \sqrt{DP^2 + BP^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}$,
 $\therefore BC = 2DB = 2\sqrt{7}$;

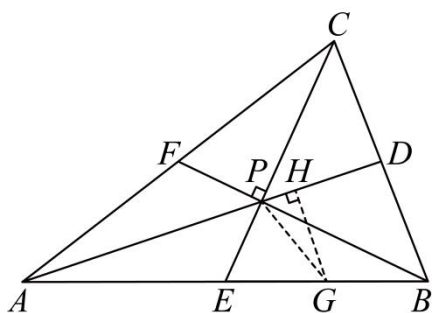
如图, 当 $CF \perp AD$ 时,



同理可得, $PF = 1$, $AP = \sqrt{3}$, $DP = \frac{1}{2} AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $PC = 2PF = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle DPC$ 中, $DP^2 + CP^2 = DC^2$,
 $\therefore DC = \sqrt{DP^2 + CP^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$
 $\therefore BC = 2DC = \sqrt{19}$;

如果 ABC 是“中垂三角形”, 设三条中线相交于 P , 当 $BF \perp CE$ 时, 取 BF 中点 G , 连接 PG , 过 G 作 $GH \perp AD$ 于 H ,



$\because E$ 为 AB 中点,

$$\therefore BE = AE = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$\because G$ 为 EB 中点,

$$\therefore EG = \frac{1}{2} BE = 1,$$

又 $BF \perp CE$,

$$\therefore PG = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AB = 1,$$

$\because GH \perp AD$, $AG = AE + EG = 3$, $\angle DAB = 30^\circ$

$$\therefore GH = \frac{1}{2} AG = \frac{3}{2},$$

$\therefore GH > PG$, 这与垂线段最短相矛盾,

$\therefore$ 不存在 $CF \perp BE$;

综上, BC 的长为 $\sqrt{19}$ 或 $2\sqrt{7}$.

故答案为: $\sqrt{19}$ 或 $2\sqrt{7}$.

三、解答题: (本大题共 8 题, 满分 64 分)

19. 在平面直角坐标系中, 已知 ABC 三个顶点的坐标为 $A(2,3)$ 、 $B(-3,3)$ 、 $C(-1,-1)$, 试求 ABC 的面积.

【答案】

10

【解析】

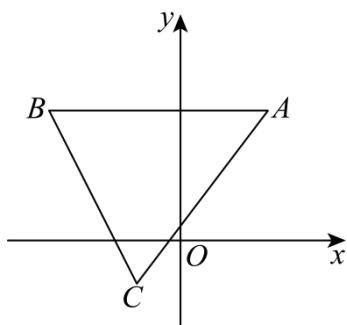
【分析】 利用 A 、 B 纵坐标相同的特点, 直接求出三角形的底和高, 再用三角形面积公式计算.

【详解】 解: $\because A(2,3)$, $B(-3,3)$, A 和 B 的纵坐标相等, 均为 3,

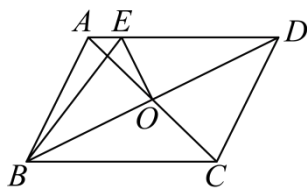
$\therefore AB \parallel x$ 轴, AB 的长度为 $2 - (-3) = 5$, AB 所在直线为 $y = 3$,

$\therefore$ 点 C 到直线 AB 的垂直距离为 $3 - (-1) = 4$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10.$$



20. 如图, 在周长为 20 的平行四边形 $ABCD$ 中, $AB \neq AD$, AC 、 BD 相交于点 O , $OE \perp BD$ 交 AD 于点 E , 求 $\triangle ABE$ 的周长.



