

上海市延安初级中学 2025 学年第二学期初二年级数学学科

期中阶段性测试试卷

(测试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 点 $A(0,3)$ 关于原点对称的点的坐标是 ()

- A. $(0,3)$ B. $(0,-3)$ C. $(3,0)$ D. $(-3,0)$

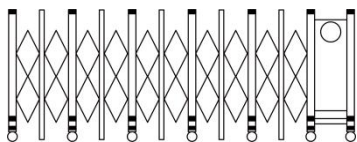
【答案】 B

【解析】

【分析】 关于原点对称的两个点, 横、纵坐标分别互为相反数;

【详解】 解: 点 A 关于原点对称的点的坐标是 $(0,-3)$.

2. 如图所示的伸缩门, 其原理是 ()



- A. 两点之间线段最短 B. 两点确定一条直线
C. 三角形的稳定性 D. 四边形的不稳定性

【答案】 D

【解析】

【分析】 观察伸缩门的结构, 发现其由许多四边形组成, 利用四边形的不稳定性使其能够自由伸缩;

【详解】 解: $\because$ 伸缩门是由许多四边形组成的结构,

$\therefore$ 利用的是四边形的不稳定性, 使其能够自由伸缩.

3. 下列 y 关于 x 的函数中, 一定是一次函数的是 ()

- A. $y = kx + b$ (k 、 b 是常数) B. $y = \frac{1}{x} + 2$
C. $y = \frac{x}{2}$ D. $y = x^2 + 1$

【答案】 C

【解析】

【详解】 解: 选项 A: 若 $k = 0$, 该函数不是一次函数, 故 A 不符合题意;

选项 B: $y = \frac{1}{x} + 2$, $\frac{1}{x}$ 不是整式, 不符合一次函数定义, 故 B 不符合题意;

选项 C: $y = \frac{x}{2}$ 可化为 $y = \frac{1}{2}x$, 满足一次函数定义, 故 C 符合题意;

选项 D: $y = x^2 + 1$, x 的最高次数为 2, 不是一次函数, 不符合定义, 故 D 不符合题意.

4. 在平面直角坐标系中, 点 P 在第二象限, 它到 x 轴、 y 轴的距离分别为 3 个单位长度和 4 个单位长度, 那么点 P 的坐标是 ()

- A. $(-4, 3)$ B. $(-3, 4)$ C. $(4, -3)$ D. $(3, -4)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据第二象限内点的坐标特征, 以及点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值, 到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值, 即可求解点 P 的坐标.

【详解】解: 设点 P 的坐标为 (a, b) ,

$\because$ 点 P 在第二象限,

$$\therefore a < 0, b > 0,$$

$\because$ 点 P 到 x 轴的距离为 3 个单位长度, 到 y 轴的距离为 4 个单位长度,

$$\therefore |b| = 3, |a| = 4,$$

$$\therefore a = -4, b = 3,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-4, 3).$$

5. 矩形是特殊的平行四边形, 下列性质矩形具有而平行四边形不一定具有的是 ()

- A. 对边平行 B. 对边相等 C. 对角线互相平分 D. 对角线相等

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查矩形和平行四边形的性质, 熟练掌握矩形和平行四边形的性质是解题关键. 根据矩形和平行四边形都有的性质: 对边平行且相等, 对角线互相平分等; 矩形具有而平行四边形不具有的是对角线相等解答即可.

【详解】解: A、矩形和平行四边形的对边都平行, 故不合题意;

B、矩形和平行四边形的对边都相等, 故不合题意;

C、矩形和平行四边形的对角线都互相平分, 故不合题意;

D、矩形的对角线相等，平行四边形的对角线不相等，故符合题意.

故选 D.

6. 在同一个平面直角坐标系中，乐乐分别画出了四条直线 $y = 2x + 4$ 、 $y = 2x - 4$ 、 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ ，那么下列说法错误的是（ ）

A. 如果 $k_1 = k_2 = 0$ ， $b_1 \neq b_2$ ，那么这四条直线所围成的四边形一定是平行四边形

B. 如果 $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}$ ， $b_1 \neq b_2$ ，那么这四条直线所围成的四边形一定是矩形

C. 如果 $k_1 = 0$ ， $b_1 = 4$ ， $k_2 < 0$ ， $b_2 = -4$ ，那么这四条直线所围成的四边形一定是只有一组对边平行的梯形

D. 如果 $k_1 = k_2 < 0$ ， $b_1 = 2k_1$ ， $b_2 = -2k_2$ ，那么这四条直线所围成的四边形一定是菱形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图像性质与特殊四边形的判定，核心思路：一次函数 $y = kx + b$ 中， k 相等 b 不等时两直线平行，自变量系数乘积为 -1 时两直线垂直，结合平行四边形、矩形、梯形、菱形的判定逐一分析选项即可.

