

# 2025 学年东方中学第二学期初二数学期中考试试卷

(考试时间 90 分钟 满分 100 分)

## 一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列函数中, 是一次函数的是 ( )

A.  $y = \frac{2}{x}$

B.  $y = x^2 - 2$

C.  $y = -2x$

D.  $y = kx + b$

【答案】C

【解析】

【分析】一次函数的形式为  $y = kx + b$  ( $k, b$  为常数, 且  $k \neq 0$ ), 正比例函数是特殊的一次函数.

【详解】解: A、 $y = \frac{2}{x}$  不符合一次函数定义, 排除;

B、 $y = x^2 - 2$  中  $x$  的次数为 2, 不符合一次函数定义, 排除;

C、 $y = -2x$  中,  $k = -2 \neq 0, b = 0$ , 满足一次函数定义, 是一次函数;

D、 $y = kx + b$  未规定  $k \neq 0$ , 若  $k = 0$  则不是一次函数, 不符合要求, 排除.

2. 一次函数  $y = x + 1$  的图象不经过 ( )

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据  $k = 1 > 0, b = 1 > 0$  即可求解.

【详解】解:  $\because$  一次函数  $y = x + 1$  中  $k = 1 > 0, b = 1 > 0$ ,

$\therefore$  一次函数  $y = x + 1$  的图象不经过第四象限,

故选: D.

【点睛】本题考查了一次函数的性质, 熟练掌握一次函数的性质是解题的关键.

3. 若某多边形的内角和等于外角和的 3 倍, 则这个多边形的边数是 ( )

A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式及外角的特征计算.

【详解】多边形的外角和是  $360^\circ$ , 根据题意得:

$$180^{\circ} \cdot (n-2) = 3 \times 360^{\circ},$$

解得  $n=8$ .

所以这个多边形的边数是 8.

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了多边形内角和公式及外角的特征. 求多边形的边数, 可以转化为方程的问题来解决.

4. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $\angle A : \angle B = 2 : 3$ , 则  $\angle C$  的度数为 ( )

- A.  $36^{\circ}$                       B.  $54^{\circ}$                       C.  $72^{\circ}$                       D.  $108^{\circ}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行四边形邻角互补, 对角相等的性质, 结合已知角度比例即可求出  $\angle C$  的度数.

【详解】 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形, 平行四边形邻角互补,

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^{\circ},$$

又  $\because$  平行四边形对角相等,

$$\therefore \angle C = \angle A.$$

$$\therefore \angle A : \angle B = 2 : 3,$$

$$\text{设 } \angle A = 2x, \angle B = 3x,$$

$$\therefore 2x + 3x = 180^{\circ},$$

$$\text{解得 } x = 36^{\circ},$$

$$\therefore \angle A = 2 \times 36^{\circ} = 72^{\circ},$$

$$\therefore \angle C = \angle A = 72^{\circ}.$$

5. 已知四边形  $ABCD$  中,  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ , 下列条件不能推导出四边形  $ABCD$  是平行四边形的是 ( )

- A.  $AD \parallel BC$  且  $AB \parallel CD$                       B.  $AD \parallel BC$  且  $AB = CD$   
C.  $\angle DAB = \angle DCB$  且  $\angle ABC = \angle ADC$                       D.  $AD \parallel BC$  且  $OB = OD$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据平行四边形的判定定理, 逐一分析各选项即可.

【详解】 解: A、 $\because AD \parallel BC$ ,  $AB \parallel CD$ , 即四边形两组对边分别平行,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形, A 不符合题意.

B、当  $AD \parallel BC$ ,  $AB = CD$  时, 四边形可以是等腰梯形, 无法判定是平行四边形, B 符合题意.

C、 $\because$  四边形内角和为  $360^\circ$ ， $\angle DAB = \angle DCB$ ， $\angle ABC = \angle ADC$ ，

$$\therefore \angle DAB + \angle ADC = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ,$$

$\therefore AB \parallel CD$ ，同理可得  $AD \parallel BC$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，C 不符合题意.

D、 $\because AD \parallel BC$ ，

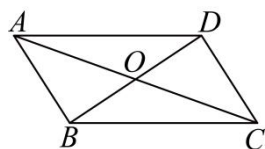
$$\therefore \angle OAD = \angle OCB, \angle ODA = \angle OBC,$$

又  $OB = OD$ ，

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB (AAS),$$

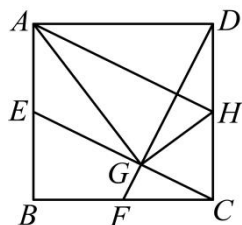
$\therefore OA = OC$ ，即四边形对角线互相平分，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，D 不符合题意.



6. 如图，正方形  $ABCD$  中，点  $E, F, H$  分别是  $AB, BC, CD$  的中点， $CE, DF$  交于  $G$ ，连接  $AG, HG$ 。下

列结论：①  $CE \perp DF$ ；②  $AG = AB$ ；③  $\angle CHG = \angle DAG$ ；④  $HG = \frac{1}{2}AD$ 。其中错误的有（ ）



A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】A

【解析】

【分析】通过证明  $\triangle BCE \cong \triangle CDF$  可得  $CE \perp DF$ ；通过证明  $\triangle ADH \cong \triangle DCF$  可得  $AH \perp DF$ ，进而证得  $AH$  垂直平分  $DG$ ，推出  $AG = AD = AB$ ；利用直角三角形斜边中线性质的外角性质可证  $\angle CHG = \angle DAG$  及  $HG = \frac{1}{2}AD$ ；最后统计错误结论的个数.

【详解】解： $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$$\therefore BC = CD = AD = AB, \angle B = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ,$$

$\because E, F$  分别是  $AB, BC$  的中点，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AB, CF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BE = CF,$$

在  $\triangle BCE$  和  $\triangle CDF$  中,

$$\begin{cases} BC = CD \\ \angle B = \angle DCF, \\ BE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF (SAS),$$

$$\therefore \angle BCE = \angle CDF,$$

$$\because \angle BCE + \angle DCG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF + \angle DCG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CGD = 90^\circ, \text{ 即 } CE \perp DF, \text{ 故①正确;}$$