【答案】 10

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质得到 $OB = OD$, $AB = CD$, $AD = BC$, 则根据四边形的周长公式可推出 $AB + AD = 10$; 可证明 OE 垂直平分 BD , 得到 $BE = DE$, 据此根据三角形的周长公式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 且 AC 、 BD 相交于点 O ,

$$\therefore OB = OD, AB = CD, AD = BC,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 20,

$$\therefore AB + CD + AD + BC = 20,$$

$$\therefore 2AB + 2AD = 20, \text{ 即 } AB + AD = 10;$$

又 $\because OE \perp BD$,

$\therefore OE$ 垂直平分 BD ,

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的周长} = AE + BE + AB = AE + DE + AB = AD + AB = 10.$$

21. 点 P 是平面直角坐标系中不在坐标轴上的点, 过点 P 向 x 轴、 y 轴作垂线段, 垂足分别为 A 、 B . 如果 $|PA| + |PB| = 5$, 那么点 P 称为“好点”. 例如: 点 $M(-1, 4)$, 因为 $|-1| + |4| = 5$, 所以点 M 是“好点”.

(1) 在点 $A(2, -3)$ 、 $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 、 $C(-2, 7)$ 中, “好点”是_____.

(2) 如果 $D(2a, -5a)$ 是“好点”，求 a 的值.

【答案】(1) A 和 B (2) $a = \pm \frac{5}{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据“好点”的定义，计算每个点横纵坐标的绝对值之和，判断是否等于 5 即可得到结果；

(2) 根据“好点”的定义列出关于 a 的含绝对值的方程，分 $a > 0$ 和 $a < 0$ 两种情况去掉绝对值符号，解一元一次方程即可得到 a 的值.

【小问 1 详解】

解：点 $A(2, -3)$ 是“好点”，因为其坐标满足 $|2| + |-3| = 2 + 3 = 5$ ；

点 $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 是“好点”，因为其坐标满足 $\left|-\frac{3}{2}\right| + \left|\frac{7}{2}\right| = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$ ；

点 $C(-2, 7)$ 不是“好点”，因为 $|-2| + |7| = 2 + 7 = 9 \neq 5$ ，

因此“好点”是 A 和 B ；

【小问 2 详解】

解：∵ $D(2a, -5a)$ 是“好点”，且点 P 不在坐标轴上，

∴ $|2a| + |-5a| = 5$ ，且 $a \neq 0$ ，

分两种情况讨论：

①当 $a > 0$ 时，原式化简为 $2a + 5a = 5$ ，即 $7a = 5$ ，

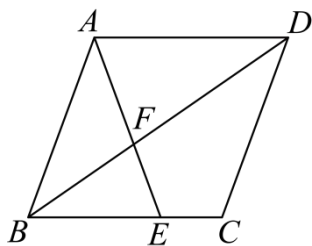
解得 $a = \frac{5}{7}$ ；

②当 $a < 0$ 时，原式化简为 $-2a - 5a = 5$ ，即 $-7a = 5$ ，

解得 $a = -\frac{5}{7}$ ；

综上， $a = \pm \frac{5}{7}$ 。

22. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 为 BC 边上的一点，连接 AE 、 BD 交于点 F ， $AE = AB$ ，如果 $\angle AEB = 2\angle ADB$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.



【答案】见解析

【解析】

【分析】先根据平行四边形的性质得出 $AD \parallel BC$ ，故 $\angle ADB = \angle DBC$ ，再由 $AE = AB$ 结合 $\angle AEB = 2\angle ADB$ ，证明 $\angle ABD = \angle DBC$ ，等量代换证得 $\angle ADB = \angle ABD$ ，最后根据等角对等边证明 $AD = AB$ 即可得证.

【详解】证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$ ，

∴ $\angle ADB = \angle DBC$.

∵ $AE = AB$ ，

∴ $\angle ABE = \angle AEB$.

∵ $\angle AEB = 2\angle ADB$ ，

∴ $\angle ABE = 2\angle DBC$.