【详解】解：已知直线 $y = 2x + 4$ 和 $y = 2x - 4$ ， $k = 2$ 且 b 不相等，因此两直线平行，

对选项 A：∵ $k_1 = k_2 = 0$ ， $b_1 \neq b_2$ ，∴ $y = b_1$ 与 $y = b_2$ 互相平行，∴ 四边形两组对边分别平行，因此是平行四边形，A 正确；

对选项 B：∵ $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}$ ， $b_1 \neq b_2$ ，∴ 两条直线互相平行，且 $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$ ，说明相邻两组邻边互相垂直，∴ 对边平行且四个角为直角，因此四边形是矩形，B 正确；

对选项 C：∵ $k_1 = 0$ ， $b_1 = 4$ ，∴ 直线为 $y = 4$ ，又 $k_2 < 0$ ， $b_2 = -4$ ，因此 $y = k_2x - 4$ 的自变量系数既不为 0 也不为 2，仅原有 $y = 2x + 4$ 与 $y = 2x - 4$ 一组对边平行，另一组对边不平行，因此四边形是只有一组对边平行的梯形，C 正确；

对选项 D：∵ $k_1 = k_2 < 0$ ， $b_1 = 2k_1$ ， $b_2 = -2k_2$ ，因此 $y = k_1x + 2k_1$ 与 $y = k_2x - 2k_2$ 平行，四边形为平行四边形，仅当 $k_1 = -2$ 时邻边长度相等，是菱形，若 k_1 取其他负数，邻边长度不相等，不是菱形，因此不一定是菱形，D 错误.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 如果一个 n 边形过一个顶点有 8 条对角线, 那么 $n =$ _____.

【答案】 11

【解析】

【分析】 根据从 n 边形的一个顶点可以作对角线的条数为 $(n-3)$ 条, 即可求出边数.

【详解】 解: $\because$ 一个 n 边形过一个顶点有 8 条对角线,

$\therefore n-3=8$, 解得 $n=11$.

故答案为 11.

【点睛】 本题考查了多边形的对角线公式, 牢记公式是解题的关键.

8. 一次函数 $y = \sqrt{2}x - 4$ 的图像经过第 _____ 象限.

【答案】

一、三、四

【解析】

【分析】 根据一次函数的性质, 通过 k 和 b 的符号即可判断函数图像经过的象限.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = \sqrt{2}x - 4$ 中, $k = \sqrt{2} > 0$, $b = -4 < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = \sqrt{2}x - 4$ 的图像经过第一、三、四象限.

9. 小华家在延安初级中学向西走 1000 米, 再向北走 1500 米处, 如果以学校所在位置为原点, 分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴正方向, 以 500 米为单位长度建立平面直角坐标系, 那么小华家的位置的坐标是 _____.

【答案】 $(-2, 3)$

【解析】

【分析】 根据给定的平面直角坐标系的原点, 正方向和单位长度, 分别确定横纵坐标的符号与数值, 即可得到小华家的坐标.

【详解】 解: 由题意得, 以学校所在位置为原点, 正东方向为 x 轴正方向, 正北方向为 y 轴正方向, 以 500 米为单位长度建立平面直角坐标系,

小华家在学校向西 1000 米, 向西为 x 轴负方向, 则横坐标为 $-\frac{1000}{500} = -2$,

小华家再向北走 1500 米, 向北为 y 轴正方向, 则纵坐标为 $\frac{1500}{500} = 3$,

故小华家位置的坐标为 $(-2, 3)$.

10. 经过点 $A(2, -3)$ 且垂直于 x 轴的直线可记为直线_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 根据垂直于 x 轴的直线的性质，结合已知点的坐标即可得到结果.

【详解】 在平面直角坐标系中，垂直于 x 轴的直线上的所有点的横坐标相等，已知所求直线经过点 $A(2, -3)$ ，该点的横坐标为 2，因此所求直线上所有点的横坐标均为 2，可得该直线为 $x = 2$.

11. 已知一次函数 $y = (2 - a)x - 3$ (a 是常数)，且 y 随着 x 的增大而减小，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】

$a > 2$

【解析】

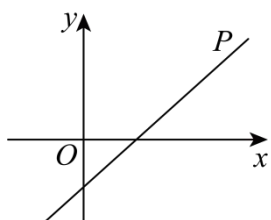
【分析】 根据一次函数的增减性，可得一次项系数小于零，列出关于 a 的不等式，解不等式即可得到 a 的取值范围.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = (2 - a)x - 3$ 的函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小，

$\therefore 2 - a < 0$,

解得： $a > 2$.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数的图像如图所示，且经过点 $P(2, 1)$ ，那么当 x _____ 时， $y < 1$.



【答案】 $x < 2$

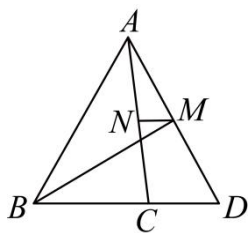
【解析】

【分析】 利用一次函数的增减性，结合已知点的坐标，直接判断不等式的解集.

【详解】 解： 根据题图可知，该一次函数的 y 随 x 的增大而增大，且点 P 的坐标为 $(2, 1)$ ，

故当 $x < 2$ 时， $y < 1$.

13. 如图，在 $\triangle ABD$ 中， $AB = 10$ ，点 C 在边 BD 上，且 $BC = 6$ ， BM 平分 $\angle ABD$ ， $BM \perp AD$ ，垂足为点 M ， N 为 AC 的中点，那么 MN 的长为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】先通过角平分线和垂直证明三角形全等，得到 $AB = BD$ 和 $AM = DM$ ，再利用三角形中位线定理，直接求出 MN 的长度.