同理可证  $\triangle ADH \cong \triangle DCF$ ,

$$\therefore \angle DAH = \angle CDF, \quad \angle CDF + \angle ADG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAH + \angle ADG = 90^\circ,$$

$$\therefore AH \perp DF,$$

在  $\triangle DCG$  中,  $\angle DGC = 90^\circ$ ,  $H$  是  $CD$  的中点,

$$\therefore GH = DH = \frac{1}{2}CD,$$

$$\because AH \perp DF,$$

$$\therefore AH \text{ 垂直平分 } DG,$$

$$\therefore AG = AD,$$

$$\because AD = AB,$$

$$\therefore AG = AB, \text{ 故②正确;}$$

$$\because AH \text{ 垂直平分 } DG,$$

$$\therefore \angle DAG = 2\angle DAH,$$

$$\because \angle DAH = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle DAG = 2\angle CDF,$$

$$\because HG = HD,$$

$$\therefore \angle HDG = \angle HGD,$$

$$\therefore \angle CHG = \angle HDG + \angle HGD = 2\angle HDG = 2\angle CDF,$$

$$\therefore \angle CHG = \angle DAG, \text{ 故③正确;}$$

$$\therefore HG = \frac{1}{2}CD, \quad CD = AD,$$

$$\therefore HG = \frac{1}{2}AD, \quad \text{故④正确;}$$

综上所述, 正确的结论有 4 个, 错误的结论有 0 个.

## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 已知点  $A(a, 4)$  与点  $B(-3, b)$  关于  $x$  轴对称, 则点  $(a, b)$  在第 \_\_\_\_\_ 象限.

【答案】三

【解析】

【分析】根据关于  $x$  轴对称的点的坐标特征, 求出  $a$  和  $b$  的值, 再根据象限内点的坐标特征判断点  $(a, b)$  所在象限.

【详解】解:  $\because$  点  $A(a, 4)$  与点  $B(-3, b)$  关于  $x$  轴对称,

$$\therefore a = -3, b = -4,$$

$$\therefore \text{点 } (a, b) \text{ 的坐标为 } (-3, -4).$$

$$\therefore \text{点 } (a, b) \text{ 在第三象限.}$$

8. 一次函数  $y = 5x - 3$  的图像在  $y$  轴上的截距是 \_\_\_\_\_.

【答案】-3

【解析】

【分析】先根据一次函数的解析式判断出  $b$  的值, 再根据一次函数的性质进行解答;

【详解】解:  $\because$  一次函数  $y = 5x - 3$  中  $b = -3$ ,

$$\therefore \text{此函数图像在 } y \text{ 轴上的截距是 } -3.$$

9. 已知  $P(2, -1)$ ,  $Q(-1, 3)$ , 那么  $P$ 、 $Q$  两点间距离为 \_\_\_\_\_.

【答案】5

【解析】

【分析】根据两点间距离公式代入坐标计算即可.

【详解】解:  $\because P(2, -1)$  和  $Q(-1, 3)$ ,

$$\therefore PQ = \sqrt{[(-1) - 2]^2 + [3 - (-1)]^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

10. 关于  $x$  的正比例函数  $y = (m+2)x$ , 若  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $m < -2$

【解析】

【详解】 分析：根据正比例函数的增减性即可求出  $m$  的取值范围.

详解：  $\because y$  随着  $x$  的增大而减小，  $\therefore m+2 < 0$ ， 解得：  $m < -2$ .

点睛：本题主要考查的就是正比例函数的增减性，属于基础题型. 对于正比例函数  $y=kx$ ，当  $k > 0$  时， $y$  随着  $x$  的增大而增大；当  $k < 0$  时， $y$  随着  $x$  的增大而减小.

11. 一次函数  $y = 2x + 5$  图像向下平移后经过点  $(1, -1)$ ，则平移后图像的函数表达式是\_\_\_\_\_.

【答案】

$$y = 2x - 3$$

【解析】

【分析】 一次函数图象上下平移时，一次项系数保持不变，根据平移性质设出平移后的解析式，代入已知点的坐标求解即可；

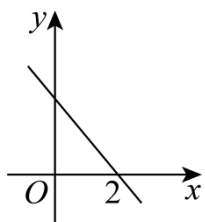
【详解】 解：  $\because$  一次函数图象上下平移时，一次项系数不变，原函数一次项系数为 2，

$\therefore$  设平移后函数表达式为  $y = 2x + b$ ，

将点  $(1, -1)$  代入得：  $-1 = 2 \times 1 + b$ ，解得  $b = -3$ ，

$\therefore$  平移后图像的函数表达式是  $y = 2x - 3$ .

12. 如图，直线  $y = kx + b$  的图象经过点  $(2, 0)$ ，当  $y > 0$  时， $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



【答案】

$$x < 2$$

【解析】

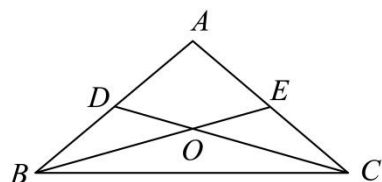
【分析】 根据函数图象可知，直线与  $x$  轴交于点  $(2, 0)$ ，观察  $x$  轴上方的图象对应的自变量  $x$  的取值范围即可；

【详解】 解：由图象可知，直线  $y = kx + b$  与  $x$  轴的交点坐标为  $(2, 0)$ ，

当  $x < 2$  时, 函数图象在  $x$  轴上方, 即  $y > 0$ ,

所以当  $y > 0$  时,  $x$  的取值范围是  $x < 2$ .

13. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $D$ 、 $E$  分别是边  $AB$ 、 $AC$  的中点,  $CD$  和  $BE$  相交于点  $O$ , 如果点  $O$  到边  $BC$  的距离为 2,  $BC = 16$ , 那么  $AB$  的长为\_\_\_\_\_.



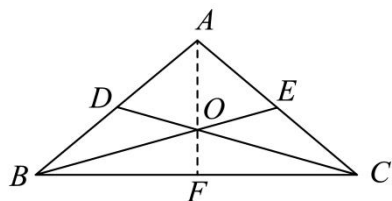
【答案】

10

【解析】

【分析】根据三角形中线的定义确定点  $O$  为  $\triangle ABC$  的重心, 利用等腰三角形三线合一的性质及重心的性质求出  $BC$  边上的高, 再结合勾股定理求解即可.

【详解】解: 连接  $AO$  并延长交  $BC$  于点  $F$ ,



$\because D$ 、 $E$  分别是边  $AB$ 、 $AC$  的中点,

$\therefore CD$ 、 $BE$  是  $\triangle ABC$  的中线,

$\therefore$  点  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心,

$\therefore AF$  是  $\triangle ABC$  的中线,

$\because AB = AC$ ,

$\therefore AF \perp BC$ ,  $BF = CF = \frac{1}{2}BC$ ,

$\because$  点  $O$  到边  $BC$  的距离为 2,

$\therefore OF = 2$ ,

$\because$  点  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心,

$\therefore AO = 2OF = 4$ ,

$\therefore AF = AO + OF = 4 + 2 = 6$ ,

$\because BC = 16$ ,

$$\therefore BF = \frac{1}{2} \times 16 = 8,$$

在  $\text{Rt}\triangle ABF$  中, 由勾股定理得  $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .

14. 若菱形的两条对角线长分别是  $10\text{cm}$  和  $24\text{cm}$ , 则菱形一边上的高是 \_\_\_\_\_  $\text{cm}$ .

【答案】

$$\frac{120}{13}$$

【解析】

【分析】先根据对角线长度计算菱形面积, 再利用菱形对角线互相垂直平分的性质, 结合勾股定理求出菱形边长, 最后利用等面积法列式求解即可.

【详解】解: 设菱形  $ABCD$  中, 两条对角线长分别为  $AC = 24\text{cm}$ ,  $BD = 10\text{cm}$ , 一边上的高为  $h$ ,

$\because$  菱形的面积等于对角线乘积的一半,

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120,$$

$\because$  菱形的对角线互相垂直平分,

$$\therefore \text{两条对角线一半的长度分别为 } \frac{1}{2} AC = 12\text{cm}, \quad \frac{1}{2} BD = 5\text{cm}, \text{ 且 } AC \perp BD,$$

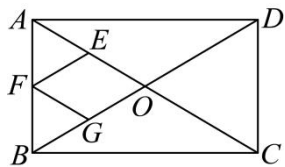
在直角三角形中, 由勾股定理可得菱形的边长  $a = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ ,

$\therefore$  菱形的面积也等于底边长乘以这边上的高,

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = a \cdot h = 13h = 120,$$

$$\text{解得 } h = \frac{120}{13}.$$

15. 如图, 矩形  $ABCD$  对角线相交于点  $O$ ,  $AC$  与  $BD$  的夹角为  $60^\circ$ , 点  $E$ 、 $F$ 、 $G$  分别为  $AO$ 、 $AB$ 、 $BO$  中点, 当四边形  $EFGO$  周长为 12 时, 则矩形  $ABCD$  的面积是: \_\_\_\_\_.



【答案】

$$36\sqrt{3}$$

【解析】

【分析】根据矩形的性质可得对角线相等且互相平分, 结合  $60^\circ$  夹角可证  $\triangle AOB$  是等边三角形, 利用三角形中位线定理及中点定义可得四边形  $EFGO$  的四条边相等, 由周长求出  $OA$  的长, 进而得到  $AB$  和  $AC$  的

长，最后利用勾股定理求出  $BC$  的长即可求解.

【详解】解：∵ 四边形  $ABCD$  是矩形，

$$\therefore AC = BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\because \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$  是等边三角形，

$$\therefore AB = OA = OB,$$

∵ 点  $E$ 、 $F$ 、 $G$  分别为  $AO$ 、 $AB$ 、 $BO$  中点，

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA, OG = \frac{1}{2}OB, EF \text{ 是 } \triangle ABO \text{ 的中位线}, FG \text{ 是 } \triangle ABO \text{ 的中位线},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}OB, FG = \frac{1}{2}OA,$$

$$\therefore OE = OG = EF = FG,$$

∵ 四边形  $EFGO$  周长为 12，

$$\therefore 4OE = 12,$$

$$\therefore OE = 3,$$

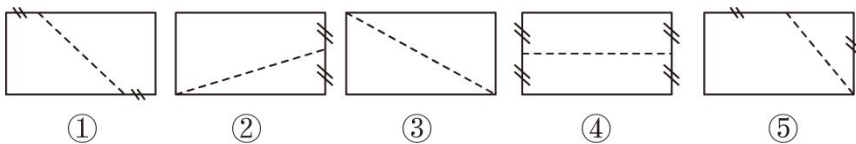
$$\therefore OA = 2OE = 6,$$

$$\therefore AB = 6, AC = 2OA = 12,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中}, \angle ABC = 90^\circ, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot BC = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}.$$

16. 如图，下列矩形中，按虚线剪开后，既能拼出平行四边形，又能拼出三角形的是图形（请填写图形下面的代号）\_\_\_\_\_.



【答案】

②③##③②

【解析】

【分析】根据图形剪开后的形状，结合平行四边形和三角形的拼接条件逐一判断. 图①剪开后是两个梯形，无法拼成三角形；图②剪开后是一个三角形和一个梯形，且剪痕过中点，既能拼成平行四边形又能拼成三角形；图③剪开后是两个三角形，既能拼成平行四边形又能拼成三角形；图④剪开后是两个矩形，无法拼

成三角形；图⑤剪痕不过中点，无法拼成三角形。

【详解】解：①剪开后是两个直角梯形，能拼出平行四边形，但无法拼出三角形，不符合题意；

②剪开后是一个直角三角形和一个直角梯形，且右侧边被平分，将剪下的三角形绕中点旋转 $180^\circ$ 可拼成一个大三角形，将剪下的三角形平移可拼成平行四边形，符合题意；

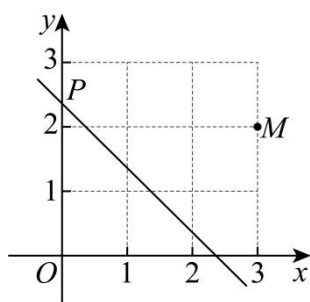
③剪开后是两个全等的直角三角形，能拼成平行四边形和三角形，符合题意；

④剪开后是两个矩形，只能拼出平行四边形，无法拼出三角形，不符合题意；

⑤剪开后是一个直角三角形和一个直角梯形，但剪痕未经过中点，无法拼出三角形，不符合题意，

$\therefore$ 符合条件的图形为②③。

17. 如图，点 $M$ 的坐标为 $(3,2)$ ，点 $P$ 从 $(0,-1)$ 出发，以每秒2个单位的速度沿 $y$ 轴向上移动，同时过点 $P$ 的直线 $l$ 也随之平移，且直线 $l$ 与直线 $y=-x$ 平行，如果点 $M$ 关于直线 $l$ 的对称点落在坐标轴上，如果点 $P$ 的移动时间为 $t$ 秒，那么 $t$ 的值可以是\_\_\_\_\_。



【答案】1.5或2

【解析】

【分析】根据点 $M$ 关于直线 $l$ 的对称点落在 $x$ 轴或 $y$ 轴上，分两种情况讨论，利用轴对称性质得出相关三角形为等腰直角三角形，从而求出点 $P$ 的坐标，进而求出 $t$ 的值。