∵ $\angle ABE = \angle ABD + \angle DBC$ ，

∴ $\angle ABD = \angle DBC$ ，

∴ $\angle ADB = \angle ABD$ ，

∴ $AD = AB$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

23. 尺规作图是起源于古希腊的数学课题，在初中阶段的数学学习中我们已经有所了解和掌握，这里所使用的尺是指无刻度的直尺. 无刻度的直尺不能度量，且无法画垂线、平行线，只能用来连线.

作图：只用无刻度直尺在图 1 中作出平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点；

小朱同学采用下面的方法：

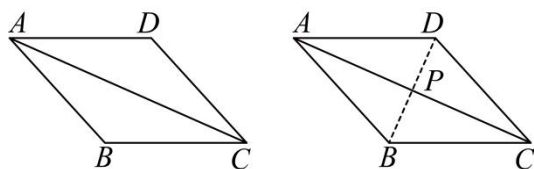


图1

图2

(1) 用无刻度直尺连接线段 BD ；

(2) 线段 BD 与 AC 的交点记为 P 点；

结合已学过的平行四边形性质，图 2 中的点 P 即为线段 AC 的中点.

参考以上作法，请你在以下两题中只使用无刻度直尺和铅笔作图（保留作图痕迹）：

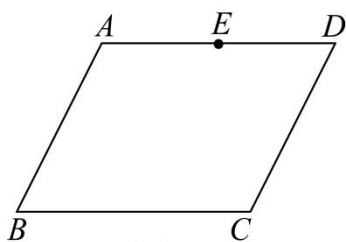


图3

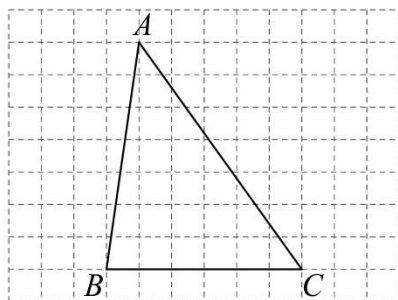


图4

(1) 如图 3, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 AD 的中点, 请作出边 AB 的中点 F ;

(2) 如图 4, 点 A 、点 B 、点 C 都是方格纸中的格点, 作出 ABC 的重心 G .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

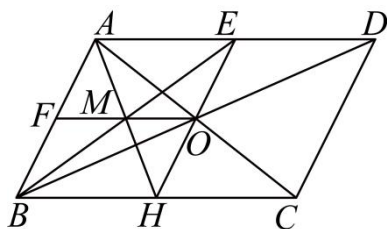
【解析】

【分析】(1) 连接 AC 、 BD 交于点 O , 连接 EO 并延长交 BC 于点 H , 连接 AH 、 BE 交于点 M , 连接 OM 并延长交 AB 于点 F , 点 F 即为所求;

(2) 取 $AD = BC = 6$, 且 $AD \parallel BC$, 连接 BD 与 AC 相交于点 O , 取 BC 的中点 E , 连接 AE 、 BO 相交于点 G , 则点 O 是 AC 的中点, 点 G 是 ABC 的重心.

【小问 1 详解】

解: 如图, 点 F 即为所求;



连接 AC 、 BD 交于点 O , 连接 EO 并延长交 BC 于点 H , 连接 AH 、 BE 交于点 M , 连接 OM 并延长交 AB 于点 F , 点 F 即为所求;

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 O 为对角线 AC 、 BD 的交点,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$, O 为 AC 的中点,

$\because$ 点 E 是边 AD 的中点,

$\therefore OE$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线,

$\therefore EO \parallel CD$, $EO = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore AB \parallel EO$, $\frac{OH}{CD} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{2}$, 即 $OH = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABHE$ 是平行四边形, 点 M 为对角线 AH 、 BE 的交点, $EO = OH$,