【详解】解： $\because BM$ 平分 $\angle ABD$ ，

$$\therefore \angle ABM = \angle DBM,$$

$$\because BM \perp AD,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle DMB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle DMB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABM = \angle DBM \\ BM = BM \\ \angle AMB = \angle DMB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle DMB (\text{ASA}),$$

$$\therefore AM = DM, \quad AB = BD = 10,$$

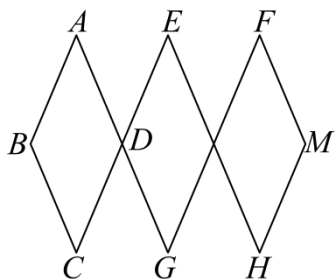
$$\because BC = 6,$$

$$\therefore CD = BD - BC = 4,$$

$\because N$ 为 AC 的中点，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}CD = 2.$$

14. 如图，木制活动衣架由三个全等的菱形组成，在 A 、 E 、 F 、 C 、 G 、 H 处安装上下两排挂钩，可以根据需要改变挂钩间的距离，并在 B 、 M 处固定. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 13cm ，要使两排挂钩间的距离 AC 为 24cm ，那么 B 、 M 之间的距离为_____ cm .

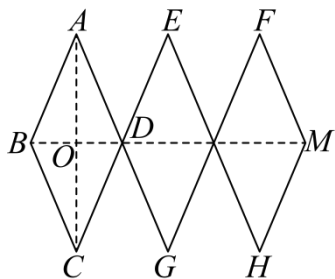


【答案】 30

【解析】

【分析】连接 AC ， BD 交于点 O ，根据四边形 $ABCD$ 是菱形求出 AO 的长，然后根据勾股定理求出 BO 的长，于是可以求出 B 、 M 两点的距离.

【详解】解：连接 AC ， BD 交于点 O .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AC = 12\text{cm}, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\text{cm},$$

$$\therefore BD = 2BO = 10\text{cm},$$

$$\therefore BM = 3BD = 30\text{cm}.$$

15. 定义：两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 80^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， D 、 E 分别是边 BC 、 AB 上的点，当四边形 $AEDC$ 为筝形时， $\angle BDE$ 的度数为_____.

【答案】 40° 或 100°

【解析】

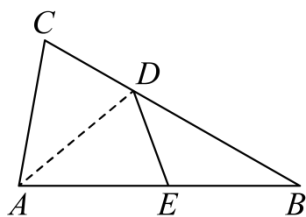
【分析】先根据三角形内角和定理求出 $\angle C$ 的度数，再根据筝形的定义分两种情况进行讨论，结合全等三角形的性质和三角形内角和、外角性质计算 $\angle BDE$ 的度数.

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 80^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ,$$

当四边形 $AEDC$ 为筝形，分两种情况讨论：

① 当 $AE = AC$ ， $DE = DC$ 时，连接 AD ，如图，



在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AE = AC \\ DE = DC, \\ AD = AD \end{cases}$$

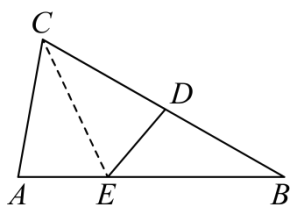
$$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACB = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle B + \angle BDE,$$

$$\therefore \angle BDE = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ,$$

② 当 $AE = DE$, $AC = DC$ 时, 连接 CE , 如图,



在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DEC$ 中,

$$\begin{cases} AC = DC \\ CE = CE, \\ AE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DEC (\text{SSS}),$$

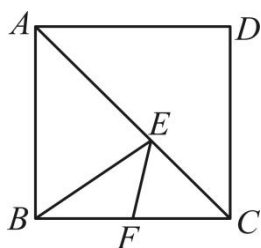
$$\therefore \angle CAE = \angle CDE = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE + \angle CDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ,$$

综上所述: $\angle BDE$ 的度数为 40° 或 100° .

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 是对角线 AC 上一点, F 是边 BC 的中点, 那么 $BE + EF$ 的最小值为_____.



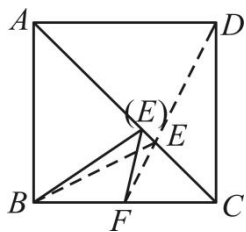
【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】连接 DF , 根据正方形的性质, 可知点 B 和 D 关于对角线 AC 对称, 再根据“两点之间线段最短”,

可得 $BE + EF$ 的最小值为 DF 的长，根据勾股定理，求解即可．

【详解】解：如图，连接 DF ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ ， AC 是对角线，

$\therefore$ 点 B 和 D 关于对角线 AC 对称，

$\therefore BE = DE$ ，

$\therefore BE + EF = DE + EF$ ，

根据两点之间线段最短可知，当 D 、 E 、 F 三点共线时， $BE + EF$ 最小，即 DF 的长，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2，

$\therefore CD = BC = 2$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

$\because F$ 是边 BC 的中点，

$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中， $DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