【详解】解：由题意设直线 $l$ 的解析式为 $y=-x+b$ ，

$\because$ 点 $P$ 从 $(0,-1)$ 出发，以每秒2个单位的速度沿 $y$ 轴向上移动，

$\therefore$ 点 $P$ 的坐标为 $(0,-1+2t)$ ，

$\because$ 直线 $l$ 过点 $P$ ，

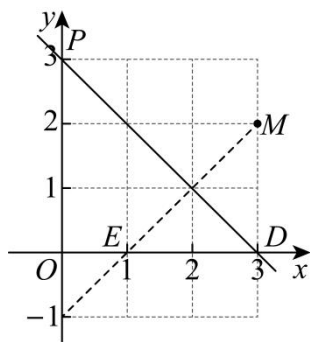
$\therefore b=-1+2t$ ，

$\therefore$ 直线 $l$ 的解析式为 $y=-x-1+2t$ ，

$\because$ 直线 $l$ 平行于直线 $y=-x$ ，

$\therefore$ 直线 $l$ 与坐标轴的夹角为 $45^\circ$ ，

①当点  $M$  关于直线  $l$  的对称点  $E$  落在  $x$  轴上时，设直线  $l$  与  $x$  轴交于点  $D$ ，



∵ 点  $M$  与点  $E$  关于直线  $l$  对称，

∴ 直线  $l$  垂直平分线段  $ME$ ，  $DM = DE$ ，

∴ 直线  $l$  平分  $\angle MDE$ ，

∵ 直线  $l$  与  $x$  轴夹角为  $45^\circ$ ，即  $\angle PDO = 45^\circ$ ，

∴  $\angle MDE = 2\angle PDO = 90^\circ$ ，

∴  $DM \perp x$  轴，

∵ 点  $M$  的坐标为  $(3, 2)$ ，

∴ 点  $D$  的坐标为  $(3, 0)$ ，  $DM = 2$ ，

∴  $DE = DM = 2$ ，

∵ 点  $E$  在点  $D$  左侧，

∴ 点  $E$  的坐标为  $(1, 0)$ ，

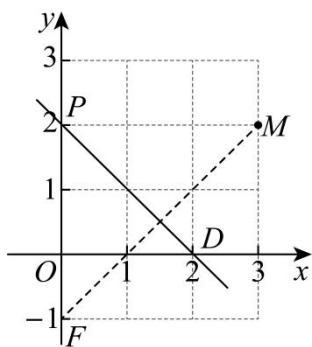
∵ 直线  $l$  垂直平分  $ME$ ，

∴ 线段  $ME$  的中点在直线  $l$  上，

∴ 线段  $ME$  的中点坐标为  $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$ ，即  $(2, 1)$ ，

将  $(2, 1)$  代入  $y = -x - 1 + 2t$ ，得  $1 = -2 - 1 + 2t$ ，解得  $t = 2$ ；

②当点  $M$  关于直线  $l$  的对称点  $F$  落在  $y$  轴上时，



$\because$  点  $M$  与点  $F$  关于直线  $l$  对称, 且点  $P$  在直线  $l$  上,

$\therefore PM = PF$ , 直线  $l$  平分  $\angle MPF$ ,

$\because$  直线  $l$  与  $y$  轴夹角为  $45^\circ$ , 即  $\angle OPD = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle MPF = 2\angle OPD = 90^\circ$ ,

$\therefore PM \perp y$  轴,

$\because$  点  $M$  的坐标为  $(3, 2)$ ,

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(0, 2)$ ,

$\therefore -1 + 2t = 2$ , 解得  $t = 1.5$ ,

综上所述,  $t$  的值为  $1.5$  或  $2$ .

18. 如果一个四边形的一条对角线把它分成两个等腰三角形, 那么我们就称这条对角线是四边形的“美丽线”. 已知  $AC$  是四边形  $ABCD$  的“美丽线”, 如果  $AB = BC = AD$ ,  $\angle BAD = 90^\circ$ , 那么  $\angle BCD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ .

**【答案】** 135 或 90 或 45

**【解析】**

**【分析】** 由  $AC$  是四边形  $ABCD$  的美丽线, 可以得出  $\triangle ACD$  是等腰三角形, 从图1, 图2, 两种情况运用等边三角形的性质和判定, 正方形的性质和判定和  $30^\circ$  角的直角三角形的性质就可以求出  $\angle BCD$  的度数.

**【详解】** 解:  $\because AC$  是四边形  $ABCD$  的美丽线,

$\therefore \triangle ACD$  是等腰三角形.

$\because AB = AD = BC$ ,

如图1, 当  $AD = AC$  时,

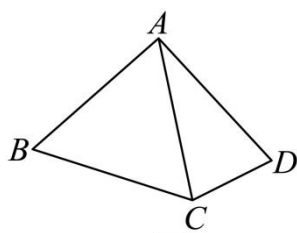


图1

$$\therefore AB = AC = BC, \quad \angle ACD = \angle ADC,$$

$\therefore \triangle ABC$  是正三角形,

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ.$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ADC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ.$$

如图 2, 当  $AD = CD$  时,

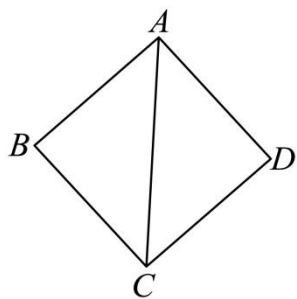


图2

$$\therefore AB = AD = BC = CD.$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ;$$

如图 3, 当  $AC = CD$  时,

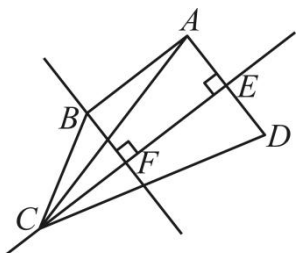


图3

过点  $C$  作  $CE \perp AD$  于点  $E$ , 过点  $B$  作  $BF \perp CE$  于点  $F$ , 如图 3 所示,

$$\because AC = CD, \quad CE \perp AD,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore AE = \frac{1}{2}AD, \quad \angle ACE = \angle DCE, \\
&\because \angle BAD = 90^\circ, \quad CE \perp AD, \quad BF \perp CE, \\
&\therefore \text{四边形 } ABFE \text{ 是矩形}, \\
&\therefore BF = AE = \frac{1}{2}AD, \quad AB \parallel CE, \\
&\because AB = AD = BC, \\
&\therefore BF = \frac{1}{2}BC, \quad \angle BAC = \angle BCA, \\
&\therefore \angle BCF = 30^\circ, \\
&\because AB \parallel CE, \\
&\therefore \angle BAC = \angle ACE, \\
&\because \angle BAC = \angle BCA, \\
&\therefore \angle BCA = \angle ACE = \frac{1}{2}\angle BCF = 15^\circ, \\
&\therefore \angle DCE = 15^\circ, \\
&\therefore \angle BCD = \angle BCA + \angle ACE + \angle DCE = 15^\circ + 15^\circ + 15^\circ = 45^\circ,
\end{aligned}$$