$\therefore M$ 为 AH 的中点, O 为 EH 的中点,

$\therefore$ 点 O 是 EH 的中点,

$\therefore OM$ 是 $\triangle HAE$ 的中位线,

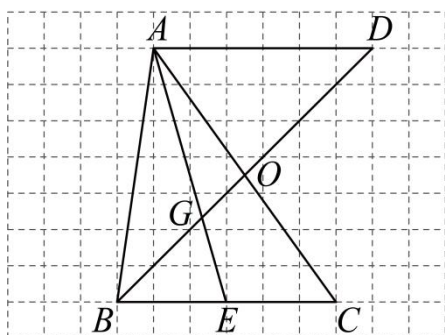
$\therefore OF \parallel AE$,

$\therefore OF \parallel BC$,

$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{AM}{MH} = 1$, 即 $AF = BF$, 点 F 是 AB 的中点;

【小问 2 详解】

解: 如图, 点 G 即为所求;



取 $AD = BC = 6$, 且 $AD \parallel BC$, 连接 BD 与 AC 相交于点 O , 取 BC 的中点 E , 连接 AE 、 BO 相交于点 G ;

$\therefore \angle D = \angle OBC$, $\angle DAO = \angle OCB$,

$\therefore \triangle ADO \cong \triangle CBO (ASA)$,

$\therefore OA = OC$, 即点 O 是 AC 的中点,

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

24. 在平面直角坐标系中, 点 $A(0, 2)$, 点 B 在 x 轴上.

(1) 当点 B 在 x 轴正半轴, 将点 B 绕点 A 逆时针旋转 90° 后落在点 C 处, 如果 $\triangle ABC$ 的面积为 6, 求点 B 的坐标;

(2) 如果点 D 在直线 $y = -1$ 上, $AB = AD$, 且 $\angle BAD = 90^\circ$, 求点 D 坐标.

【答案】(1) $(2\sqrt{2}, 0)$

(2) $(2, -1)$ 或 $(-2, -1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理的应用, 旋转的性质, 解一元二次方程等知识, 掌握在坐标系中利用勾

股定理求解两点之间的距离是关键.

(1) 设点 B 坐标为 $(b, 0)$, $b > 0$, 由旋转的性质得 $AB = AC$, $\angle CAB = 90^\circ$, 即根据三角形的面积可求出 AB^2 , 再在 $\triangle ABO$ 中利用勾股定理即可作答;

(2) 设点 B 坐标为 $(b, 0)$, 点 D 坐标为 $(d, -1)$, 利用勾股定理表示出 AD^2 、 AB^2 、 DB^2 , 再根据 $AB = AD$, 且 $\angle BAD = 90^\circ$, 列出相应的等式, 可得 b 、 d 的数量关系, 问题随之得解.

【小问 1 详解】

解: 设点 B 坐标为 $(b, 0)$, $b > 0$, 已知 $A(0, 2)$, 即 $OA = 2$, $OB = b$,

由旋转的性质得 $AB = AC$, $\angle CAB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 6,

$$\therefore \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AB^2 = 6, \text{ 即 } AB^2 = 12,$$

在 $\triangle ABO$ 中, 由勾股定理得 $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 4 + b^2 = 12$,

$$\therefore b = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{2}, 0);$$

【小问 2 详解】

解: 设点 B 坐标为 $(b, 0)$,

$\therefore$ 点 D 在直线 $y = -1$ 上,

$$\therefore \text{点 } D \text{ 坐标为 } (d, -1),$$

$$\therefore A(0, 2),$$

$$\therefore AD^2 = (0-d)^2 + (2+1)^2 = d^2 + 9, \quad AB^2 = (b-0)^2 + (0-2)^2 = b^2 + 4,$$

$$DB^2 = (b-d)^2 + (0+1)^2 = (b-d)^2 + 1,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore AB^2 = AD^2,$$

$$\text{即: } d^2 + 9 = b^2 + 4,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2, \text{ 且 } d \neq 0, \quad b \neq 0,$$

$$\text{即: } d^2 + 9 + b^2 + 4 = (b-d)^2 + 1,$$

$$\text{再结合 } d^2 + 9 = b^2 + 4,$$

$$\text{可得: } bd = -6, \text{ 即 } b = -\frac{6}{d},$$

$$\therefore d^2 + 9 = b^2 + 4 = \left(-\frac{6}{d}\right)^2 + 4 = \frac{36}{d^2} + 4,$$