则 $BE + EF$ 的最小值为 $\sqrt{5}$ ．

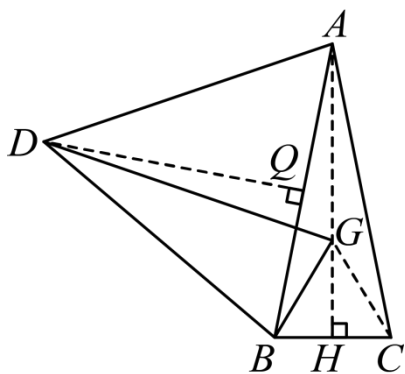
17. 在等腰 ABC 中， $AB = AC$ ， $BC = 2$ ， G 是 ABC 的重心，将 ABC 绕点 B 旋转，使点 C 恰好与点 G 重合，此时点 A 落在点 D 处，连接 AD ，那么四边形 $ACBD$ 的面积为_____．

【答案】 $10\sqrt{3}$

【解析】

【分析】利用等腰三角形三线合一，勾股定理，重心的性质以及旋转的性质，先求出 $\triangle ABD$ 是等边三角形，再求出 $\triangle ABC$ 的面积，最后计算四边形 $ACBD$ 的面积即可．

【详解】解：如图，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 D 作 $DQ \perp AB$ 于点 Q ，连 CG ，



$$\because AB = AC, BC = 2,$$

$$\therefore BH = HC = 1,$$

$$\because G \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的重心},$$

$$\therefore G \text{ 在 } AH \text{ 上},$$

$$\therefore AH = 3GH,$$

$$\text{设 } GH = x, \text{ 则 } AH = 3x,$$

$$\text{由旋转的性质可知, } BG = BC = 2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BHG \text{ 中, 由勾股定理得: } BH^2 + GH^2 = BG^2,$$

$$\therefore 1^2 + x^2 = 2^2,$$

$$\therefore x = \sqrt{3},$$

$$\therefore AH = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle CHG \text{ 中, } CH^2 + GH^2 = CG^2$$

$$\therefore CG = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\therefore BG = BC = CG = 2,$$

$$\therefore \angle CBG = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle CBG \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \text{旋转角为 } 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle ADQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore AQ = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } AD^2 = \left(\frac{1}{2}AD\right)^2 + DQ^2,$$

$$\therefore DQ = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABH \text{ 中 } AB^2 = AH^2 + BH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 1^2 = 28,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \times DQ = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 28 = 7\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \times AH = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{四边形 } ACBD \text{ 的面积} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} = 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

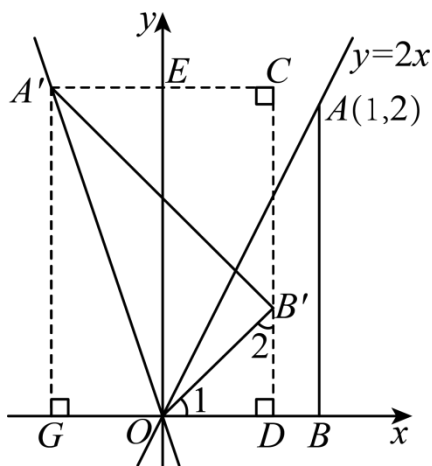
18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=2x$ 的图像绕原点 O 逆时针旋转 45° 后, 得到直线 l , 那么直线 l 的表达式为_____.

【答案】 $y = -3x$

【解析】

【分析】原一次函数图像过原点, 旋转后所得直线 l 仍过原点, 原函数选一点 $A(1, 2)$, 求出点 A 旋转后的坐标, 再利用待定系数法即可求出直线 l 表达式.

【详解】解: 一次函数 $y=2x$ 经过原点 $O(0, 0)$ 和点 $A(1, 2)$, 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴, 垂足为 B , 则 $AB=2$, $OB=1$, 旋转后原点位置不变, 因此直线 l 过原点, 设直线 l 的表达式为 $y=kx$, $\triangle ABO$ 绕原点逆时针旋转 45° , 得到 $\triangle A'B'O$, 过点 B' 作 $B'D \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 D , 过点 A' 作 $A'C \perp B'D$, 交 DB' 的延长线于点 C , 交 y 轴于点 E , 如下图



$\therefore$ 四边形 $A'GDC$ 有三个角是直角,

∴ 四边形 $A'GDC$ 是矩形,

∵ $\triangle A'B'O$ 是 $\triangle ABO$ 绕原点旋转 45° 得到的,

∴ $A'B'O \cong ABO$, $\angle 1 = 45^\circ$,

∵ $B'D \perp x$ 轴,

∴ $\angle ABO = 90^\circ$, $\angle 2 = 45^\circ$,

Q $\angle A'B'O = \angle ABO = 90^\circ$,

∴ $\angle A'B'C = 45^\circ$,

$$\therefore OD = B'D = \frac{\sqrt{2}}{2} OB' = \frac{\sqrt{2}}{2} OB = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

∵ $\angle A'CB' = 90^\circ$,

∴ $\angle B'A'C = 45^\circ$, $A'C = B'C$

$$\therefore A'C = B'C = \frac{\sqrt{2}}{2} A'B' = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore A'G = CD = B'D + B'C = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$GO = A'E = A'C - CE = A'C - OD = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \text{点 } A' \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right),$$

代入直线 l 的表达式 $y = kx$, 得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 解得 $k = -3$,

∴ 直线 l 的表达式为 $y = -3x$.