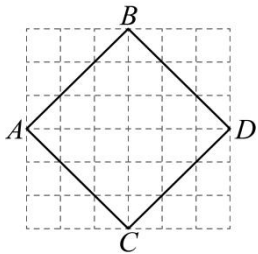
综上， $\angle BCD$  的度数为  $135^\circ$  或  $90^\circ$  或  $45^\circ$ 。

故答案为：135 或 90 或 45。

【点睛】本题考查了四边形的“美丽线”的定义和性质的运用，“美丽线”的判定，等边三角形的性质和判定的运用，矩形的性质与判定，正方形的性质和判定的运用， $30^\circ$  角的直角三角形的性质的运用。

### 三、解答题（第 19-20 题每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22-24 题每题 8 分，第 25 题 12 分，满分 52 分）

19. 在图中画出适当的平面直角坐标系，使  $A$ 、 $B$  两点的坐标分别为  $(-5,1)$  和  $(-2,4)$ ，并直接写出点  $C$ 、 $D$  的坐标。

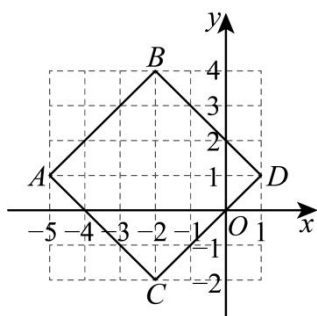


【答案】作图见解析， $C(-2,-2)$ 、 $D(1,1)$ 。

【解析】

【分析】首先根据点  $A$ 、 $B$  的坐标确定坐标原点和  $x$ 、 $y$  轴的正方向，进而建立平面直角坐标系，再结合图形得出  $C$ 、 $D$  两点的坐标，进而判断这两个点所在的象限.

【详解】解：建立平面直角坐标系如图：



得  $C(-2, -2)$ 、 $D(1, 1)$ .

20. 已知  $y-1$  与  $3x+4$  成正比例，且当  $x=-2$  时， $y=-3$ .

(1) 求出  $y$  与  $x$  之间的函数关系式；

(2) 若点  $P(a, -3)$  在这个函数的图象上，求  $a$  的值.

【答案】(1)

$$y = 6x + 9$$

(2)

$$a = -2$$

【解析】

【分析】(1) 根据  $y-1$  与  $3x+4$  成正比例的定义设出关系式，代入已知  $x, y$  的值求出比例系数，整理得到  $y$  与  $x$  的函数关系式；

(2) 将点  $P$  的坐标代入所得函数解析式，解一元一次方程得到  $a$  的值.

【小问 1 详解】

解：∵  $y-1$  与  $3x+4$  成正比例，

$$\therefore \text{设 } y-1 = k(3x+4) (k \neq 0),$$

把  $x=-2$ ， $y=-3$  代入上式得， $-3-1 = k \times [3 \times (-2) + 4]$ ,

解得  $k=2$ ,

把  $k=2$  代入所设式子，整理得  $y = 6x + 9$ ;

【小问 2 详解】

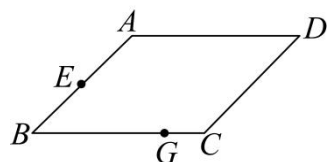
解:  $\because$  点  $P(a, -3)$  在这个函数的图象上,

$\therefore$  把  $x = a$ ,  $y = -3$  代入  $y = 6x + 9$  得  $-3 = 6a + 9$ ,

解得:  $a = -2$ .

21. 仅用无刻度直尺完成下列作图: (保留作图痕迹, 写结论, 不要求写做法)

如图,  $E$  为平行四边形  $ABCD$  的边  $AB$  的中点, 点  $G$  为  $BC$  上一点.



(1) 利用平行四边形的性质 (1) 画出  $CD$  的中点  $F$ ;

(2) 在  $AD$  上画出点  $H$ , 使得  $AH = CG$ .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

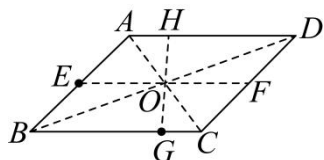
【解析】

【分析】(1) 连接平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ , 连接  $EO$  延长交  $CD$  于点  $F$ , 点  $F$  即为所求  $CD$  中点;

(2) 连接  $GO$  延长交  $AD$  于点  $H$ , 点  $H$  即为所求, 满足  $AH = CG$ .

【小问 1 详解】

解: 如图, 点  $F$  即为所求;



证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\therefore AO = CO$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ ,

$\therefore \angle EAO = \angle FCO$ ,  $\angle AEO = \angle CFO$ ,

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO$  (AAS),

$\therefore AE = CF$ ,

$\because E$  为平行四边形  $ABCD$  的边  $AB$  的中点,

$\therefore AE = EB = \frac{1}{2} AB$ ,

$\therefore CF = DF = \frac{1}{2} CD$ ;

【小问 2 详解】

解：如图，点  $H$  即为所求；

证明： $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$$\therefore AO = CO, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle HAO = \angle GCO,$$

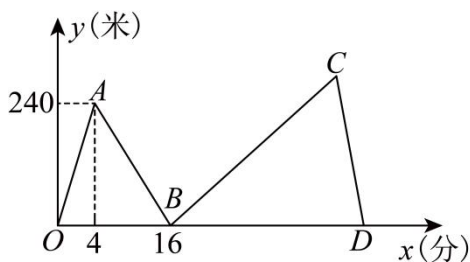
在  $\triangle AHO$  和  $\triangle CGO$  中，

$$\begin{cases} \angle HAO = \angle GCO \\ AO = CO \\ \angle AOH = \angle COG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AHO \cong \triangle CGO (\text{ASA}),$$

$$\therefore AH = CG.$$

22. 甲、乙两人在笔直的湖边公路上同起点、同终点、同方向匀速步行 3000 米，先到终点的人原地休息. 已知甲先出发 4 分钟，在整个步行过程中，甲、乙两人间的距离  $y$  (米) 与甲出发的时间  $x$  (分) 之间的关系如图中折线  $OA-AB-BC-CD$  所示.