$$\text{整理得: } d^4 + 5d^2 - 36 = 0,$$

$$\therefore (d^2 + 9)(d^2 - 4) = 0,$$

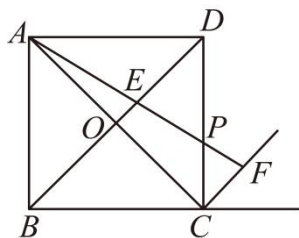
$$\because d^2 + 9 \geq 9,$$

$$\therefore d^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore d = \pm 2,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为: } (2, -1) \text{ 或 } (-2, -1).$$

25. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 点 P 是边 CD 上一点 (不与点 C 、 D 重合), 连接 AP 交 BD 于点 E , 延长 AP 交 $\angle BCD$ 的外角角平分线于点 F .



(1) 求证: $AE = EF$;

(2) 连接 CE 、 DF , 当 $CE \parallel DF$ 时, 求 CF 的长.

【答案】 (1) 答案见解析

$$(2) CF = 2\sqrt{2}$$

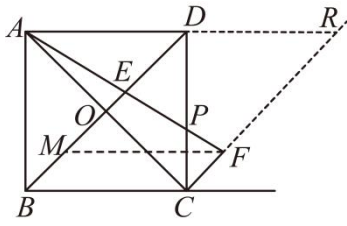
【解析】

【分析】 (1) 延长 CF , AD 交于点 R , 证明 $\triangle DCR$ 是等腰直角三角形, 证 D 是 AR 的中点, 再证 $CR \parallel BD$, 作 $MF \parallel AR$, 证四边形 $DMFR$ 为平行四边形, 再证 $\triangle ADE \cong \triangle FME$, 即可得答案;

(2) 先证明四边形 $DECF$ 是平行四边形, 求出 AP , AE , EF 的长, 再证 $\triangle ABE \cong \triangle CBE$, 求出 CE , DF 的长, 最后再利用勾股定理列出方程即可.

【小问 1 详解】

解：如下图，延长 CF ， AD 交于点 R ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle BCD = \angle ADC = \angle RDC = 90^\circ, \quad \angle BDC = 45^\circ,$$

$\because CF$ 是 $\angle BCD$ 的外角的平分线，

$$\therefore \angle DCR = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DCR$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore DC = DR = AD,$$

$\therefore D$ 是 AR 的中点，

$$\because \angle BDC = \angle DCR = 45^\circ,$$

$$\therefore CR \parallel BD,$$

作 $MF \parallel AR$ ，

$\therefore$ 四边形 $DMFR$ 为平行四边形，

$$\therefore MF = DR,$$

$$\therefore MF = AD,$$

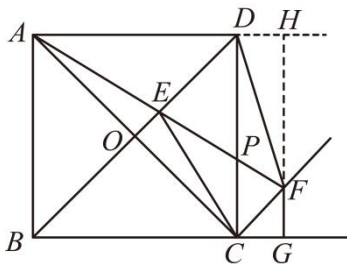
$$\because \angle DAF = \angle AFM, \angle AED = \angle FEM, AD = MF,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FME \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = EF;$$

【小问 2 详解】

如下图，延长 AD ，过点 F 作 AD 的延长线的垂线交于点 H ，交 BC 的延长线于点 G ，



由 (1) 知： $CF \parallel BD$ ，

$\because CE \parallel DF$,

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形,

$\therefore EP = FP, DP = CP = 3, EC = DF$,

$\therefore AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$,

$\because AE = EF, EP = FP$,

$\therefore AP = 3EP = 3\sqrt{5}$,

$\therefore EP = \sqrt{5}$,

$\therefore AE = EF = 2EP = 2\sqrt{5}$,

$\because AB = BC, \angle ABE = \angle CBE, BE = BE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$ (SAS),