三、解答题 (共 58 分)

19. 如果一个 n 边形的内角和是外角和的 5 倍.

(1) 求 n 的值;

(2) 如果该 n 边形的每个外角都相等, 求每个内角的度数.

【答案】(1) $n = 12$

(2) 150°

【解析】

【分析】(1) 利用多边形内角和公式与外角和的固定值, 根据内角和是外角和的 5 倍列方程求解.

(2) 利用多边形外角和与内角、外角互补的性质，分步计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 任意多边形的外角和为 360° ，且该 n 边形的内角和是外角和的 5 倍，

$\therefore$ 该 n 边形的内角和为 $5 \times 360^\circ = 1800^\circ$.

又 $\because n$ 边形的内角和公式为 $(n-2) \times 180^\circ$ ，

$\therefore (n-2) \times 180^\circ = 1800^\circ$ ，

解得: $n = 12$ ；

【小问 2 详解】

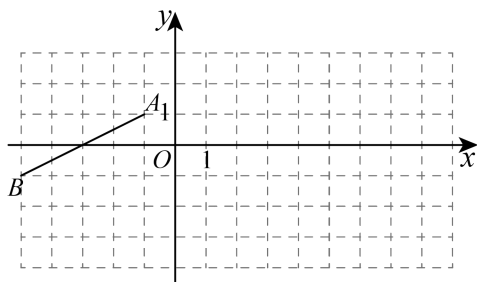
由 (1) 得 $n = 12$ ，且该多边形每个外角都相等，

$\therefore$ 每个外角的度数为: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ ，

$\because$ 多边形的内角与相邻外角互补，

$\therefore$ 每个内角的度数为: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

20. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知线段 AB 的两个端点 $A(-1,1)$ 、 $B(-5,-1)$ 。



(1) 画出线段 AB 向右平移 7 个单位长度的线段 A_1B_1 ，并写出点 A_1 、 B_1 的坐标；

(2) 画出线段 A_1B_1 关于 x 轴对称的线段 A_2B_2 ，并写出点 A_2 、 B_2 的坐标；

(3) 已知点 M 在 y 轴上，且 $AM = AB$ ，求 M 的坐标.

【答案】(1) 见解析; $A_1(6,1)$ 、 $B_1(2,-1)$

(2) 见解析; $A_2(6,-1)$ 、 $B_2(2,1)$

(3) $(0, 1 + \sqrt{19})$ 或 $(0, 1 - \sqrt{19})$

【解析】

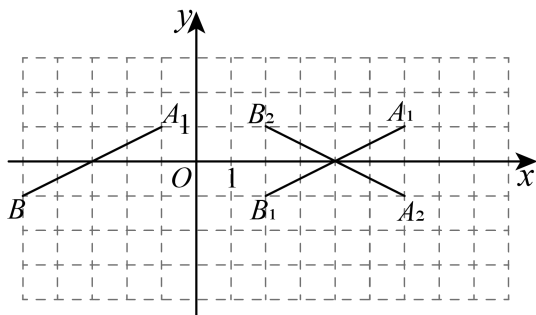
【分析】(1) 根据平移的性质解答即可；

(2) 根据轴对称的性质解答即可；

(3) 设点 M 的坐标为 $(0, m)$ ，根据题意可得 $AM^2 = AB^2$ ，从而得到 $(-1-0)^2 + (1-m)^2 = 20$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，线段 A_1B_1 即为所求；



点 A_1 、 B_1 的坐标分别为 $A_1(1, 1)$ 、 $B_1(2, -1)$ ；

【小问 2 详解】

解：如图，线段 A_2B_2 即为所求；

点 A_2 、 B_2 的坐标分别为 $A_2(6, -1)$ 、 $B_2(2, 1)$ ；

【小问 3 详解】

解：设点 M 的坐标为 $(0, m)$ ，

根据题意得： $AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ ，

$$\therefore AM = AB,$$

$$\therefore AM^2 = AB^2,$$

$$\therefore \text{点 } A(-1, 1),$$

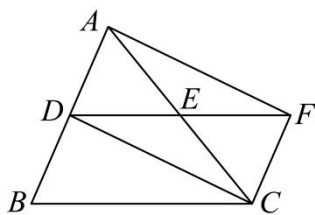
$$\therefore (-1-0)^2 + (1-m)^2 = 20,$$

$$\text{整理得： } m^2 - 2m - 18 = 0,$$

$$\text{解得： } m_1 = 1 + \sqrt{19}, m_2 = 1 - \sqrt{19},$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (0, 1 + \sqrt{19}) \text{ 或 } (0, 1 - \sqrt{19}).$$

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 中点，连接 DE 并延长到点 F ，使 $EF = DE$ ，连接 CD 、 CF 、 AF 。



(1) 求证：四边形 $DBCF$ 是平行四边形；

(2) 求证：四边形 $ADCF$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据三角形中位线定理可得 $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$ ，再由 $EF = DE$ ，可得 $DF = BC$ ，即可

求证；

(2) 先证明四边形 $ADCF$ 是平行四边形，再结合等腰三角形的性质可得 $CD \perp AD$ ，即可求证.