- (1) 求线段  $AB$  的表达式；
- (2) 求乙的步行速度；
- (3) 求乙到达终点时，甲离终点还有多少米？

【答案】 (1)  $y = -20x + 320 (4 \leq x \leq 16)$

- (2) 80 米/分      (3) 510 米

【解析】

【分析】 (1) 运用待定系数法即可解答；

(2) 首先求出甲的速度，然后求出相遇时行走的路程，然后求解即可；

(3) 求出与终点的距离，分别计算出相遇后，到达终点甲和乙所用的时间，二者的时间差即可所求答案.

【小问 1 详解】

解：根据题意得：点  $A(4, 240)$ ， $B(16, 0)$ ，

设线段  $AB$  的表达式解析式为  $y = kx + b$ ,

代入得: 
$$\begin{cases} 4k + b = 240 \\ 16k + b = 0 \end{cases},$$

解得: 
$$\begin{cases} k = -20 \\ b = 320 \end{cases},$$

$\therefore$  线段  $AB$  的表达式为  $y = -20x + 320 (4 \leq x \leq 16)$ ;

【小问 2 详解】

解: 甲的速度为  $240 \times 4 = 60$  (米/分),

相遇时行走的路程为  $60 \times 16 = 960$  (米),

$\therefore$  甲先出发 4 分钟,

$\therefore$  相遇时乙行走的时间为  $16 - 4 = 12$  (分)

$\therefore$  乙的步行速度为  $960 \div 12 = 80$  (米/分),

【小问 3 详解】

解: 由 (2) 得: 相遇时行走的路程 960 米,

$\therefore$  与终点的距离为  $3000 - 960 = 2040$  米,

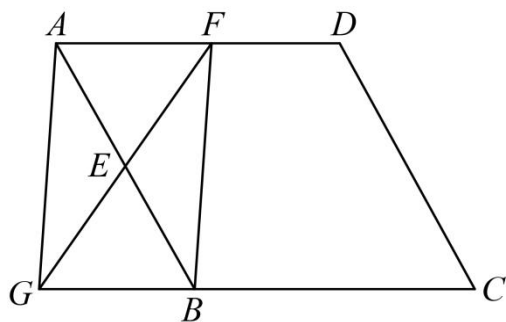
相遇后, 到达终点甲所用的时间为:  $\frac{2040}{60} = 34$  分,

相遇后, 到达终点乙所用的时间为:  $\frac{2040}{80} = 25.5$  分,

$\therefore$  乙比甲早  $34 - 25.5 = 8.5$  分钟到达终点,

$\therefore$  乙到达终点时, 甲离终点还有  $8.5 \times 60 = 510$  米.

23. 如图, 已知平行四边形  $ABCD$ ,  $E$  是边  $AB$  的中点, 点  $F$  在边  $AD$  上, 连接  $FE$  并延长交  $CB$  的延长线于点  $G$ , 连接  $BF$ 、 $AG$ .



(1) 如果  $\angle AFG = \angle C$ , 求证: 四边形  $AGBF$  是矩形;

(2) 如果  $F$  是边  $AD$  的中点, 且  $\angle AFG = \frac{1}{2} \angle ADC$ , 求证: 四边形  $ABCD$  是菱形.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，矩形的判定，菱形的判定，三角形的中位线，熟练掌握矩形和菱形的判定是解题的关键.

(1) 先证出  $\triangle AEF \cong \triangle BEG$ ，再根据  $\angle AFG = \angle C$ ，得到  $AB = GF$ ，即可证明；

(2) 连接  $BD$ ，得到  $EF$  是  $\triangle ABD$  的中位线，从而证得  $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ ，得出  $AD = AC$ ，即可证明.

【小问 1 详解】

证明： $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形

$$\therefore AD \parallel BC, \angle FAE = \angle C$$

$$\therefore \angle EAF = \angle EBG$$

$\because E$  是边  $AB$  的中点，

$$\therefore EA = EB$$

$$\text{又} \because \angle AEF = \angle BEG$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BEG (\text{ASA})$$

$$\therefore AF = BG, EF = EG$$

$$\text{又} \because AD \parallel BC$$

$\therefore$  四边形  $AGBF$  是平行四边形

$$\therefore \angle AFG = \angle C$$

$$\therefore \angle AFG = \angle FAE$$

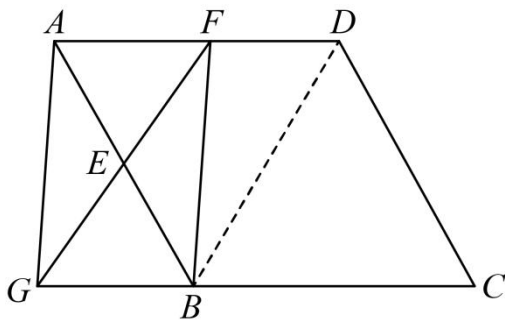
$$\therefore EA = EF$$

$$\therefore AB = GF$$

$\therefore$  四边形  $AGBF$  是矩形.

【小问 2 详解】

连接  $BD$ ，如图，



$\because E$  是边  $AB$  的中点,  $F$  是边  $AD$  的中点,

$\therefore EF$  是  $\triangle ABD$  的中位线,

$\therefore EF \parallel BD$

$\therefore \angle AFE = \angle ADB$

又  $\because \angle AFG = \frac{1}{2} \angle ADC$

$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ADC$

$\therefore \angle ADB = \angle CDB$

又  $\because \angle DAB = \angle C$ ,  $BD = BD$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CDB$  (AAS)

$\therefore AD = DC$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是菱形.

#### 24. 综合与实践: 折纸中的数学

折纸是我国传统的民间艺术, 也是同学们喜欢的手工活动之一, 幸运星、纸飞机、千纸鹤、密信等折纸活动在生活中都是广为流传的, 通过折纸我们可以得到许多美丽的图形, 同时折纸的过程还蕴含着丰富的数学知识, 折纸往往从长方形纸片开始, 下面就让我们带着数学的眼光来探究一下有关长方形纸片的折叠问题, 看看折叠长方形纸片蕴含着哪些丰富的数学知识.