$\therefore AE = CE$,

$\therefore AE = CE = DF = 2\sqrt{5}$,

设 $CG = FG = x$, 则 $CF = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x$,

$\therefore DH = CG = x, FH = GH - FG = 6 - x$,

在 $Rt\triangle DFH$ 中, 根据勾股定理得: $DH^2 + FH^2 = DF^2$,

$\therefore x^2 + (6 - x)^2 = (2\sqrt{5})^2$,

解得: $x_1 = 2, x_2 = 4$ (舍去),

$\therefore CF = 2\sqrt{2}$.

26. 综合与实践

【问题情境】 某数学兴趣小组研究了课本教材中的《折纸与数学》, 思索折纸与角的关系, 寻求新的折纸方法, 其内容如下:

如果我们身旁没有量角器或三角尺, 又需要作 60° 、 30° 、 15° 等大小的角, 可以采用下面的方法 (如图 1):

- (1) 对折矩形纸片 $ABCD$, 使 AD 与 BC 重合, 得到折痕 EF , 把纸片展平;
- (2) 再一次折叠纸片, 使点 B 落在 EF 上, 并使折痕经过点 A , 得到折痕 AM , 点 B 、

E 的对应点分别为 B' 、 E' ，把纸片展平.

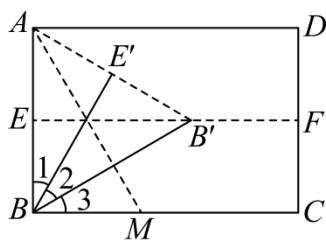


图1

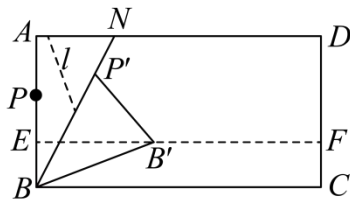


图2

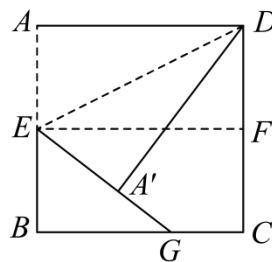


图3

(1) 【知识运用】请根据上述过程，连接 AB' 、 BB' 、 BE' ，观察图 1 中 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ ，试猜想这三个角的大小关系是_____；

(2) 【拓展提升】小华再次探究，寻找等分角的方法：如图 2，点 N 为边 AD 上的一点，连接 BN ，在 AB 上取一点 P ，折叠纸片，使 B 、 P 两点重合，展平纸片，得到折痕 EF ；折叠纸片，使点 B 、 P 分别落在 EF 、 BN 上，得到折痕 l ，点 B 、 P 的对应点分别为 B' 、 P' ，展平纸片，连接 BB' 、 $P'B'$ 。求证： BB' 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线；

(3) 【迁移探究】兴趣小组成员继续探究三等分线段的方法：如图 3，将正方形纸片 $ABCD$ 对折，得到折痕 EF ，(其中，点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点)，连接 DE ，将纸片沿 DE 翻折，使点 A 落在点 A' 处，连接 EA' 并延长，交边 BC 于点 G ，求证： $CG:CB=1:3$ 。

【答案】(1) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

(2) 见解析 (3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由折叠的性质可推出 $AB = BB' = AB'$ ， $AE' = BE'$ ，则可证明 $\triangle ABB'$ 是等边三角形，得到 $\angle ABB' = 60^\circ$ ，由三线合一得到 $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABB' = 30^\circ$ ，再由矩形的性质和角的和差关系可得 $\angle 3 = \angle ABC - \angle ABB' = 30^\circ$ ，则 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ；