【小问 1 详解】

证明： $\because D、E$ 分别是边 $AB、AC$ 中点，

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC, \text{ 即 } DF \parallel BC,$$

$$\because EF = DE, \text{ 即 } DF = 2DE,$$

$$\therefore DF = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

证明： $\because$ 点 E 是边 AC 中点，

$$\therefore AE = CE,$$

$$\because EF = DE,$$

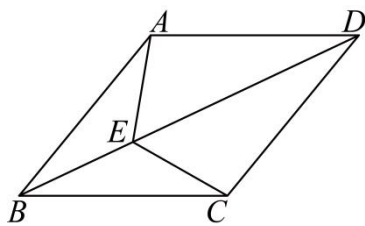
$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

$\because AC = BC$ ，点 D 为 AB 的中点，

$$\therefore CD \perp AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是矩形.

22. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， E 是对角线 BD 上一点，连接 $EA、EC$.



- (1) 求证: $\angle AED = \angle CED$;
 (2) 如果 $AE = 2$, $AB = 4$, $DE = 2BE$, 求 BD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $3\sqrt{6}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SAS), 可得 $\angle ADE = \angle CDE$, 可证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ (SAS), 即可求证;

(2) 连接 AC , 交 BD 于点 O , 根据菱形的性质可得到 $OE = \frac{1}{3}OB$, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 和 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, 利用勾股定理可得 $4^2 - OB^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{3}OB\right)^2$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB = BC, \angle BAD = \angle BCD,$$

$$\therefore BD = BD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDE,$$

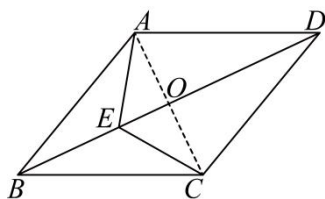
$$\therefore DE = DE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AED = \angle CED;$$

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 AC , 交 BD 于点 O ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AC \perp BD, BD = 2OB,$$

$$\because DE = 2BE,$$

$$\therefore BD = 3BE,$$

$$\therefore OB = \frac{3}{2}BE, \text{ 即 } OE = \frac{1}{3}OB,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 和 Rt}\triangle AOE \text{ 中, } AB^2 - OB^2 = OA^2 = AE^2 - OE^2,$$

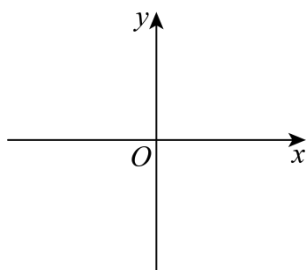
$$\because AE = 2, AB = 4,$$

$$\therefore 4^2 - OB^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{3}OB\right)^2,$$

$$\text{解得: } OB = \frac{3\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore BD = 2OB = 3\sqrt{6},$$

23. 如图, 已知点 $P(1, 2)$ 在一次函数 $y = mx$ ($m \neq 0$) 的图像上, 过点 P 作 x 轴垂线, 垂足为点 A , 点 A 、 $Q(q, 1)$ 都在一次函数 $y = kx + b$ ($k > 0$) 的图像上, 直线 $y = mx$ 与直线 $y = kx + b$ 交于点 B .



(1) 求 m 的值;

(2) 如果 $\triangle APQ$ 的面积是 4, 求 k 、 b 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 C 在函数 $y = mx$ 的图像上, 如果 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8}S_{\triangle ABP}$, 求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $m = 2$

$$(2) \quad k = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}$$

$$(3) \quad (0, 0) \text{ 或 } \left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right)$$

【解析】

【分析】 (1) 将 $P(1, 2)$ 代入 $y = mx$ 即可求解.

(2) 过 $P(1,2)$ 作 x 轴垂线, 垂足 A 坐标为 $(1,0)$, 则 $AP=2$, 根据 $S_{\triangle APQ}=4$, $Q(q,1)$, 得出 $|q-1|=4$, 求出 $q=5$ 或 $q=-3$. 根据直线 $y=kx+b$ 过 $A(1,0)$ 、 $Q(q,1)$, 得出 $k=\frac{1}{q-1}$, 结合 $k>0$, 得 $q-1>0$, 则 $q=5$, $Q(5,1)$. 将 $A(1,0)$ 、 $Q(5,1)$ 代入 $y=kx+b$ 即可求解.

(3) 联立直线方程 $\begin{cases} y=2x \\ y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4} \end{cases}$, 求出 $B(-\frac{1}{7}, -\frac{2}{7})$, 再求出 $S_{\triangle ABP}=\frac{8}{7}$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABP}=\frac{1}{7}$, 设 $C(t, 2t)$, 则 $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\times 2\times(1-t)=1-t$, 根据 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}-S_{\triangle APC}=\frac{8}{7}-(1-t)=\frac{1}{7}+t$, 或 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APC}-S_{\triangle APB}=(1-t)-\frac{8}{7}=-\frac{1}{7}-t$, 求解即可.