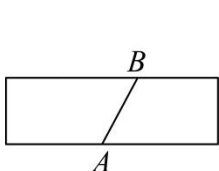


图1

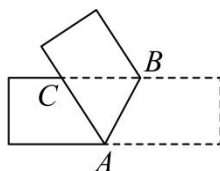


图2

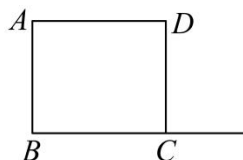
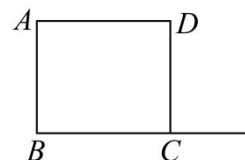


图3



备用图

(1) 折纸1: 如图1, 在一张长方形纸片上任意画一条线段  $AB$ , 将纸片沿线段  $AB$  折叠 (如图2).

问题1: 重叠部分的  $\triangle ABC$  的形状\_\_\_\_\_ (是、不是) 等腰三角形.

问题2: 若  $AB = 4\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ , 则重叠部分  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

(2) 折纸2: 如图3, 长方形纸片  $ABCD$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ , 若点  $M$  为射线  $BC$  上一点, 将  $\triangle ABM$  沿

着直线  $AM$  折叠，折叠后点  $B$  的对应点为  $B'$ ，当点  $B'$  恰好落在  $BC$  的垂直平分线上时，求  $BM$  的长.

【答案】(1) 问题1: 是; 问题2:  $2\sqrt{21}$

(2)  $BM$  的长为15或 $\frac{5}{3}$

【解析】

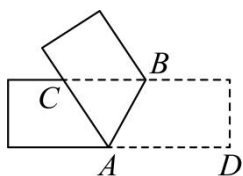
【分析】(1) 据折叠得  $\angle BAC = \angle BAD$ ，据长方形对边平行得  $\angle BAD = \angle CBA$ ，故  $\angle BAC = \angle CBA$ ，进而证明等腰三角形；根据等腰三角形三线合一，作  $CE \perp AB$ ，由勾股定理算出  $CE$ ，然后计算三角形面积；

(2) 分两种情况讨论，当  $M$  在外部：由垂直平分线、折叠得  $B'N = 4$ ，再根据角相等，推得正切值相等，列方程求  $BM$ ；当  $M$  在内部：由垂直平分线、折叠得  $B'N = 4$ ，进而求得  $B'H = 1$ ，然后由勾股定理列方程求  $BM$ 。

【小问1详解】

问题1: 解: 是, 理由如下.

如图, 根据折叠的性质, 可得  $\angle BAC = \angle BAD$ ,



$\because$  纸片为长方形,

$\therefore BC \parallel AD$ ,

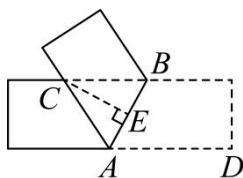
$\therefore \angle BAD = \angle CBA$ ,

$\therefore \angle BAC = \angle CBA$ ,

故  $ABC$  是等腰三角形.

故答案为: 是.

问题2: 解: 如图, 过点  $C$  作  $CE \perp AB$  交  $AB$  于点  $E$ ,



$\therefore \angle BAC = \angle CBA$ ,

$\therefore CA = CB$ ,

$\because CE \perp AB$ ,

$\therefore E$  为  $AB$  中点,

$$\because AB = 4\text{cm}, \quad BC = 5\text{cm},$$

$$\therefore BE = AE = 2\text{cm},$$

$$\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}\text{cm},$$

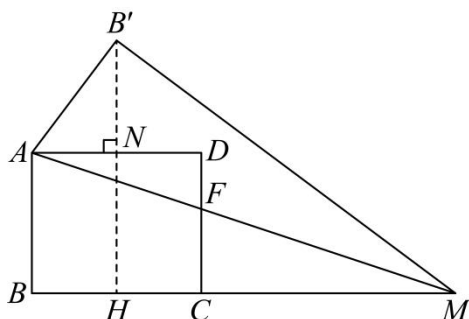
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21}\text{cm}^2.$$

故答案为:  $2\sqrt{21}$ .

【小问 2 详解】

解: ① 如图, 点  $M$  在矩形外部,  $BC$  的中垂线交  $AD$  于点  $N$ , 交  $BC$  于点  $H$ , 则  $\angle ANB' = \angle MHB' = 90^\circ$ ,

$$NH = AB = 5,$$



根据折叠的性质,  $AB = AB' = 5$ ,  $\angle ABM = \angle AB'M = 90^\circ$ ,

$$\because BC = 6,$$

$$\therefore AN = BH = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore B'N = \sqrt{AB'^2 - AN^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore \tan \angle B'AN = \frac{B'N}{AN} = \frac{4}{3}, \quad B'H = B'N + NH = 4 + 5 = 9,$$

$$\because \angle B'AN + \angle AB'N = 90^\circ, \quad \angle HB'M + \angle AB'N = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B'AN = \angle HB'M,$$

$$\therefore \tan \angle B'AN = \tan \angle HB'M = \frac{MH}{B'H} = \frac{4}{3},$$

设  $MC = x$ , 则  $MH = 3 + x$ ,

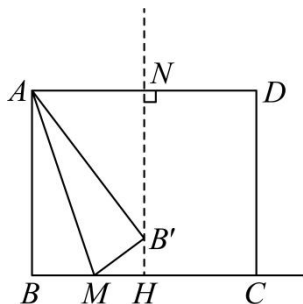
$$\therefore \frac{3+x}{9} = \frac{4}{3},$$

解得  $x = 9$ , 即  $MC = 9$ ,

则  $BM = BC + MC = 6 + 9 = 15$ ;

② 如图, 点  $M$  在矩形内部,  $BC$  的中垂线交  $AD$  于点  $N$ , 交  $BC$  于点  $H$ , 则  $\angle ANB' = \angle MHB' = 90^\circ$ ,

$$NH = AB = 5, \quad AN = BH = \frac{1}{2}BC = 3,$$



根据折叠的性质, 可知  $\angle ABM = \angle AB'M = 90^\circ$ ,  $AB = AB' = 5$ ,

$$\therefore NB' = \sqrt{AB'^2 - AN^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore B'H = NH - NB' = 5 - 4 = 1,$$

设  $BM = x$ , 则  $MB' = x$ ,  $MH = 3 - x$ ,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle MHB' \text{ 中, } MH^2 + B'H^2 = MB'^2,$$

$$\text{可得 } (3-x)^2 + 1^2 = x^2,$$

$$\text{化简得 } 6x = 10,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{3}, \text{ 即 } BM = \frac{5}{3}.$$

$$\text{综上, } BM = 15 \text{ 或 } BM = \frac{5}{3}.$$

$$\text{答: } BM \text{ 的长为 } 15 \text{ 或 } \frac{5}{3}.$$

**【点睛】** 本题考查长方形的性质、折叠的性质、等腰三角形的判定、勾股定理的应用, 明确折叠前后对应边相等、对应角相等, 运用分类讨论思想是解题关键.

25. 如图 1, 直线  $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$  图象与  $y$  轴、 $x$  轴分别交于  $A$ 、 $B$  两点, 点  $C$ 、 $D$  分别是射线  $OA$ 、射线  $BA$  上一动点 (点  $C$  与点  $A$  不重合), 且  $CD = DA$ .