(2) 由折叠的性质可得 $BP = B'P'$ ， $\angle BPB' = \angle BB'P'$ ， $\angle BPB' = \angle BP'B'$ ， $\angle PB'E = \angle BB'E$ ，则可证明 $\triangle BPB' \cong \triangle B'BP'$ (ASA)，得到 $\angle P'BB' = \angle PB'B = 2\angle BB'E$ ；证明 $EF \parallel BC$ ，得到 $\angle BB'E = \angle CBB'$ ，可证明 $\angle P'BB' = 2\angle CBB'$ ，则 BB' 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线；

(3) 连接 DG ，可证明 $\text{Rt}\triangle DA'G \cong \text{Rt}\triangle DCG$ (HL)，得到 $A'G = CG$ ；设 $AB = BC = 2x$ ， $CG = y$ ，则 $BG = 2x - y$ ， $EG = x + y$ ；由勾股定理得 $(x + y)^2 = x^2 + (2x - y)^2$ ，可求出 $2x = 3y$ ，即 $BC = 3CG$ ，则 $CG:CB=1:3$ 。

【小问 1 详解】

解：由折叠的性质可得 $AB' = BB'$, $AB = AB'$, $AE = BE$, $AE' = AE$, $BE = BE'$,

$$\therefore AB = BB' = AB', \quad AE' = BE',$$

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABB' = 60^\circ,$$

又 $\because AE' = BE'$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABB' = 30^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle ABC - \angle ABB' = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3;$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，连接 PB' ，

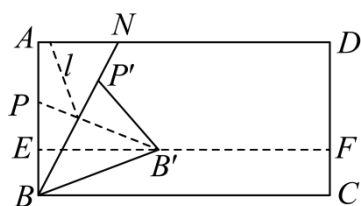


图2

由折叠可知： EF 是 PB 的垂直平分线，

$$\therefore PB' = B'B, \quad \angle PB'E = \angle BB'E;$$

由折叠的性质可得 $BP = B'P'$, $\angle BPB' = \angle BB'P'$, $\angle BPB' = \angle BP'B'$, $\angle PB'E = \angle BB'E$,

$$\therefore \triangle BPB' \cong \triangle B'BP' \text{ (ASA)},$$

$$\therefore \angle P'BB' = \angle PB'B = \angle PB'E + \angle BB'E = 2\angle BB'E;$$

由折叠的性质可得 $EF \perp AB$,

由矩形的性质可得 $AB \perp BC$,

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BB'E = \angle CBB',$$

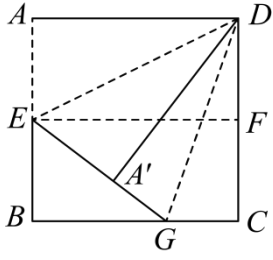
$$\therefore \angle P'BB' = 2\angle CBB',$$

$$\therefore \angle P'BC = 3\angle CBB',$$

$\therefore BB'$ 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线;

【小问 3 详解】

证明：如图所示，连接 DG ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$, $AD = CD = AB = BC$,

由折叠的性质可得 $AE = A'E$, $AD = A'D$, $\angle DAE = \angle DA'E = 90^\circ$,

$\therefore AD = CD$,

$\because \angle DA'G = 180^\circ - \angle DA'E = 90^\circ$,

$\therefore \angle DA'G = \angle C$,

又 $\because DG = DG$,

$\therefore \text{Rt}\triangle DA'G \cong \text{Rt}\triangle DCG$ (HL),

$\therefore A'G = CG$;

设 $AB = BC = 2x$, $CG = y$, 则 $BG = 2x - y$,

$\because$ 点 E 为 AB 的中点,

$\therefore AE = BE = A'E = x$,

$\therefore EG = x + y$;

在 $\text{Rt}\triangle BEG$ 中，由勾股定理得 $EG^2 = BE^2 + BG^2$,

$\therefore (x + y)^2 = x^2 + (2x - y)^2$,

$\therefore 2x^2 = 3xy$,

$\because x > 0$,

$\therefore 2x = 3y$, 即 $BC = 3CG$,

$\therefore CG : CB = 1 : 3$.