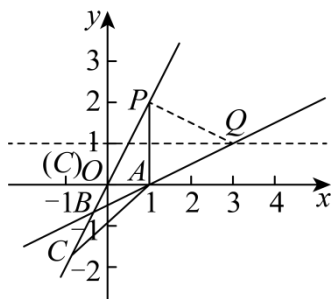
【小问 1 详解】

解: 将 $P(1,2)$ 代入 $y=mx$, 得 $2=m\cdot 1$,

解得: $m=2$.

【小问 2 详解】

解: 过 $P(1,2)$ 作 x 轴垂线, 垂足 A 坐标为 $(1,0)$,



则 $AP=2-0=2$,

$\therefore S_{\triangle APQ}=4$, $Q(q,1)$,

$\therefore S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot|q-1|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|q-1|=|q-1|=4$,

$\therefore q=5$ 或 $q=-3$.

$\therefore$ 直线 $y=kx+b$ 过 $A(1,0)$ 、 $Q(q,1)$,

$\therefore \begin{cases} 0=k+b \\ 1=qk+b \end{cases}$,

解得: $k = \frac{1}{q-1}$,

$\therefore k > 0$,

$\therefore q-1 > 0$, 解得: $q > 1$,

$\therefore q = 5$,

$\therefore Q(5,1)$.

将 $A(1,0)$ 、 $Q(5,1)$ 代入 $y = kx + b$, 得方程组: $\begin{cases} k + b = 0 \\ 5k + b = 1 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$.

【小问 3 详解】

解: 联立直线方程 $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \end{cases}$,

解得: $B\left(-\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$,

$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 2 \times \left[1 - \left(-\frac{1}{7}\right)\right] = \frac{8}{7}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8} S_{\triangle ABP} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{1}{7}$,

$\therefore$ 点 C 在直线 $y = 2x$ 上,

$\therefore$ 设 $C(t, 2t)$,

则 $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \times 2 \times (1-t) = 1-t$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} - S_{\triangle APC} = \frac{8}{7} - (1-t) = \frac{1}{7} + t$,

$\therefore \frac{1}{7} + t = \frac{1}{7}$,

解得 $t = 0$;

或 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} - S_{\triangle APB} = (1-t) - \frac{8}{7} = -\frac{1}{7} - t$,

$$\therefore -\frac{1}{7} - t = \frac{1}{7},$$

$$\text{解得: } t = -\frac{2}{7}.$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (0, 0) \text{ 或 } \left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right).$$

24. 在一次综合与实践活动课中, 同学们对矩形纸片的折叠展开了探究, 请你和他们一起完成此次探究活动.

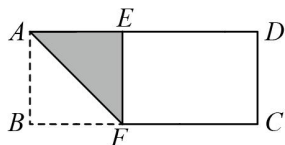


图1

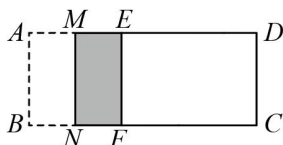


图2

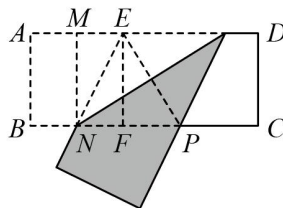


图3

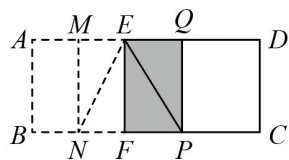


图4

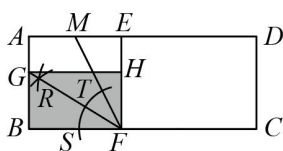


图5

(1) 【课内活动1】用矩形纸片折出正方形

操作步骤: 如图1, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 折叠矩形使得点 B 与 AD 边上的点 E 重合, 折痕为 AF , 连接 EF .

求证: 四边形 $ABFE$ 是正方形.

(2) 【课内活动2】用矩形纸片折出特殊矩形

操作步骤:

①把活动1中折出的正方形 $ABFE$ 纸片展平;

②如图2, 把这个正方形折成两个全等的矩形, 得到折痕 MN , 把纸片展平;

③如图3, 折出矩形 $MNFE$ 的对角线 NE , 点 P 在边 BC 上, 折叠纸片使得 NE 与 NP 重合;

④如图4把纸片展平, 折出 PQ , 得到矩形 $EFPQ$.

求: 矩形 $EFPQ$ 的宽 FP 与长 EF 的比值.

(3) 【课后思考】可以用尺规作图作出黄金矩形吗?