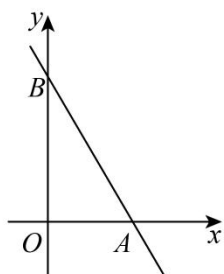


图1

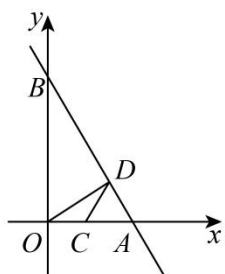
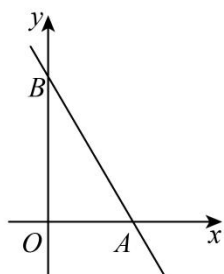


图2



备用图

(1) 求点  $A$ 、 $B$  坐标；

(2) 点  $C$ 、 $D$  在线段  $OA$ 、 $AB$  上时 (不与端点重合), 如图 2, 设点  $C$  的坐标为  $(m, 0)$ ,  $\triangle OCD$  的面积为  $S$ , 用含  $m$  的代数式表示  $S$ , 并写出  $m$  的取值范围；

(3) 若  $E$  为坐标平面内的一点, 当以  $O$ 、 $B$ 、 $D$ 、 $E$  为顶点的四边形为菱形时, 直接写出  $C$  的坐标.

**【答案】** (1)  $A(1, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3})$

$$(2) S = -\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}m (0 < m < 1)$$

(3)  $(\sqrt{3}-1, 0)$  或  $(2, 0)$  或  $(0, 0)$

**【解析】**

**【分析】** (1) 分别令  $x=0$ ,  $y=0$  求解即可；

(2) 取  $AB$  的中点  $T$ , 连接  $OT$ , 证明  $\triangle AOT$  为等边三角形, 则  $\angle BAO = 60^\circ$ , 即可得到  $\triangle ACD$  为等边三角形, 那么  $AD = CD = AC = AO - OC = 1 - m$ , 过点  $D$  作  $DH \perp AO$  于点  $H$ , 然后根据  $30^\circ$  直角三角形的性质以及勾股定理求出  $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-m)$ , 即可建立函数关系式；

(3) 当以  $O$ 、 $B$ 、 $D$ 、 $E$  为顶点的四边形为菱形时, 则  $\triangle BDO$  为等腰三角形, 再分类讨论求解即可.

**【小问 1 详解】**

解: 对于  $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ ,

当  $x=0$  时,  $y = \sqrt{3}$ ;

当  $y=0$  时,  $-\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ , 解得  $x=1$

$\therefore A(1, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3})$ ;

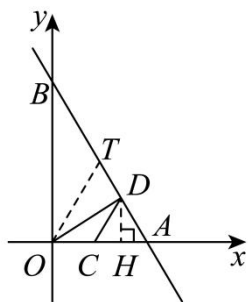
**【小问 2 详解】**

解:  $\because A(1,0), B(0,\sqrt{3})$

$$\therefore OA=1, OB=\sqrt{3}$$

$$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2$$

取  $AB$  的中点  $T$ , 连接  $OT$ ,



$$\text{则 } OT=AT=\frac{1}{2}AB=1$$

$$\therefore OA=OT=AT=1$$

$\therefore \triangle AOT$  为等边三角形,

$$\therefore \angle BAO=60^\circ,$$

$$\because CD=DA,$$

$\therefore \triangle ACD$  为等边三角形,

$$\therefore AD=CD=AC=AO-OC=1-m$$

过点  $D$  作  $DH \perp AO$  于点  $H$

$$\therefore \angle ADH=90^\circ-60^\circ=30^\circ$$

$$\therefore AH=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(1-m)$$

$$\therefore DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{3}AH=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-m)$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}OC \times DH=\frac{1}{2}m \times \frac{\sqrt{3}}{2}(1-m)=\frac{\sqrt{3}}{4}m(1-m)$$

$$\text{即 } S=-\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{\sqrt{3}}{4}m(0 < m < 1);$$

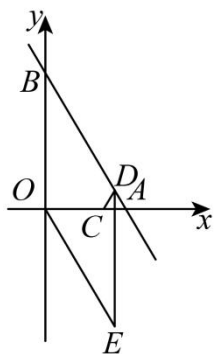
【小问 3 详解】

解: 当以  $O, B, D, E$  为顶点的四边形为菱形时, 则  $\triangle BDO$  为等腰三角形,

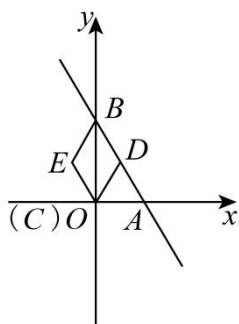
当  $BD=BO=\sqrt{3}$  时, 则  $AD=AC=AB-BD=2-\sqrt{3}$ ,

$$\therefore OC = OA - AC = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore C(\sqrt{3} - 1, 0);$$



当  $DB = DO$  时,



$$\therefore \angle DBO = \angle DOB = 90^\circ - \angle BAO = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DOA = 90^\circ - \angle DOB = 60^\circ = \angle BAO$$

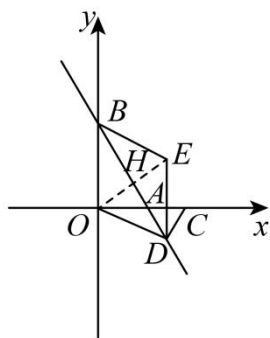
$\therefore \triangle ADO$  为等边三角形,

$\therefore \triangle ACD$  为等边三角形, 且点  $C$  在射线  $OA$  上

$\therefore$  点  $C, O$  重合,

$$\therefore C(0, 0);$$

当  $OB = OD$  时, 连接  $OE$  交  $BD$  于点  $H$ ,



$\therefore$  根据菱形可得,  $BH = DH$ ,  $OE \perp BD$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore BH = \sqrt{3}OH = \frac{3}{2}$$

$$\therefore BD = 2BH = 3$$

$$\therefore AD = AC = BD - BA = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore C(2,0),$$

综上：点  $C$  的坐标为  $(\sqrt{3}-1,0)$  或  $(2,0)$  或  $(0,0)$  .