课后, 欢欢通过查阅资料了解到: 像课内活动2中这样的特殊矩形叫做黄金矩形. 也就是说, 如果一个矩

形的宽与长的比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，那么这个矩形叫做黄金矩形。欢欢认为可以用尺规作图得到黄金矩形，具体

作法如下：

①把活动1中折出的正方形 $ABFE$ 纸片展平；

② AE 中点为 M ，连接 FM ；

③以点 F 为圆心，适当长度为半径作弧，分别交 FB 、 FM 于点 S 、 T ，再分别以 S 、 T 为圆心，大于 $\frac{1}{2}ST$ 长度为半径画弧，两段弧的交点记为点 R ；

④画射线 FR ，与边 AB 交于点 G ；

⑤以 F 为圆心， BG 为半径画弧，与边 EF 交于点 H ，连接 GH ，得到四边形 $GBFH$ ，那么四边形 $GBFH$ 就是黄金矩形。

请你判断欢欢的作图是否正确，如果正确，请证明；如果不正确，请说明理由。

【答案】(1) 见详解 (2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(3) 正确，见详解

【解析】

【分析】(1) 根据四边形 $ABCD$ 是矩形，得出 $\angle BAD = \angle B = 90^\circ$ ，由折叠的性质可得： $AB = AE$ ， $\angle AEF = \angle B = 90^\circ$ 。证明四边形 $ABFE$ 是矩形，结合 $AB = AE$ ，得出矩形 $ABFE$ 是正方形。

(2) 设正方形 $ABFE$ 的边长为 a ，由折叠得 MN 是正方形 $ABFE$ 的中垂线，则 $EM = FN = \frac{1}{2}AE = \frac{a}{2}$ ， $MN = EF = a$ ， $\angle NME = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle EMN$ 中，由勾股定理得 $NE = \frac{\sqrt{5}a}{2}$ ，由折叠性质得

$NP = NE = \frac{\sqrt{5}a}{2}$ ，则 $FP = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}$ ，即可求解。

(3) 设正方形 $ABFE$ 边长 $BF = EF = AB = a$ ，则 $AM = \frac{a}{2}$ 。在 $\text{Rt}\triangle FEM$ 中，由勾股定理得

$FM = \frac{\sqrt{5}a}{2}$ ，过点 G 作 $GK \perp FM$ ，连接 GM ，设 $BG = x$ ，根据角平分线性定理得 $GK = BG = x$ ，

则 $AG = a - x$ ，求出 $S_{\triangle FGM} = \frac{1}{2}FM \times GK = \frac{\sqrt{5}ax}{4}$ ，又

$S_{\triangle FGM} = S_{\text{正方形}ABFE} - S_{\triangle AGM} - S_{\triangle BGF} - S_{\triangle EFM} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}ax$ ，则 $\frac{\sqrt{5}ax}{4} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}ax$ ，即可求出

$BG = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}$. 由作图得 $FH = BG$, 证出四边形 $GBFH$ 是矩形, 则矩形 $GBFH$ 的宽为

$BG = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}$, 长为 $BF = a$, 得出 $\frac{BG}{BF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 符合黄金矩形的定义, 因此欢欢的作图正确.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle BAD = \angle B = 90^\circ,$$

由折叠的性质可得: $AB = AE$, $\angle AEF = \angle B = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAE = \angle B = \angle AEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是矩形,

又 $AB = AE$,

$\therefore$ 矩形 $ABFE$ 是正方形.

【小问 2 详解】

解: 设正方形 $ABFE$ 的边长为 a ,

由折叠得 MN 是正方形 $ABFE$ 的中垂线,

$$\therefore EM = FN = \frac{1}{2}AE = \frac{a}{2} \quad , \quad MN = EF = a \quad , \quad \angle NME = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle EMN$ 中, 由勾股定理: $NE = \sqrt{EM^2 + MN^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$,

由折叠性质得 $NP = NE = \frac{\sqrt{5}a}{2}$,

$$\therefore NP = FN + FP,$$

$$\therefore FP = NP - FN = \frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2},$$

$$\therefore \frac{FP}{EF} = \frac{\frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【小问 3 详解】

解: 作图正确, 证明如下:

设正方形 $ABFE$ 边长 $BF = EF = AB = a$,

$\therefore M$ 是 AE 中点,

$$\therefore AM = \frac{a}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle FEM \text{ 中, 由勾股定理得: } FM = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2},$$

过点 G 作 $GK \perp FM$, 连接 GM ,

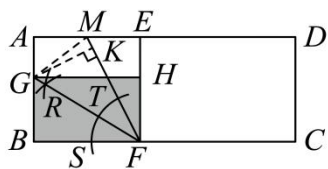


图5

设 $BG = x$,

题目中尺规作图第③步是作 $\angle BFM$ 的角平分线, 即 FG 平分 $\angle BFM$,

$$\therefore GK = BG = x,$$

则 $AG = a - x$,

$$\therefore S_{\triangle FGM} = \frac{1}{2} FM \times GK = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{5}ax}{4},$$

$$\text{又 } S_{\triangle FGM} = S_{\text{正方形}ABFE} - S_{\triangle AGM} - S_{\triangle BGF} - S_{\triangle EFM}$$

$$= a^2 - \frac{1}{2}(a-x) \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2}$$

$$= a^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ax - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}ax,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}ax}{4} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}ax,$$

$$\therefore x = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2},$$

$$\therefore BG = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2},$$

由作图得 $FH = BG$,

$$\therefore \angle GBF + \angle BFH = 180^\circ,$$

$$\therefore BG \parallel FH,$$

$$\therefore \angle GBF = \angle BFH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $GBFH$ 是矩形,

$\therefore$ 矩形 $GBFH$ 的宽为 $BG = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}$, 长为 $BF = a$,

$\therefore \frac{BG}{BF} = \frac{\frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 符合黄金矩形的定义, 因此欢欢的作图正确.